Abschlussprüfung Fachoberschule 2018
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /34

Bei einer Ballonfahrt wurde die Höhe über dem Erdboden mit Hilfe eines GPS-Geräts aufgezeichnet. Die gemessene Höhe kann näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion *f* mit

$$f(x) = -50x^3 + 200x^2 + 100x\,.$$

Dabei bezeichnet x die Zeit nach dem Start in Stunden und $f(x)$ die Höhe in Meter.

Der Ballon startet zum Zeitpunkt $x = 0$ auf der Höhe $f(0) = 0$.

1.1 Berechnen Sie die Dauer der Ballonfahrt vom Start bis zur Landung. **/6**

1.2 Geben Sie einen für den Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich an. **/1**

1.3 Bestimmen Sie die Steiggeschwindigkeit in m/s des Ballons zum Zeitpunkt $x = 1{,}5$ h nach dem Start. **/5**

1.4 Berechnen Sie mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung die größte erreichte Höhe und die dafür benötigte Flugzeit (in Stunden und Minuten) ab dem Start. **/6**

1.5 Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen von *f* und deuten Sie diesen im Sachzusammenhang. **/7**

[Hinweis: Rechnen Sie mit drei Stellen nach dem Komma.]

1.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/5**

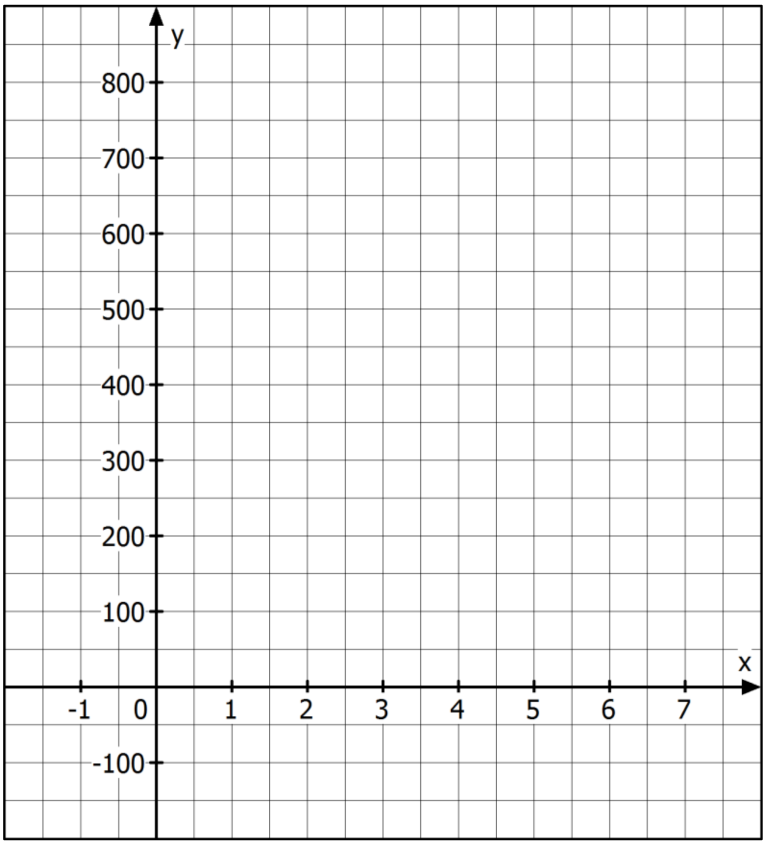
x	0	1	2	3	4	4,45
$f(x)$						

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer errechneten Ergebnisse und der Tabellenwerte den Graphen von *f* (Höhenprofil) im Intervall $[0\,;\,4{,}45]$ in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

1.7 Zu Beginn der Ballonfahrt beträgt die Steiggeschwindigkeit des Ballons 100 m/h. Ermitteln Sie den Zeitpunkt, nach dem die Steiggeschwindigkeit auf einen Wert von weniger als 100 m/h fällt. **/4**

