Abschlussprüfung Fachoberschule 2016
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /41

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung $f(x)=x^4-9x^2-4x+12$, $x \in IR$.

1.1 Berechnen Sie die fehlenden Funktionswerte *f(x)* für folgende Werte von *x*. **/7**
Tragen Sie die Ergebnisse in die Wertetabelle ein.

x	-2,5	-2	-1,5	0	1	2	3	3,2
f(x)		0						

Benennen Sie aufgrund der ausgefüllten Wertetabelle alle Schnittpunkte des Funktionsgraphen der Funktion *f* mit der *x*-Achse.
Weitere Schnittpunkte mit der *x*-Achse sind nicht vorhanden. Begründen Sie, warum an der Stelle $x=-2$ ein Minimum vorliegt.

1.2 Untersuchen Sie den Graphen von *f* auf Symmetrie. Begründen Sie Ihre Aussage. **/4**

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von *f* im Unendlichen.

1.3 Bestimmen Sie die Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von *f*. **/19**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von *f* im Intervall $[-2{,}5;3{,}2]$ mittels aller ermittelten Punkte aus 1.1 und 1.3. **/4**

Nutzen Sie hierfür das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

1.5 Gegeben ist die Funktion *g* mit **/2**

$$g(x)=x^4-9x^2-4x+a\,,\quad x,a \in IR\,.$$

Beschreiben Sie, welche Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte sich ändern, wenn $a \neq 12$ ist.
HINWEIS: Für $a=12$ ist $g(x)=f(x)$.

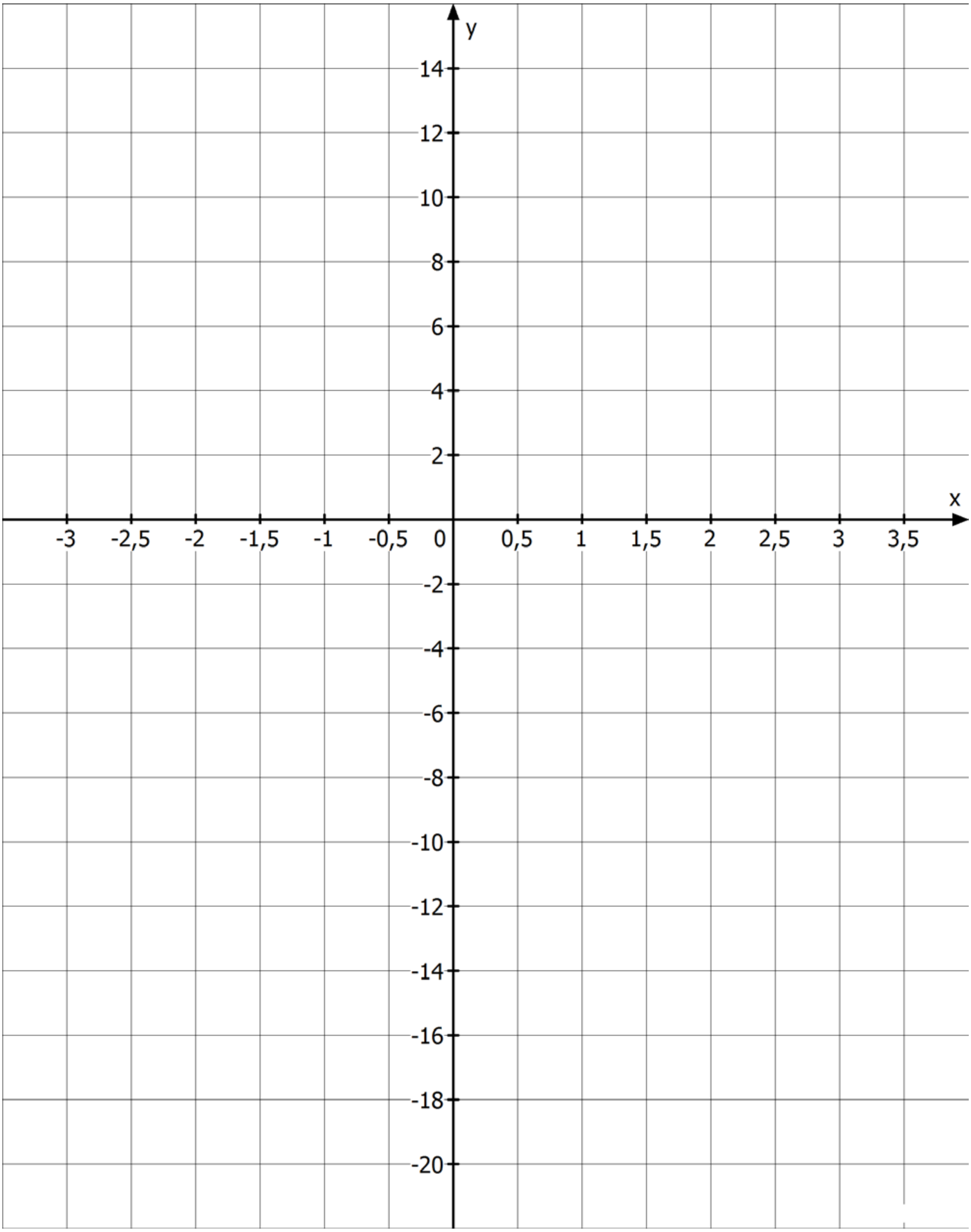
1.6 Gegeben ist die Funktion *h* mit **/5**

