Abschlussprüfung Fachoberschule 2015 Herbst
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Funktionsuntersuchung /40

Das Höhenprofil eines Berglaufs wird durch folgende Funktion f beschrieben:

$f(x)=\frac{1}{18}x^3-\frac{11}{18}x^2+x,\ x\in\mathbb{R},\ x\geq 0$.

Dabei gilt folgender Maßstab:
x-Achse: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1000$ m
y-Achse: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 100$ m
$y=0$ entspricht 1000 m über dem Meeresspiegel (ü.d.M)

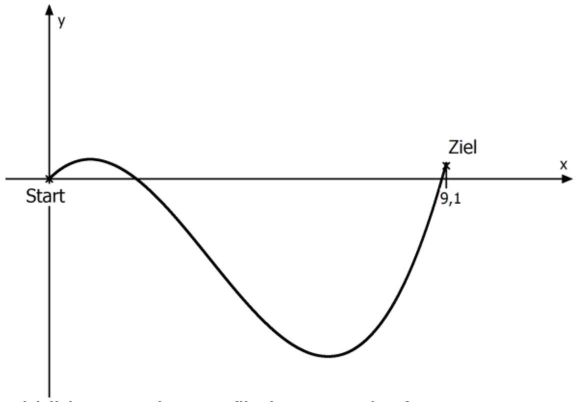


Abbildung: Höhenprofil eines Berglaufs

1.1 Der Berglauf wird in einer Höhe von 1000 m ü.d.M. (über dem Meeresspiegel) gestartet. **/4**
Ermitteln Sie die *x*-Koordinate (in Meter) der Punkte, an denen die Läufer wieder die Starthöhe erreichen.

1.2 Unmittelbar nach dem Start führt die Strecke für eine erste Zwischenwertung bergauf auf den Gipfel einer Anhöhe. **/8**
Ermitteln Sie die *x*-Koordinate des Gipfels (in Meter).
Berechnen Sie die Höhe des Gipfels über dem Meeresspiegel.

1.3 Nach der Anhöhe führt der Streckenverlauf bergab, bis eine Talsenke erreicht wird. **/4**
Ermitteln Sie die *x*-Koordinate des tiefsten Punktes dieses Tals.
Berechnen Sie seine Höhe über dem Meeresspiegel.

1.4 Im Gelände verläuft eine Fahrstraße, deren Höhenprofil durch die Funktion g mit **/8**
$g(x)=\frac{1}{18}x^2-6$ beschrieben werden kann.
Die Laufstrecke kreuzt diese Fahrstraße zwei Mal, das erste Mal bei $x=6000$ m.
Berechnen Sie die Höhe, auf der die Laufstrecke die Fahrstraße das zweite Mal kreuzt.

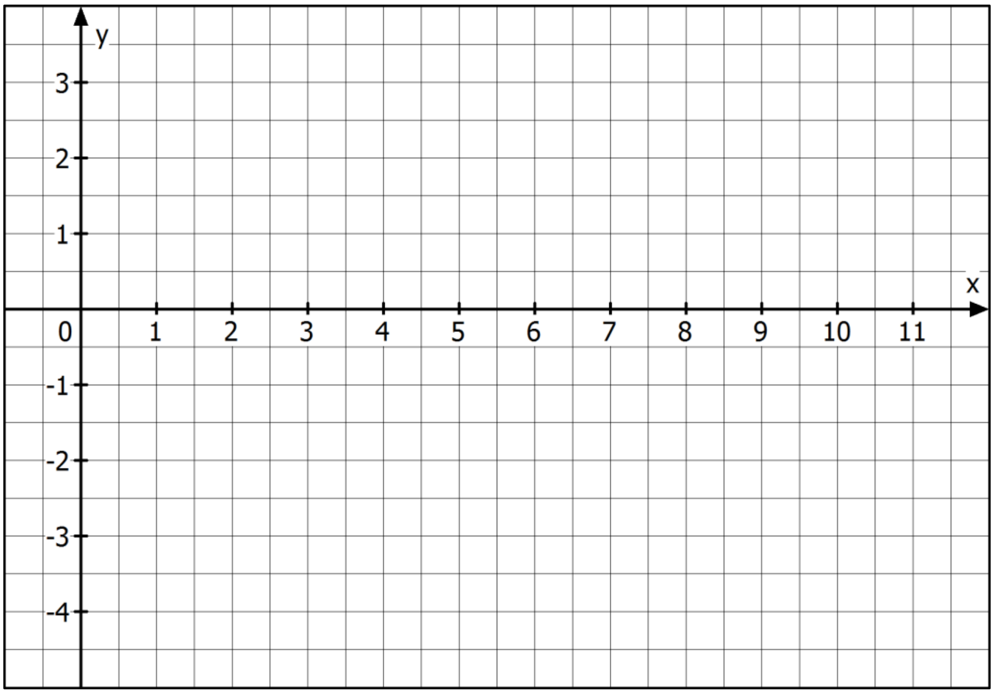
1.5 Es gibt einen Punkt *W*, in dem sich das Krümmungsverhalten des Höhenprofils ändert. **/7**
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *W* in m.
Bestimmen Sie die Art der Krümmungsänderung.

