Abschlussprüfung Fachoberschule 2016
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Funktionsuntersuchung /36

Gegeben ist die Funktion *f* mit der Funktionsgleichung $f(x) = x^4 + 4x ; x \in IR$

1.1 Berechnen Sie die Funktionswerte $f(x)$ für folgende Werte von *x*. Tragen Sie die Ergebnisse in die Wertetabelle ein. **/4**

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
f(x)								

.

1.2 Zeichnen Sie den Graphen von *f* im Intervall $[-2 ; 1{,}5]$. **/4**

Nutzen Sie hierfür das Koordinatensystem auf der folgenden Seite (Abbildung 1).

1.3 Bestimmen Sie alle Schnittpunkte des Graphen von *f* mit den Koordinaten-achsen. **/4**

1.4 Untersuchen Sie den Graphen von *f* auf Symmetrie. Begründen Sie ihre Ergebnisse. **/4**

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von *f* im Unendlichen.

1.5 Bestimmen Sie alle relativen Extrempunkte des Graphen von *f*. **/6**

1.6 Zeigen Sie, dass der Graph von *f* im gesamten Definitionsbereich bis auf eine einzige Stelle linksgekrümmt ist. Geben Sie diese Stelle an. **/4**

Ziehen Sie daraus einen Schluss über die Existenz von Wendepunkten.

1.7 Eine Gerade *g* verläuft parallel zu der Tangente *t*, die den Graphen von *f* an der Stelle $x = 0$ berührt. Die Gerade *g* schneidet die *x*-Achse an der Stelle $x = -1$. **/10**

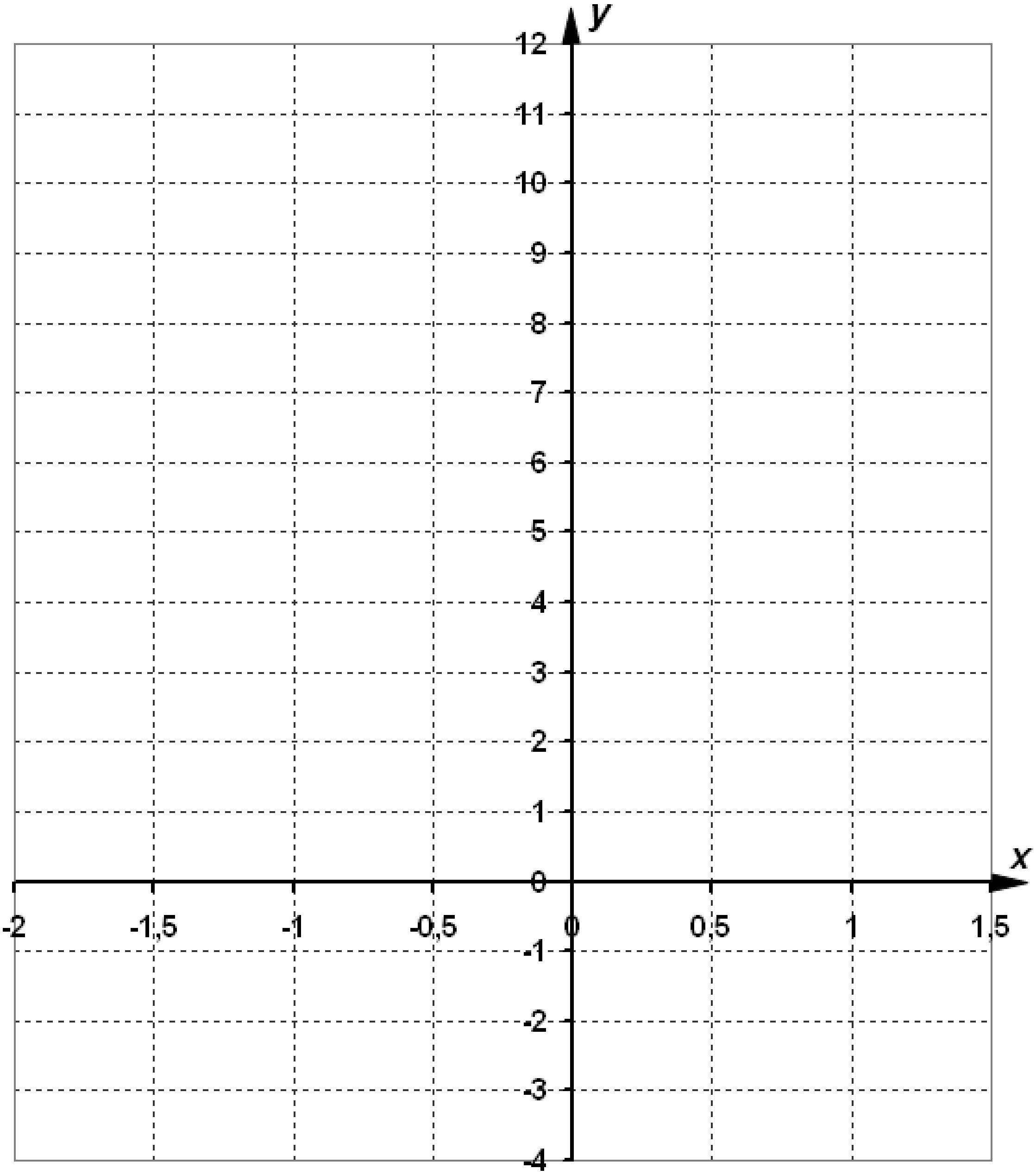
Zeigen Sie, dass $t(x) = 4x$ die Funktionsgleichung der Tangente *t* ist.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden *g* und zeichnen Sie diese in die Abbildung 1 auf der folgenden Seite ein.

Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von *f* und *g*.

Abbildung 1 (Koordinatensystem zu den Aufgaben 1.2 und 1.7)

Beachten Sie die unterschiedliche Einteilung der Koordinatenachsen!



2 Rekonstruktion /16

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat eine Nullstelle bei $x = -2$.

An dieser Nullstelle wird der Graph von f von einer Tangente t berührt, die die y-Achse bei $y = -6$ schneidet.

An der Stelle $x = -1$ liegt ein Sattelpunkt des Graphen von f.

2.1 Bestimmen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Funktionsgleichung der Funktion f berechnet werden kann. **/5**

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

2.2 Lösen Sie stattdessen das dazu äquivalente folgende Gleichungssystem und geben Sie die Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ an: **/7**

$$\begin{array}{rrrrcr} 12a & -4b & +1c & & = & -3 \\ +6a & -4b & +2c & & = & 0 \\ -8a & +4b & -2c & +1d & = & 0 \\ 12a & -6b & +3c & & = & -3 \end{array}$$

2.3 Zeichnen Sie die Tangente t in dem nebenstehenden Koordinatensystem (Abbildung 2) ein. **/4**

Skizzieren Sie in dem nebenstehenden Koordinatensystem (Abbildung 2) einen Graphen, der die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt.

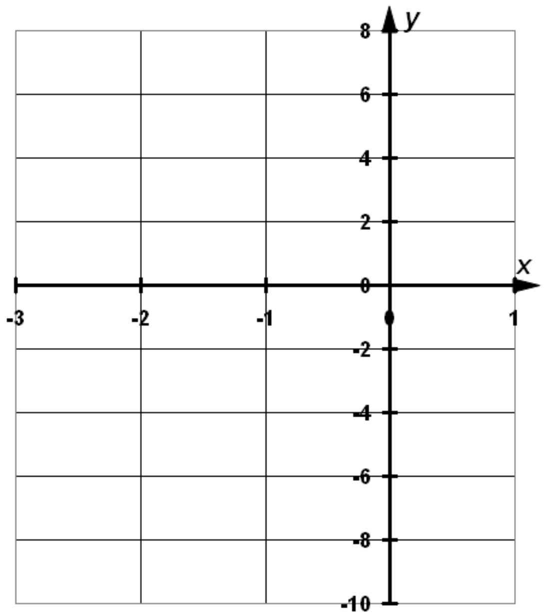


Abbildung 2

3 Extremwertaufgabe /16

Eine Rinne aus Edelstahlblech hat ein u-förmiges Profil, das im Koordinatensystem durch die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}5x^4 + 0{,}3x^2 + 0{,}4;\, x \in [-1;1]$$

beschrieben werden kann (s. Abbildung 3).

Die Rinne wird außen und in der Mitte von drei senkrechten Stützen getragen.