$$h(x)=x^4-bx^2-4x+12\,,\quad x,b \in IR\,.$$

Eine Mitschülerin behauptet, dass der Funktionsgraph der Funktion *h* keinen Wendepunkt besitzt, wenn *b* negativ ist.

Untersuchen Sie, ob diese Behauptung wahr ist.

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4



2 Rekonstruktion /15

Der Graph einer ganzrationalen Funktion *f* vierten Grades besitzt im Ursprung ein Maximum.

Die Normale im Wendepunkt *W(2|f(2))* hat die Steigung -2.

Der Scheitelpunkt des Graphen der Funktion *g* mit $g(x)=(x+2)^2-10$ liegt auf dem Graphen der gesuchten Funktion *f*.

2.1 Bestimmen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionsgleichung dieser Funktion f. **/9**

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

2.2 Lösen Sie stattdessen das folgende Gleichungssystem: **/6**

$$\begin{aligned} 64a + 24b + 8c &= 1 \\ 24a + 6b + c &= 0 \\ 8a - 4b + 2c &= -5 \\ d &= 0 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

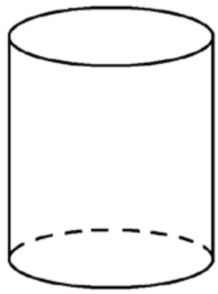
Geben Sie die gesuchte Funktionsgleichung $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ der Funktion *f* an.

3 Extremwertaufgabe /15

Ein Turm besteht aus einem Zylinder mit einer Höhe h_Z von 3 m.

Dieser Turm soll ein Dach erhalten, das die Form eines geraden Kreiskegels hat. Die Länge der Dachkante s (Mantellinie des Kegels) soll 3 m betragen.

Hinweis:
Der Kreiskegel passt genau auf den Zylinder.



3.1 Ergänzen Sie die obige Skizze des noch unvollständigen Turms. **/3**

Zeichnen Sie die gegebene Höhe h_Z , die Mantellinie *s*, den Radius *r* des Grundkreises und die Höhe h_K des Kegels in Ihre Skizze ein.

3.2 Für das Volumen eines Körpers, der aus einem Zylinder mit aufgesetztem Kegel besteht, finden Sie im Internet folgende Formel: **/1**

$$V(r;h_Z;h_K)=\pi r^2 h_Z+\frac{\pi}{3}r^2 h_K$$

Vereinfachen Sie aufgrund der Aufgabenstellung diese Formel, so dass *V* nur noch von zwei Variablen abhängt.

3.3 Bei einer zweiten Recherche im Internet finden Sie zu dieser Aufgabe folgende Zeilen: **/3**

<u>Nebenbedingung:</u>

$9=h_K^2+r^2$, also $r^2=9-h_K^2$

Geben Sie eine mathematische Begründung für die Gültigkeit der Nebenbedingung an.
Erläutern Sie, welche Bedeutung die Nebenbedingung im Hinblick auf die Funktionsgleichung für das Volumen aus 3.2 hat.