1.6 Nach 9,1 km erreichen die Läufer beim Gipfelkreuz das Ziel. **/4**
Berechnen Sie den Höhenunterschied, den sie dabei von der Talsohle bis ins Ziel zurückgelegt haben.

1.7 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte/Stellen. **/5**
Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.7:



2 Rekonstruktion /15

Der Graph einer ganzrationalen Funktion fünften Grades ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Die Nullstellen liegen bei $x = 1$ und $x = 2$. Zusätzlich verläuft der Graph durch den Punkt $P(3\,|\,12)$.

2.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f. **/10**

Hinweis: Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, dann lösen Sie das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f.

$$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0 & = & 2a & + & 2b & + & 2c \\ 0 & = & 16a & + & 4b & + & c \\ 12 & = & 243a & + & 27b & + & 3c \end{array}$$

[zur Kontrolle: $f(x) = 0{,}1x^5 - 0{,}5x^3 + 0{,}4x$]

2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Normalen an den Graphen von f im Punkt $P(3\,|\,12)$. **/5**

3 Extremwertaufgabe /15

Aus 4 Stangen der Länge s soll eine gerade quadratische Pyramide errichtet werden (siehe Abbildung).

Das Volumen der Pyramide soll maximal werden.

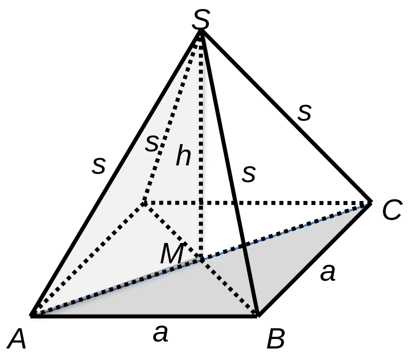


Abbildung: Pyramide

3.1 Bestimmen Sie die Zielfunktion V, mit der das Volumen der Pyramide berechnet werden kann. /6

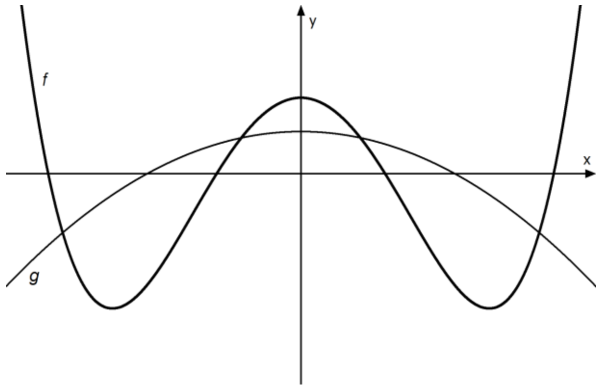
[zur Kontrolle: $V(h) = \frac{2}{3}\left(s^2h - h^3\right)$]

3.2 Berechnen Sie den Wert für h (in Abhängigkeit von s), für den das Volumen maximal wird. /7

3.3 Berechnen Sie, welches Volumen eine Pyramide mit $s = 12$ cm maximal haben kann. /2

4 Integralrechnung /30

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit:
$f(x) = 2x^4 - 20x^2 + 18$ und $g(x) = -3x^2 + 10$.
Die Graphen der Funktionen sind G_f und G_g.