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6 → nächste Seite

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6



2 Integralrechnung /31

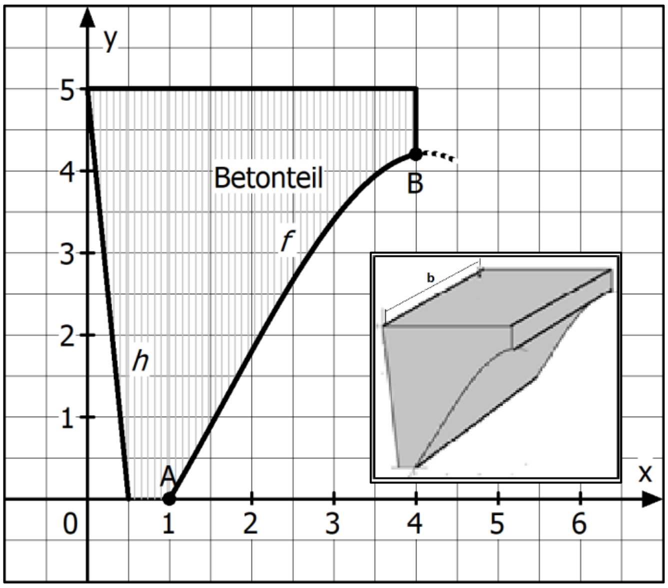
Die Grafik zeigt ein Betonteil, das für den Bau von Bahnunterführungen genutzt wird – zusammen mit einem spiegelbildlichen Betonteil.

Die Funktionsgleichung von f ist

$$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + x - 1{,}4\,.$$

Die Begrenzung des Betonteils auf der linken Seite wird beschrieben durch die Gerade h mit $h(x) = -10x + 5$.

1 LE = 1 m



2.1 Zeigen Sie, dass die Punkte $A(1\,|\,0)$ und $B(4\,|\,4{,}2)$ (siehe Abbildung) auf dem Graphen von f liegen. **/2**

2.2 Ein Betonteil wird mit einem spiegelbildlichen Betonteil zu einer Bahnunterführung verbunden. An der Verbindungsstelle im Punkt B darf der Winkel dabei nicht größer als 12° sein. **/6**

Überprüfen Sie, ob diese Bedingung bei dem beschriebenen Betonteil erfüllt ist.

2.3 Berechnen Sie den Inhalt der schraffiert dargestellten Querschnittsfläche in m^2. **/9**

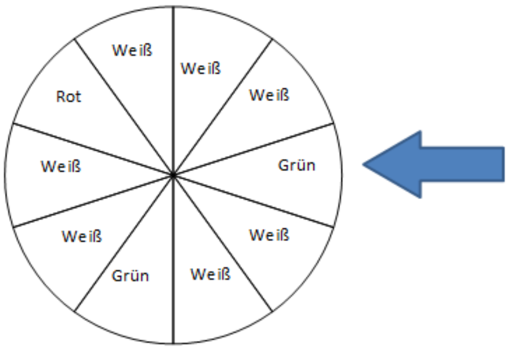
2.4 Berechnen Sie das Gesamtvolumen eines solchen Betonteils in m^3, wenn dieses eine Breite von $b = 8$ m hat. **/2**

2.5 Im Bereich $x \leq 2$ entsteht ein Riss in dem Betonteil, dessen Verlauf durch den Graphen der Funktion p mit $p(x) = 5 - (x-2)^2$ beschrieben werden kann. **/12**
Zeichnen Sie den Graphen von p in die obige Skizze ein.
Berechnen Sie die Größe des Teils der Querschnittsfläche, der links von dem Riss liegt.

3 Stochastik /35

Ein Glücksrad besteht aus zehn gleich großen Sektoren. Ein Sektor ist rot, zwei sind grün und die restlichen Sektoren sind weiß. Ein fester Pfeil zeigt das Ergebnis nach der Drehung des Glücksrades an.

Glücksrad



Der erste Dreh am Glücksrad ist entscheidend für die Gesamtzahl der Drehungen:

Nachdem das Glücksrad das erste Mal gedreht wurde, gilt folgende Regel:

Ist das erste Ergebnis Weiß, ist das Spiel beendet.

Zeigt das Glücksrad nach dem ersten Dreh die Farbe Grün, darf ein zweites Mal gedreht werden.

Ist das erste Ergebnis Rot, darf insgesamt dreimal gedreht werden.

3.1 Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm, das alle möglichen Spielverläufe darstellt. Beschriften Sie alle Zweigwahrscheinlichkeiten. **/9**
[Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie viele Pfade bei diesem Zufallsexperiment entstehen und teilen Sie danach Ihren Platz sinnvoll ein.]

3.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse: **/15**

A: Es tritt das Ereignis „Rot, Weiß, Weiß" ein.
B: Es wird drei Mal die gleiche Farbe gezeigt.
C: Das Glücksrad zeigt mindestens einmal weiß.
D: Es wird genau zwei Mal die gleiche Farbe gezeigt.
E: Im Ergebnis kommt keine Farbe mehrfach vor.