3.4 Weisen Sie nach, dass für das Volumen des Turms folgende Formel gilt: **/3**

$$V(h_K)=-\frac{1}{3}\pi h_K^3-3\pi h_K^2+3\pi h_K+27\pi$$

3.5 Ermitteln Sie, welche Werte die Gesamthöhe des Turms und der Radius des Grundkreises annehmen müssen, damit das Volumen des Turms maximal wird? **/5**

Berechnen Sie das maximale Volumen.

4 Integralrechnung /29

Auf einer Dachterrasse von 192 m^2 (Länge: 16 m, Breite: 12 m) soll ein Swimmingpool gebaut werden.

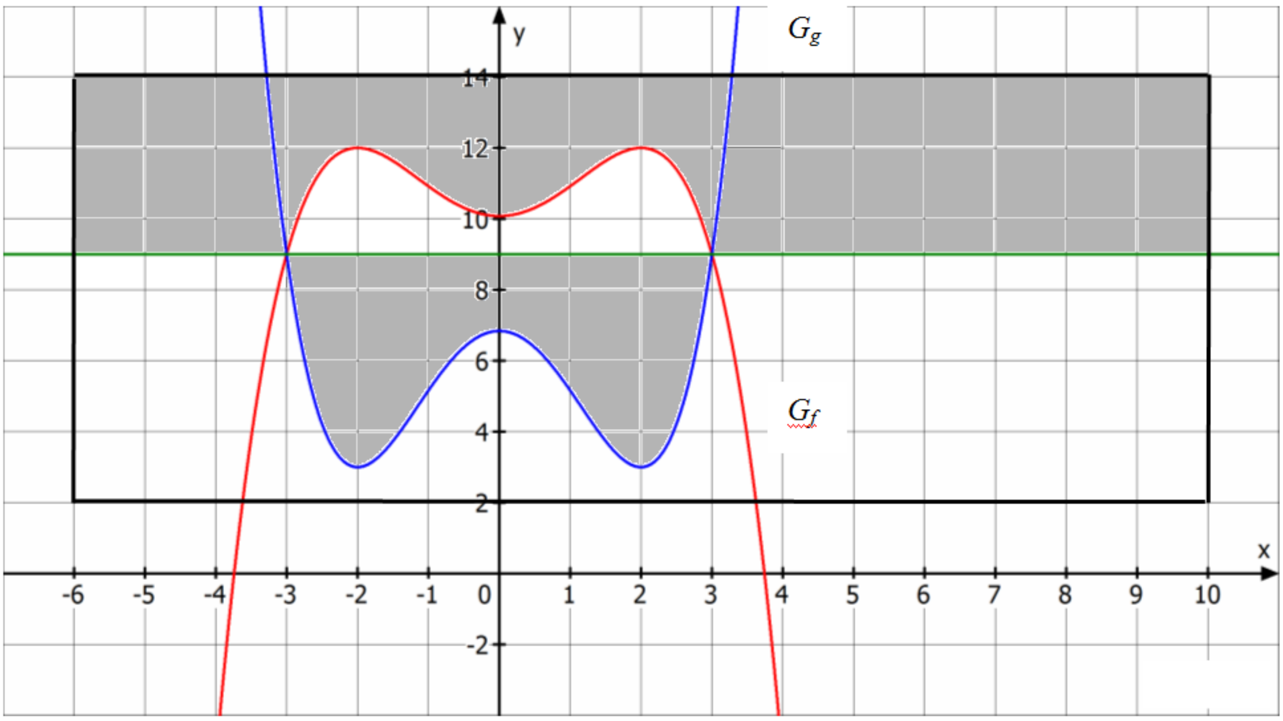
Der Pool wird begrenzt durch die Graphen G_f und G_g der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen:

$$f(x) = -0{,}12x^4 + 0{,}96x^2 + 10{,}08, \quad x \in IR \quad \text{und} \quad g(x) = 0{,}24x^4 - 1{,}92x^2 + 6{,}84, \quad x \in IR.$$

Eine Gerade durch die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen teilt den Pool sowie die ganze Terrasse in zwei Teile, die mit farblich unterschiedlichen Fliesen gefliest werden sollen.

Der in der Skizze grau unterlegte Teil soll mit grauen Fliesen, der weiß unterlegte Teil mit weißen Fliesen gefliest werden.