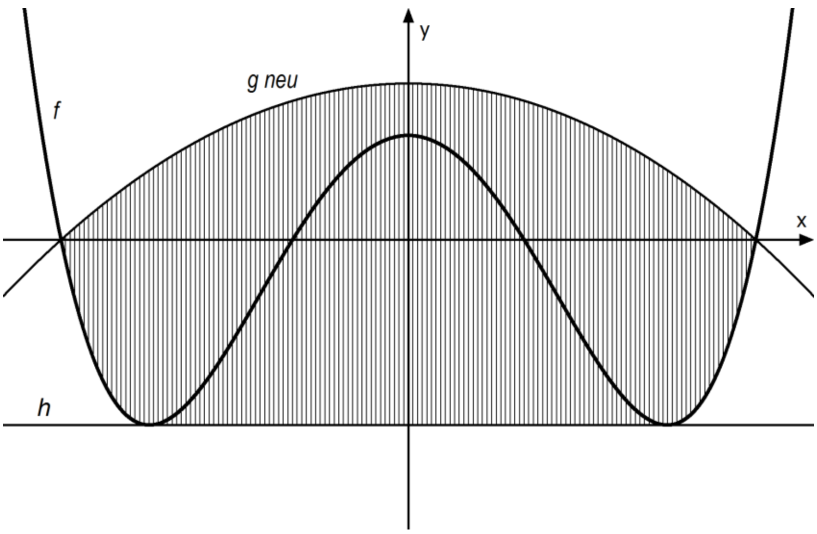


4.1 Berechnen Sie den Inhalt der 3 Flächen, die von G_f und G_g eingeschlossen wird. **/8**

4.2 G_g wird um 17 Einheiten nach oben parallel zur x-Achse verschoben. **/4**
Zeigen sie rechnerisch, dass der Graph der verschobenen Funktion g_{neu} nur noch bei $x = -3$ und $x = 3$ den Graphen G_f schneidet.

4.3 In den Tiefpunkten von G_f berührt der Graph einer linearen Funktion h den Graphen G_f. **/8**
Berechnen Sie die Tiefpunkte von G_f.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von h.
[zur Kontrolle: $h(x) = -32$]

4.4 Berechnen Sie die von G_f und den Graphen von g_{neu} und h eingeschlossene Fläche (siehe schraffierte Fläche in der Abbildung) unter Berücksichtigung der errechneten Schnitt- und Berührpunkte. **/10**