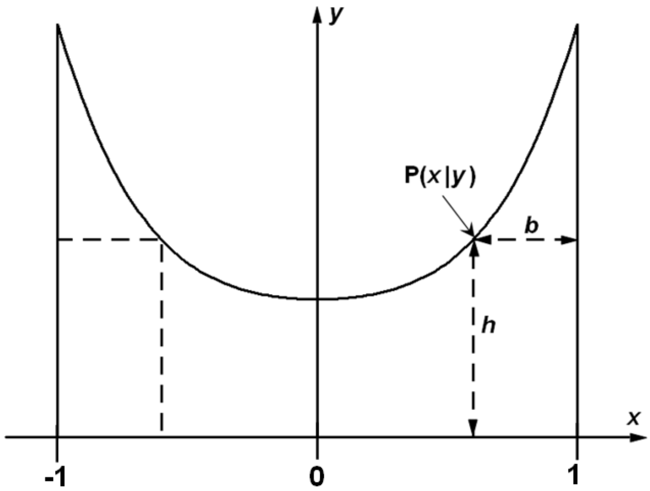
Die Tragekonstruktion soll symmetrisch um zwei zusätzliche Stützen erweitert werden.

Die zusätzlichen Stützen verlaufen parallel zur y-Achse vom Boden bis zur Rinne.

Von dem Punkt P, in dem sie auf die Rinne treffen, werden sie durch waagerechte Streben mit den äußeren Stützen verbunden

Die Höhe h der zusätzlichen Stützen und die Breite b der Streben hängen von den Koordinaten des Punktes P ab.

Abbildung 3



1 LE = 1 m

3.1 Zeigen Sie, dass man die Gesamtlänge g von beiden zusätzlichen Stützen und beiden Streben mit der Zielfunktionsgleichung /4

$$g(\mathrm{x}) = x^4 + 0{,}6x^2 - 2x + 2{,}8$$

berechnen kann.

3.2 Der Punkt P soll so gewählt werden, dass möglichst wenig Material für die zusätzlichen Stützen und Streben benötigt wird. /4

Welche Aussage macht das Vorzeichenwechselkriterium für eine Minimalstelle der Funktion g ?

Zeigen Sie, dass die gesuchte Minimalstelle im Intervall [0,6 ; 0,7] liegt.

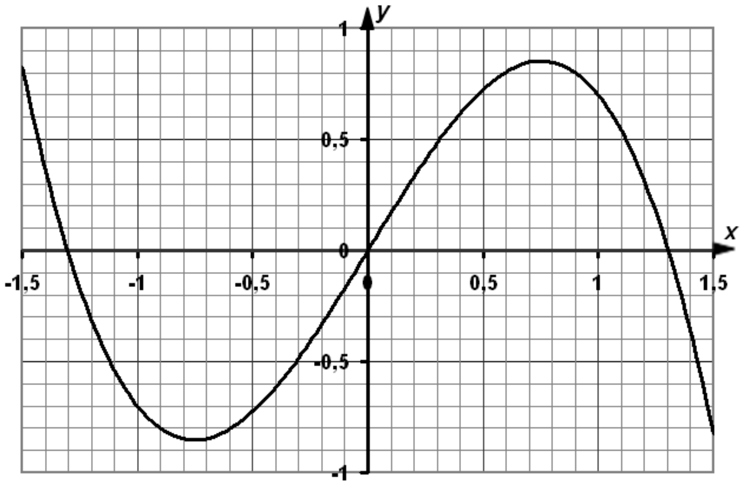
3.3 Berechnen Sie mithilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens (2 Näherungsschritte) die gesuchte Minimalstelle genauer und runden Sie das Ergebnis auf mm. /8

4 Integralrechnung /32

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -x^3 + 1{,}7x$.

Der Graph von f ist in Abbildung 4 dargestellt.

Abbildung 4



Zwischen- und Endergebnisse sind auf drei Stellen nach dem Komma zu runden.

4.1 Begründen Sie, dass $\int_{-1,3}^{1,3} f(x)dx = 0$ ist, ohne das Integral zu berechnen. **/2**

4.2 Ermitteln Sie rechnerisch die größte und die kleinste Nullstelle von f. **/7**
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die zwischen diesen Nullstellen von dem Graphen der Funktion f und der x-Achse eingeschlossen ist.