HINWEIS: Rechnen Sie bitte mit drei Stellen nach dem Komma.



1 Längeneinheit (LE) entspricht 1 Meter

4.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen G_f und G_g. /8

Falls Sie die Schnittstellen der Funktionsgraphen G_f und G_g nicht bestimmen können, gehen Sie von $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$ aus.

4.2 Berechnen Sie die Größe der Bodenfläche des Pools, also die Fläche, die vollständig von den Funktionsgraphen G_f und G_g eingeschlossen wird. Geben Sie Ihr Ergebnis in Quadratmetern an. /7

4.3 Nur ein Teil der Bodenfläche des Pools wird mit weißen Fliesen gefliest. Berechnen Sie die Größe dieses Teils. Geben Sie Ihr Ergebnis in Quadratmetern an. **/7**

4.4 Berechnen Sie die Größe der gesamten grauen und der gesamten weißen Fläche. Geben Sie Ihre Ergebnisse in Quadratmetern an. **/4**

4.5 Begründen Sie das folgende Ergebnis: **/3**

$$\int_{-3}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{3} (g(x) - f(x))\,dx = 0$$

Abschlussprüfung Fachoberschule 2016
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-2,5</td><td>-2</td><td>-1,5</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3,2</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>$\approx 4{,}81$</td><td>0</td><td>$\approx 2{,}81$</td><td>12</td><td>0</td><td>-16</td><td>0</td><td>$\approx 11{,}9$</td></tr>
</table>
Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_{x_1}(-2|0)$, $S_{x_2}(1|0)$ und $S_{x_3}(3|0)$

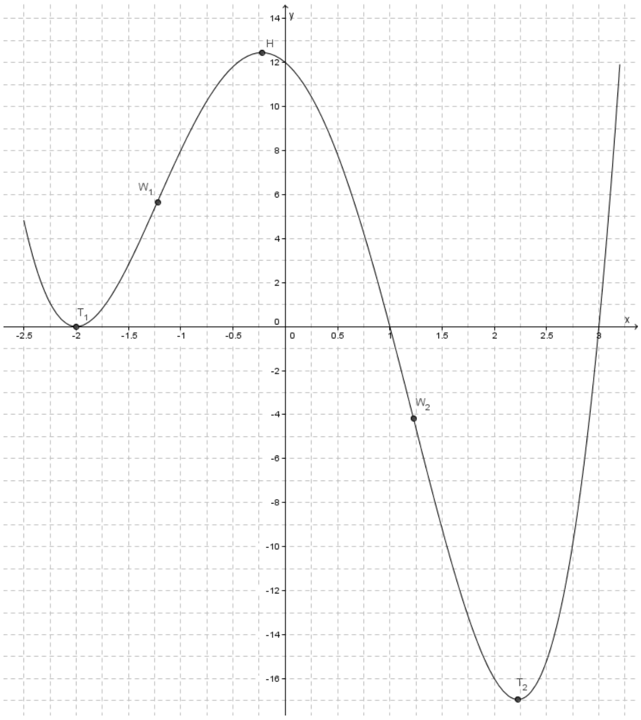
Da f(-2,5) und f(-1,5) positiv sind und da es keine weiteren Nullstellen gibt, muss an der Stelle $x=-2$ ein Berührpunkt, also hier ein Minimum vorliegen.</td><td>5</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Der Graph G_f der Funktion f ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse, da im Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen.

Der höchste Exponent im Funktionsterm von f ist 4.
Der Koeffizient von x^4 ist 1, also positiv. Daher verläuft der Graph von „plus unendlich“ nach „plus unendlich“
oder
$f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$.</td><td></td><td>2