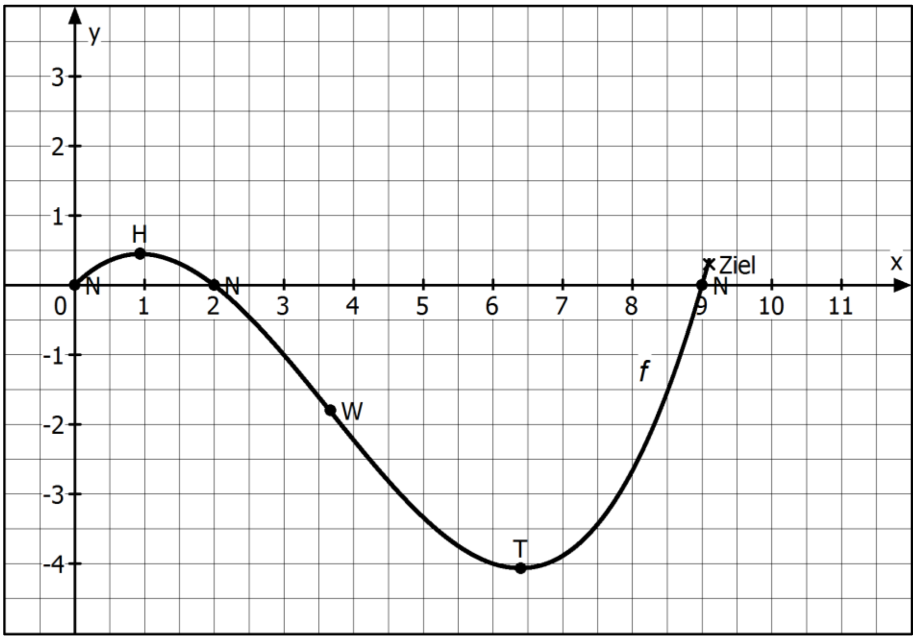


Abschlussprüfung Fachoberschule 2015 Herbst
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.1	$f(x)=0$ $x\cdot\left(\frac{1}{18}x^2-\frac{11}{18}x+1\right)=0$ $x_0=0$ $x^2-11x+18=0$ $x_1=2$ und $x_2=9$ Der Läufer startet auf 1000 m Höhe und erreicht diese 2000 m und 9000 m nach dem Start wieder.	4		
1.2	$f'(x)=0$ $f'(x)=\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{9}x+1$ $x^2-\frac{22}{3}x+6=0$ $x_{E1}=0{,}94$; $x_{E2}=6{,}4$ $f''(x)=\frac{1}{3}x-\frac{11}{9}$ $f''(0{,}94)=-0{,}91<0$; Maximum $x_{E1}=0{,}94$ $f''(6{,}4)=0{,}91>0$; Minimum $x_{E2}=6{,}4$ $f(0{,}94)=0{,}45$; $HP(0{,}94\|0{,}45)$ $0{,}94\cdot 1000\text{ m}=940\text{ m}$ (Entfernung vom Start) $0{,}45\cdot 100\text{ m}=45\text{ m}$ (Höhe über Start) $1000\text{ m}+45\text{ m}=1045\text{ m}$ Der Gipfel liegt bei $x=940\text{ m}$ und hat eine Höhe von 1045 m ü.d.M.		4 4	
1.3	$x_{E2}=6{,}4$ $6{,}4\cdot 1000\text{ m}=6400\text{ m}$ $f(6{,}4)=-4{,}07$ $-4{,}07\cdot 100\text{ m}=-407\text{ m}$ $1000\text{ m}-407\text{ m}=593\text{ m}$ Die tiefste Punkt des Tals liegt bei $x=6400\text{ m}$ und hat eine Höhe von 593 m ü.d.M.		4	

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.4	$f(x)=g(x)$ $\frac{1}{18}x^3-\frac{2}{3}x^2+x+6=0$; $x=6$ (Polynomdivision) $\left(\frac{1}{18}x^3-\frac{2}{3}x^2+x+6\right)\div(x-6)=\frac{1}{18}x^2-\frac{1}{3}x-1$ $x^2-6x-18=0$ $x_{S1}=-2{,}2$ $x_{S2}=8{,}2$ $x_{S0}=6$ $g(8{,}2)=-2{,}26$ $-2{,}26\cdot 100=-226\text{ m}$ $1000\text{ m}-226\text{ m}=774\text{ m}$ Die Laufstrecke kreuzt die Fahrstraßen zum zweiten Mal in einer Höhe von 774 m ü.d.M.	3 1	4	
1.5	$f''(x)=\frac{1}{3}x-\frac{11}{9}$ $f''(x)=0$ $x_W=\frac{11}{3}=3{,}67$ $3{,}67\cdot 1000=3670$ $f\left(\frac{11}{3}\right)=-1{,}81$ $-1{,}81\cdot 100=-181$ $1000\text{ m}-181\text{ m}=819\text{ m}$ Wendepunkt $W(3670\mid 819)$ $f'''\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{1}{3}>0$ Rechts-Links-Krümmungsänderung Angabe der Art der Krümmungsänderung.		5 2	
1.6	$f(9{,}1)=0{,}359$; (Ansatz Gipfelhöhe) $0{,}359\cdot 100=35{,}9\text{ m}$; (Höhe über Starthöhe) $1000\text{ m}+35{,}9\text{ m}=1035{,}9\text{ m}\approx 1036\text{ m}$ Das Gipfelkreuz im Ziel befindet sich in einer Höhe von 1036 m ü.d.M. Höhenunterschied zwischen Talsohle und Zielhöhe: $1036\text{ m}-593\text{ m}=443\text{ m}$ Der Höhenunterschied zwischen Talsohle und Ziel beträgt 443 m.	4		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.7	 *Das Einzeichnen des berechneten Schnittpunktes der Laufstrecke mit der Fahrstraße ist nicht erforderlich.*	5		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	17	23	0
	Summe der BE	40		