Die Fläche, die von dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im ersten Quadranten eingeschlossen ist, hat einen Flächeninhalt von ca. 0,722 FE. Diese Fläche soll durch eine Gerade in zwei möglichst gleich große Teilflächen zerlegt werden.

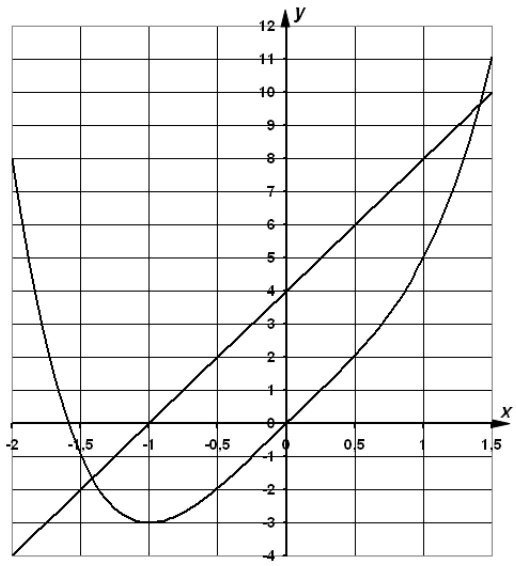
4.3 Zur Flächenteilung wird die Gerade $g(x) = 0{,}5x$ verwendet. **/11**
Zeichnen Sie die Gerade g in Abbildung 4 ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der oberen Teilfläche.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der oberen Teilfläche um weniger als 1% vom gewünschten Ergebnis abweicht.

4.4 Zur Flächenteilung wird nun eine Gerade h verwendet, die senkrecht zur x-Achse steht und diese an der Stelle 0,7 schneidet. Weisen Sie nach, dass die Flächenteilung durch die Gerade h dem gewünschten Ergebnis nicht so nahe kommt wie die Flächenteilung durch die Gerade g. **/6**

4.5 Durch eine geringe parallele Verschiebung der Geraden h nach rechts kann die angestrebte Flächenteilung fast perfekt gelingen. Berechnen Sie die notwendige Verschiebung. **/6**

Abschlussprüfung Fachoberschule 2016
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1,5</td><td>-1</td><td>-0,5</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>8</td><td>≈ -0,94</td><td>-3</td><td>≈ -1,94</td><td>0</td><td>≈ 2,06</td><td>5</td><td>≈ 11,06</td></tr>
</table>
</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>


(enthält auch die Gerade g aus Aufgabe1.7)

Graph von f zeichnen</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|0)$
($S_y(0|0)$ ist auch Schnittpunkt mit der x-Achse.)

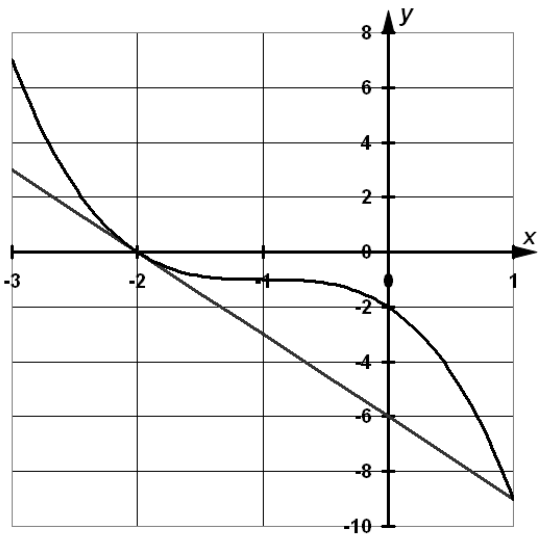
Nullstellen berechnen:
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 4) = 0 \Leftrightarrow$
$x = 0$ oder $x^3 + 4 = 0$
$x_{N1} = 0$ oder $x_{N2} \approx -1{,}587$
$S_{x2}(-1{,}587|0)$ ist ein weiterer Schnittpunkt mit der x-Achse.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Der Graph der Funktion f ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung noch achsensymmetrisch zur y-Achse, da im Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen.

Der höchste Exponent im Funktionsterm von f ist 4.