Das Glücksrad mit den oben genannten Regeln wird nun für ein Gewinnspiel genutzt.
Der Einsatz pro Spiel beträgt 1 €.
Tritt das Ereignis „dreimal die gleiche Farbe" ein, erhält der Spieler 10 €, beim Ereignis „zwei gleiche Farben" erhält der Spieler 5 €. In allen anderen Fällen erhält der Spieler nichts.

3.3 Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler einen Gewinn erzielt, genau 0,112 beträgt. **/3**

3.4 Wie hoch ist auf lange Sicht der Gewinn bzw. Verlust des Veranstalters pro Spiel? **/3**

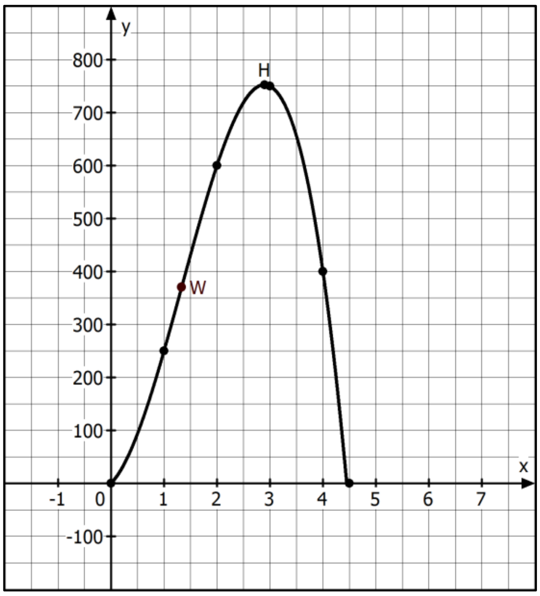
3.5 Um wie viel Euro müsste man den Auszahlungsbetrag für das Ereignis „zwei gleiche Farben" ändern, damit das Spiel fair wird? **/5**

Abschlussprüfung Fachoberschule 2018
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

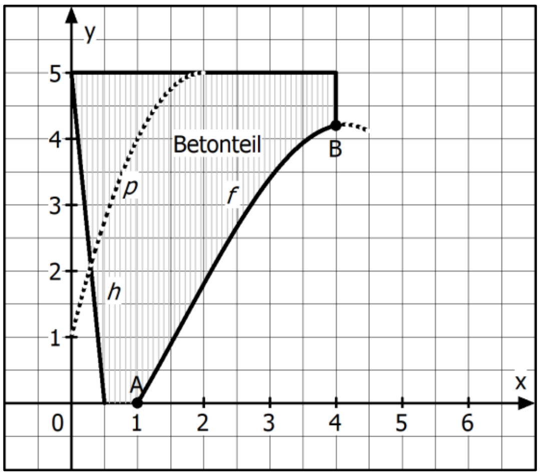
Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.1	Ansatz: $-50x^3+200x^2+100x=0$ $x(-50x^2+200x+100)=0$ $x=0$; $-50x^2+200x+100=0$; $x_1=0$; (Startpunkt) $x^2-4x-2=0$ $x_2=2+\sqrt{6}$; $x_3=2-\sqrt{6}$ $x_2=2+\sqrt{6}\approx 4{,}45$; (gesuchte Nullstelle) $x_3=2-\sqrt{6}\approx -0{,}45$ Da dieser Wert negativ ist, steht er nicht im Sachzusammenhang. Die Ballonfahrt dauert ca. 4,45 Stunden (4 Stunden und 27 Minuten).	1 3	2	
1.2	$D=[0\,;\,4{,}45]$ Hinweis: Auch Angaben mit anderen Rundungen werden akzeptiert.	1		
1.3	Ansatz: $f'(x)=-150x^2+400x+100=m$ $f'(1{,}5)=-150\cdot(1{,}5)^2+400\cdot(1{,}5)+100$ $m=362{,}5$ Die Steiggeschwindigkeit beträgt 362,5 m/h, also ca. 0,1 m/s.		5	
1.4	Ansatz: $f'(x)=0$; $f''(x)\neq 0$ $f'(x)=-150x^2+400x+100$ $f''(x)=-300x+400$ $-150x^2+400x+100=0$ $x^2-\frac{8}{3}x-\frac{2}{3}=0$ $x_1=\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{22}{9}}\approx 2{,}9$; $x_2=\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{22}{9}}$ $x_2<0$; ist im Sachzusammenhang ohne Bedeutung $f''(x_1)=-300\cdot\left(\frac{4}{3}+\sqrt{\frac{22}{9}}\right)+400\approx -469<0$ Somit befindet sich an der Stelle $x_1\approx 2{,}9$ ein Hochpunkt. $f(2{,}9)\approx 753$ Der Ballon hat nach ca. 2 Stunden und 54 Minuten seine größte Höhe von 753 m erreicht.		1 5	