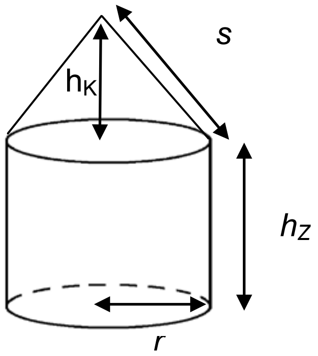
2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td><u>Bestimmung der Extrempunkte</u>
$f'(x)=0=4x^3-18x-4$ notwendige Bedingung
$0=x^3-4{,}5x-1$
Aus der Wertetabelle ergibt sich $x_1=-2$, da $T_1(-2|0)$ lokales Minimum ist.
$(x^3-4{,}5x-1):(x+2)=x^2-2x-0{,}5$
$x_2 \approx 2{,}22$ und $x_3 \approx -0{,}22$ mögliche Extremstellen
$f''(x)=12x^2-18$
$f''(x_E) \neq 0$ Überprüfen der notwendigen und hinreichenden Bedingung
$f''(2{,}22)>0 \Rightarrow T_2(2{,}22|\approx -16{,}95)$ lokales Minimum bei $x_2=2{,}22$
$f''(-0{,}22)<0 \Rightarrow H(-0{,}22|\approx 12{,}45)$ lokales Maximum bei $x_3=-0{,}22$
<u>Bestimmung der Wendepunkte</u>
$f''(x)=0=12x^2-18$ notwendige Bedingung
$x_1 \approx 1{,}22$ und $x_2 \approx -1{,}22$ mögliche Wendestellen
$f'''(x)=24x$
$f'''(x_W) \neq 0$ Überprüfen der notwendigen und hinreichenden Bedingung
$f'''(1{,}22)>0 \Rightarrow W_1(1{,}22|\approx -4{,}06)$ ist Wendepunkt
$f'''(-1{,}22)<0 \Rightarrow W_2(-1{,}22|\approx 5{,}7)$ ist Wendepunkt</td><td></td><td>7

6

6</td><td></td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
1.4			4	
1.5	Änderungen im Wert des absoluten Gliedes bewirken eine Verschiebung des Funktionsgraphen in Richtung der y-Achse. Daraus folgt, dass sich bezüglich der Koordinaten der genannten Punkte nur Änderungen der y-Koordinaten – je nach Änderung des Werts des absoluten Gliedes – ergeben.		2	
1.6	$h(x)=x^4-bx^2-4x+12$ $h'(x)=4x^3-2bx-4$ $h''(x)=12x^2-2b$ Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $h''(x_W)=0$ $0=12x^2-2b$ $0=x^2-\frac{1}{6}b$ $x_{1/2}=0\pm\sqrt{\frac{1}{6}b}$ Für negative b ist der Radikand negativ, es gibt keinen Wendepunkt.			5
	Mögliche BE	5	29	7
	Summe Aufgabe		41	