Der Koeffizient von x^4 ist 1, also positiv. Daher verläuft der Graph von „plus unendlich“ nach „plus unendlich“ oder
$f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$.</td><td></td><td>2

2</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
1.5	Bestimmung der relativen Extrempunkte $f\,'(x) = 4x^3 + 4 = 0$ notwendige Bedingung $4x^3 = -4$ $x_E = -1$ mögliche Extremstelle $f\,''(x) \neq 0$ Überprüfen der hinreichenden Bedingung $f\,''(-1) = 12 > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum von $f(x)$ bei $x_E = -1$ $f\,(-1) = -3 \Rightarrow$ TP(-1|-3)		3 3	
1.6	Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Auskunft über die Art der Krümmung. $f\,''(x) = 12x^2 > 0$ für alle x außer $x = 0 \Rightarrow$ der Graph von f ist linksgekrümmt an allen Stellen x außer $x = 0$. Daher kann es keine Wendepunkte geben, weil kein Krümmungswechsel stattfindet.			4
1.7	$t(0) = 0 = f(0)$ und $t\,'(0) = 4 = f\,'(0)$ also berührt t den Graphen von f an der Stelle $x = 0$ Ansatz $g(x) = ax + b$ $a = f\,'(0) = 4 \Rightarrow g(x) = 4x + b$ $g(-1) = -4 + b = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow g(x) = 4x + 4$ Graph von g einzeichnen Schnittpunkte von f und g berechnen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 + 4x = 4x + 4 \Leftrightarrow x^4 = 4 \Leftrightarrow x \approx \pm 1{,}414$ $f(-1{,}414) \approx -1{,}658$ und $f(1{,}414) \approx 9{,}654 \Rightarrow$ Die Schnittpunkte sind (-1,414|-1,675) und (1,414|9,675).	1 1	1 2 3 2	
	Mögliche BE	10	22	4
	Summe Aufgabe 1	36		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$
$f(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c + 1d = 0$
$f'(-2) = -3 \quad \Rightarrow \quad 12a - 4b + 1c + 0d = -3$
$f'(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a - 2b + 1c + 0d = 0$
$f''(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -6a + 2b + 0c + 0d = 0$</td><td>1</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Lösungen des Gleichungssystems berechnen
$a = -1$; $b = -3$; $c = -3$; $e = -2$
$f(x) = -x^3 - 3x^2 - 3x - 2$</td><td></td><td>6
1</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>
Tangente einzeichnen
Graph skizzieren.
Der gezeichnete Graph muss bzw. darf
- tangential zu t bei x = –2 liegen,
- einen Sattelpunkt bei x = –1 mit deutlich erkennbarer Steigung 0 haben und
- keinen weiteren Krümmungswechsel aufweisen.</td><td></td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>1</td><td>12</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe 2</td><td colspan="3">16</td></tr>
</table>

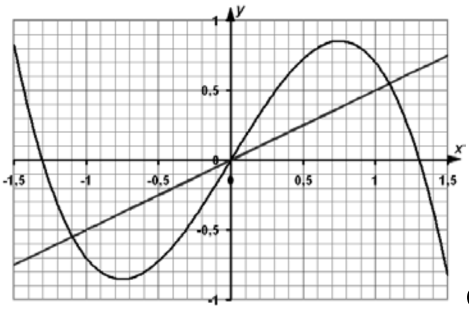
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Hauptbedingung $g(b,h) = 2b + 2h$
Nebenbedingung 1 $b = 1 – x$
Nebenbedingung 2 $h = f(x) = 0{,}5x^4 + 0{,}3x^2 + 0{,}4$
Zielfunktion $g(x) = 2(1 – x) + 2(0{,}5x^4 + 0{,}3x^2 + 0{,}4)$
$g(x) = 2 – 2x + x^4 + 0{,}6x^2 + 0{,}8$
$g(\mathrm{x}) = x^4 + 0{,}6x^2 – 2x + 2{,}8$</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>x_M ist eine Minimalstelle der Funktion g, wenn an der Stelle x_M das Vorzeichen von $g'(x)$ von negativ nach positiv wechselt.