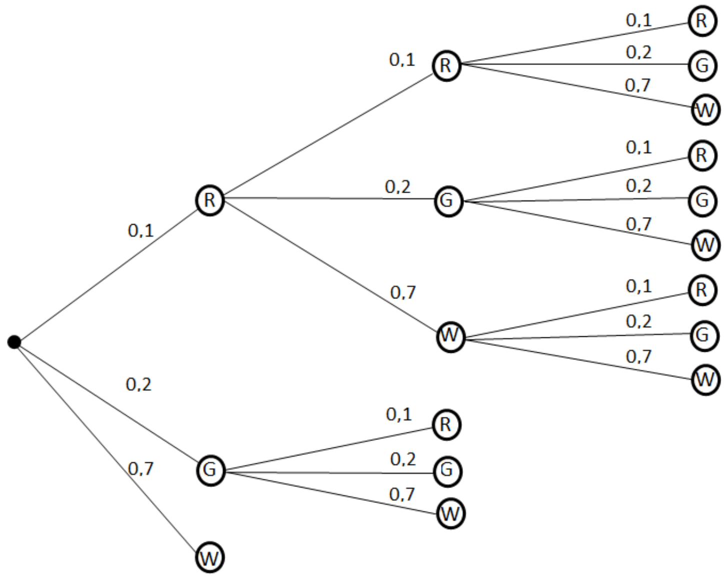
<table>
<tr>
<td>1.5</td>
<td>Ansatz:
$f''(x) = 0$; $f'''(x) \neq 0$
$f''(x) = -300x + 400$
$x = \frac{4}{3}$
$f'''(x) = -300 \neq 0$; $x_W = \frac{4}{3}$
Berechnung der y-Koordinate des Wendepunktes:
$f\left(\frac{4}{3}\right) = -50 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 200 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 100 \cdot \frac{4}{3} \approx 370{,}370$
Somit befindet sich an der Stelle $x_W = 1{,}333$ ein Wendepunkt.
Wendepunkt: $W(1{,}333 \,|\, 370{,}4)$
Aus $f'''\left(\frac{4}{3}\right) < 0$ folgt, dass hier ein Wendepunkt vorliegt. Da der Wendepunkt im monoton steigenden Teil des Graphen liegt, liegt in diesem Punkt die maximale Steiggeschwindigkeit vor.</td>
<td></td>
<td>1

4</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>1.6</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>4,45</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>250</td><td>600</td><td>750</td><td>400</td><td>0</td></tr>
</table>


</td>
<td>2</td>
<td>3</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>1.7</td>
<td>$f'(x) < 100$
$f'(x) = -150x^2 + 400x + 100$
$-150x^2 + 400x + 100 = 100$
$-150x^2 + 400x = 0$
$x(-150x + 400) = 0$
$x_1 = 0$; $x_2 = 2\frac{2}{3}$
Nach $2\frac{2}{3}$ (2h 40min) sinkt die Steiggeschwindigkeit auf unter 100 m/h.</td>
<td></td>
<td></td>
<td>4</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td>
<td>7</td>
<td>21</td>
<td>6</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Summe der BE</td>
<td colspan="3">34</td>
</tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.1	$f(1) = -\frac{1}{10}\cdot(1)^3 + \frac{1}{2}\cdot(1)^2 + 1 - 1{,}4 = 0$ $f(4) = -\frac{1}{10}\cdot(4)^3 + \frac{1}{2}\cdot(4)^2 + 4 - 1{,}4 = 4{,}2$ Die Punkte *A* und *B* liegen auf dem Graphen.	2		
2.2	Ansatz: $f'(x) = 0$ $f'(x) = -\frac{3}{10}\cdot x^2 + x + 1$ $f'(4) = -\frac{3}{10}\cdot 4^2 + 4 + 1 = 0{,}2$ $\alpha = \tan^{-1}(0{,}2) \approx 11{,}3°$ Der Winkel ist zulässig.		6	
2.3	Die Nullstelle der Geraden *h* liegt bei *x* = 0,5. $A = A_1 + A_2 + A$ $A_1 = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = 1{,}25$ $A_2 = \frac{1}{2}\cdot 5 = 2{,}5$ $A_3 = \int_1^4 (5 - f(x))\mathrm{d}x = \int_1^4 (5 - (-\frac{1}{10}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + x - 1{,}4))\mathrm{d}x$ $A_3 = \int_1^4 (\frac{1}{10}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - x + 6{,}4)\mathrm{d}x$ $= \left[\frac{x^4}{40} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 6{,}4x\right]_1^4$ $= \left(\frac{4^4}{40} - \frac{4^3}{6} - \frac{4^2}{2} + 6{,}4\cdot 4\right) - \left(\frac{1^4}{40} - \frac{1^3}{6} - \frac{1^2}{2} + 6{,}4\right)$ $= 7{,}575$ Die Gesamtfläche beträgt 11,325 m^2.	2	7	
2.4	$V = A \cdot 8\text{ m} = 11{,}325\text{ m}^2 \cdot 8\text{ m} = 90{,}6\text{ m}^3$.	2		