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.1	$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ und $f''(x)=12ax^2+6bx+2c$ $f(0)=0=e$ Punkt $P(0\|0)$ $f'(0)=0=d$ $m_t=0$ im Maximum $P(0\|0)$ $f'(2)=\frac{1}{2}=32a+12b+4c$ $m_o=-2\Rightarrow m_t=\frac{1}{2}$ im Wendepunkt $f''(2)=0=48a+12b+2c$ W ist Wendepunkt $f(-2)=-10=16a-8b+4c$ $S(-2\|-10)$ liegt auf G_f Das Gleichungssystem lautet: $32a+12b+4c=\frac{1}{2}$ $48a+12b+2c=0$ $16a-8b+4c=-10$	1 1	5	2
2.2	Lösungen des Gleichungssystems berechnen $a=-0{,}125$; $b=0{,}625$; $c=-0{,}75$ Funktionsgleichung: $f(x)=-0{,}125x^4+0{,}625x^3-0{,}75x^2$	1	5	
	Mögliche BE	3	10	2
	Summe Aufgabe	15		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	 	3		
3.2	In der Aufgabenstellung ist h_Z = 3 gegeben und kann eingesetzt werden: $V(r;h_K)=\pi r^2\,3+\frac{\pi}{3}r^2\,h_K$	1		
3.3	h_K, s und r bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse s. Die Nebenbedingung ist also eine Anwendung des Satzes von Pythagoras. Mit Hilfe der Nebenbedingung kann man eine Variable eliminieren, also eine Funktion erhalten, die nur noch von einer Variablen abhängt.			3
3.4	$V(h_K)=\pi(9-h_K^2)3+\frac{\pi}{3}(9-h_K^2)\,h_K$ $V(h_K)=27\pi-3\pi h_K^2+\frac{\pi}{3}9\,h_K-\frac{\pi}{3}h_K^3$ $V(h_K)=-\frac{1}{3}\pi h_K^3-3\pi h_K^2+3\,\pi h_K+27\pi$		3	
3.5	$V'(h_K)=0=-\pi h_K^2-6\pi h_K+3\,\pi$ $0=h_K^2+6h_K-3$ $h_{K1}\approx 0{,}46$ und $h_{K2}\approx -6{,}46$ irrelevant für diese Aufgabenstellung $V''(h_K)=-2\pi h_K-6\pi$ und $V''(0{,}46)<0 \Rightarrow$ Maximum bei h_{K1} Einsetzen in die Nebenbedingung ergibt: $r\approx 2{,}96$ $V(2{,}96;0{,}46)\approx 86{,}8\,\mathrm{m}^2$ (Zwischenergebnisse jeweils gerundet auf zwei Stellen.) Die Gesamthöhe des Turmes beträgt 3,46 m, der Radius beträgt 2,96 m und das Volumen 86,8 m^2.		3 2	
	Mögliche BE	4	8	3
	Summe Aufgabe	15		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
4.1	Bestimmung der Schnittpunkte der zwei Funktionsgraphen G_f und G_g: $f(x) = g(x)$ $0 = f(x) - g(x)$ $0 = -0,36x^4 + 2,88x^2 + 3,24$ $0 = x^4 - 8x^2 - 9$ $\text{Substitution}: x^2 = u$ $0 = u^2 - 8u - 9$ $u_1 = 9$ und $u_2 = -1$ Resubstitution ergibt: $x_{1/2} = \pm 3$ und $x_{3/4} \notin \mathrm{IR}$ $f(3) = g(3) = 9$ und $f(-3) = g(-3) = 9$, es ergeben sich: $S_1(3 \mid 9)$ und $S_2(-3 \mid 9)$	3	5	
4.2	$A = 2\int_0^3 d(x)\,dx = 2\int_0^3 (f(x) - g(x))\,dx$ Die Differenzfunktion lautet: $d(x) = -0,36x^4 + 2,88x^2 + 3,24$ $\int_0^3 d(x)\,dx = \int_0^3 (-0,36x^4 + 2,88x^2 + 3,24)\,dx$ $= \left[-0,072x^5 + 0,96x^3 + 3,24x\right]_0^3 = 18,144$ $A = 2 \cdot 18,144 = 36,288\,\mathrm{m}^2$ Die Bodenfläche des Pools hat eine Größe von 36,288 m^2.	1 1	5	
4.3	$A = 2\int_0^3 h(x)\,dx = 2\int_0^3 (f(x) - 9)\,dx$ Die Differenzfunktion lautet: $h(x) = -0,12x^4 + 0,96x^2 + 1,08$ $\int_0^3 h(x)\,dx = \int_0^3 (-0,12x^4 + 0,96x^2 + 1,08)\,dx$ $= \left[-0,024x^5 + 0,32x^3 + 1,08x\right]_0^3 = 6,048$ $A = 2 \cdot 6,048 = 12,096\ \mathrm{m}^2$ Der weiß geflieste Teil der Bodenfläche des Pools hat eine Größe von 12,096 m^2.	1 1	5	
4.4	$A_W = 16 \cdot 7 + 12,096 - (36,288 - 12,096) = 99,904$ $A_G = 16 \cdot 5 - 12,096 + (36,288 - 12,096) = 92,096$ Die Fläche, die weiß gefliest werden soll, hat eine Größe von 99,904 m^2, die Fläche, die grau gefliest werden soll, hat eine Größe von 92,096 m^2.		4	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
4.5	Die Funktionen *f* und *g* sind achsensymmetrisch zur *y*-Achse. Die Flächen, die von den beiden Funktionsgraphen G_f und G_g in den Intervallen $[-3;0]$ und $[0;3]$ eingeschlossen werden, sind gleich groß. Im zweiten Integral der Gleichung $\int_{-3}^{0}(f(x)-g(x))dx + \int_{0}^{3}(g(x)-f(x))dx = 0$ lautet der Integrand *g(x) – f(x)*, der Wert des Integrals wird also negativ, wodurch sich das Gesamtergebnis null ergibt.			3
	Mögliche BE	7	19	3
	Summe Aufgabe	29		