$g'(0{,}6) \approx –0{,}461$; $g'(0{,}7) = 0{,}212 \Rightarrow$

zwischen 0,6 und 0,7 liegt eine Stelle, an der $g'(x)$ das Vorzeichen von negativ nach positiv wechselt, dort ist also $g(x)$ minimal.</td><td></td><td>2

2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Newton-Verfahren $x_{n+1} = x_n - \dfrac{4x_n^{\ 3} + 1{,}2x_n - 2}{12x_n^{\ 2} + 1{,}2}$
<table>
<tr><th>n</th><th>x_n</th><th>$g'(x_n)$</th><th>$g''(x_n) =$</th></tr>
<tr><td>1</td><td>+0,6000000000</td><td>-0,4160000000</td><td>+5,5200000000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>+0,6753623188</td><td>+0,0426043244</td><td>+6,6733711405</td></tr>
<tr><td>3</td><td>+0,6689780906</td><td></td><td></td></tr>
</table>

$x_M \approx 0{,}669$ m bzw. $x_M \approx 669$ mm</td><td>1</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>1</td><td>11</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe 3</td><td colspan="3">16</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
4.1	Weil der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist (nur ungerade Exponenten von x im Funktionsterm), sind die beiden Teilflächen gleich groß und gehen mit verschiedenen Vorzeichen in die Flächenbilanz ein, so dass das Ergebnis gleich 0 ist.			2
4.2	Nullstellen von f berechnen $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 1{,}7x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 1{,}7) = 0$ Lösungen: $x_{N1} = 0$; $x_{N2} \approx -1{,}304$; $x_{N3} \approx 1{,}304$ $A = 2\left\lvert \int_0^{1{,}304} f(x)dx \right\rvert = 2\left\lvert F(1{,}304) - F(0) \right\rvert$ Stammfunktion $F(x) = -0{,}25x^4 + 0{,}85x^2$ $F(1{,}304) \approx 0{,}722$ und $F(0) = 0 \Rightarrow A \approx 1{,}444$ FE	2	2 3	
4.3	 Gerade einzeichnen Berechnung der Schnittstellen von f und g $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -x^3 + 1{,}7x = 0{,}5x \Leftrightarrow -x^3 + 1{,}2x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 1{,}2) = 0$ Schnittstellen: $x_{N1} = 0$ und $x_{N2,N3} \approx \pm 1{,}095$ (davon ist nur die positive Lösung sinnvoll) Berechnung der oberen Teilfläche $A_o \approx \left\lvert \int_0^{1{,}095} d(x)dx \right\rvert = \left\lvert D(1{,}095) - D(0) \right\rvert$ Differenzfunktion $d(x) = f(x) - g(x) = -x^3 + 1{,}2x$ Stammfunktion $D(x) = -0{,}25x^4 + 0{,}6x^2 \Rightarrow$ $D(1{,}095) \approx 0{,}360$ und $D(0) = 0 \Rightarrow A_o \approx 0{,}360$ Abweichung vom Sollwert: 0,001; relative Abweichung $\approx$ 0,3%.	2 1	1 4 3	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.4</td><td>Berechnung der linken Teilfläche
$A_l = \left|\int_0^{0,7} f(x)dx\right| = \left|F(0,7) - F(0)\right|$
Stammfunktion $F(x)$ = -0,25x^4 +0,85x^2 $\Rightarrow$
$F(0,7) \approx 0,356$ und $F(0) = 0 \Rightarrow A_l \approx 0,356$
Abweichung vom Sollwert: 0,005
relative Abweichung ≈ 1,4%.
Damit ist die Abweichung vom gewünschten Ergebnis größer als in 4.3</td><td>

2
1</td><td>

3</td><td></td></tr>
<tr><td>4.5</td><td>Ansatz $A_l = \left|\int_0^{b} f(x)dx\right| = \left|F(b) - F(0)\right| = 0,361 \Leftrightarrow$
$-0,25b^4+0,85b^2 = 0,361 \Leftrightarrow b^4 - 3,4b^2 + 1,444 = 0$
Substitution $b^2 = z \Rightarrow z^2 - 3,4z + 1,444 = 0$
Lösungen: $z_1 \approx 2,904$ $\Rightarrow b_{1,2} \approx \pm\, 1,704$ nicht sinnvoll
Lösungen: $z_2 \approx 0,496$ $\Rightarrow b_{1,2} \approx \pm\, 0,704$ nur positive Lösung sinnvoll
Die Verschiebung nach rechts beträgt ca. 0,004 Einheiten.</td><td></td><td></td><td>

6</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td>8</td><td>16</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufgabe</td><td colspan="3">32</td></tr>
</table>