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.5	 Schnittstellen bestimmen: $p(x) = h(x)$ $-x^2 + 4x + 1 = -10 \cdot x + 5$ $-x^2 + 14 \cdot x - 4 = 0$ $x^2 - 14 \cdot x + 4 = 0$ Anwendung der p – q – Formel $x_1 \approx 0{,}29$; $x_2 \approx 13{,}71$ $A_G = A_1 + A_2$ $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}29 \cdot (5 - h(0{,}29)) \approx 0{,}42$ $A_2 = \int_{0,29}^{2} (5 - p(x))dx = \int_{0,29}^{2} (5 - (-x^2 + 4x + 1))dx = \int_{0,29}^{2} (x^2 - 4x + 4)dx$ $= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_{0,29}^{2}$ $= \left(\frac{2^3}{3} + \frac{4 \cdot 2^2}{2} + 4 \cdot 2 \right) - \left(\frac{0{,}29^3}{3} + \frac{4 \cdot 0{,}29^2}{2} + 4 \cdot 0{,}29 \right) \approx 1{,}67$ $A_G = 0{,}42 + 1{,}67 \approx 2{,}09$	2	5 5	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	8	23	0
	Summe der BE	31		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.1	Baumdiagramm 	3	6	
3.2	$P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{RWW}) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}049$ $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{RRR}) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$ $P(\mathrm{C}) = 1 - P(\text{kein weiss}) = 1 - P(\mathrm{RRR, RGR, RRG, RGG, GR, GG})$ $P(\mathrm{C}) = 1 - P(\text{kein weiss}) = 1 - P\left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{500} + \frac{1}{500} + \frac{1}{250} + \frac{1}{50} + \frac{1}{25}\right)$ $P(\mathrm{C}) = 1 - \frac{69}{1000} = \frac{931}{1000} = 0{,}931$ $P(\mathrm{D}) = P(\mathrm{GG, RWR, RWW, RGR, RGG, RRW, RRG})$ $P(\mathrm{D}) = \frac{1}{25} + \frac{7}{1000} + \frac{49}{1000} + \frac{1}{500} + \frac{1}{250} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{500} = \frac{111}{1000} = 0{,}111$ $P(\mathrm{E}) = P(\mathrm{W, GW, GR, RWG, RGW})$ $P(\mathrm{E}) = \frac{7}{10} + \frac{7}{50} + \frac{1}{50} + \frac{7}{500} + \frac{7}{500} = \frac{111}{125} = 0{,}888$	2 2	4 4 3	
3.3	$P(\text{Gewinn}) = P(\mathrm{RRR}) + P(\text{zwei Mal die gleiche Farbe})$ $P(\text{Gewinn}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{C})$; aus Aufgabe 3.2 $P(\text{Gewinn}) = \frac{1}{1000} + \frac{111}{1000})$ $P(\text{Gewinn}) = \frac{14}{125} = 0{,}112$		3	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.4</td><td>Erwartungswert der Auszahlung:
$E(\text{Auszahlung}) = \frac{1}{1000} \cdot 10\ € + \frac{111}{1000} \cdot 5\ € = 0{,}565$

Erwarteter Auszahlungsbetrag beträgt 0,57 € pro Spiel.
Der Einsatz beträgt 1 €, somit ist der Gewinn für den Veranstalter 0,43 € pro Spiel.</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Für den Auszahlungsbetrag x muss bei einem fairen Spiel gelten:
$\frac{1}{1000} \cdot 10\ € + \frac{111}{1000} \cdot x\ € = 1$
$x = 8{,}918\ € \approx 8{,}92\ €$
Der Auszahlungsbetrag müsste um 3,92 € auf 8,92 € geändert werden.</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>8</td><td>22</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">35</td></tr>
</table>