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.1	Ansatz: $f(x)=ax^5+bx^3+cx$; (aufgrund der Symmetrie) Bedingungsgefüge: 1. $f(1)=0$ (Nullstelle $x=1$) 2. $f(2)=0$ (Nullstelle $x=2$) 3. $f(3)=12$ (Punkt $P(3\|12)$) Gleichungssystem: $\begin{array}{llcccccc} \text{I.} & 0 & = & a & + & b & + & c \\ \text{II.} & 0 & = & 32a & + & 8b & + & 2c \\ \text{III.} & 12 & = & 243a & + & 27b & + & 3c \end{array}$ Lösen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS) ergibt: $a=0{,}1$; $b=-0{,}5$; $c=0{,}4$ Für die Funktionsgleichung gilt: $f(x)=0{,}1x^5-0{,}5x^3+0{,}4x$	1 1	3 5	
2.2	$f'(x)=0{,}5x^4-1{,}5x^2+0{,}4$ $y=mx+n$ $m_T=f'(3)=27{,}4$ $m_N=-\frac{1}{m_T}=-0{,}0365$ mit dem Punkt $P(3\|12)$ ergibt sich: $12=-0{,}0365\cdot 3+n$; $n\approx 12{,}1$ Die Gleichung der Normale lautet: $y_N=-0{,}0365x+12{,}1$.		5	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	2	13	0
	Summe der BE		15	

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
3.1	$V(a;h) = \frac{1}{3}a^2h$; (Hauptbedingung) $a^2 + a^2 = 4\left\|\overline{AM}\right\|^2$ $\left\|\overline{AM}\right\|^2 + h^2 = s^2$ $\frac{1}{2}a^2 + h^2 = s^2$; $a^2 = 2\left(s^2 - h^2\right)$; (Nebenbedingung) $V(h) = \frac{2}{3}\left(s^2 - h^2\right)h = \frac{2}{3}\left(s^2h - h^3\right)$; (Zielfunktion)			6
3.2	$V(h) = \frac{2}{3}\left(s^2h - h^3\right)$ $V'(h) = \frac{2}{3}(s^2 - 3h^2)$; $V''(h) = \frac{2}{3}(-6h) = -4h < 0$ $\frac{2}{3}(s^2 - 3h^2) = 0$; $s^2 - 3h^2 = 0$; $h = \sqrt{\frac{s^2}{3}}$		7	
3.3	$h = \sqrt{\frac{s^2}{3}} = \sqrt{\frac{12^2}{3}} = \sqrt{48}$ $V(\sqrt{48}) = \frac{2}{3}\left(144\sqrt{48} - \sqrt{48}^3\right) \approx 443{,}4$ Das Volumen beträgt ca. 443,4 cm^3.	2		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	2	7	6
	Summe der BE	15		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>$f(x)=g(x)$
$2x^4-20x^2+18=-3x^2+10$
$2x^4-17x^2+8=0$
$x^4-\frac{17}{2}x^2+4=0$; $z_1=\frac{1}{2}$; $z_2=8$
$x_{1/2}=\pm0{,}707$; $x_{3/4}=\pm2{,}83$
$d(x)=2x^4-17x^2+8$
$D(x)=\frac{2}{5}x^5-\frac{17}{3}x^3+8x$
Flächenbilanz
$A_{ges}=A_1+A_2+A_3$ oder Symmetrieausnutzung mit $A_1=A_3$
mit
$A_1=\left|D(-0{,}707)-D(-2{,}83)\right|=36{,}91\,\text{FE}$
$A_2=\left|D(0{,}707)-D(-0{,}707)\right|=7{,}45\,\text{FE}$
$A_3=\left|D(2{,}83)-D(0{,}707)\right|=36{,}91\,\text{FE}$
$A_{ges}=81{,}27\,\text{FE}$
Die von den Graphen von f und g eingeschlossene Fläche beträgt 81,27 FE.</td><td></td><td>2
2
4</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>G_g-Verschiebung bedeutet:
$g_{neu}(x)=-3x^2+27$
$f(x)=g_{neu}(x)$
$2x^4-17x^2-9=0$; $x^2=z$
$z_1=9$; $z_2=-\frac{1}{2}$; Rücksubstitution von z_1 (z_2 nicht definiert); $x_{1/2}=\pm3$
Die einzigen Schnittstellen liegen jetzt bei $x=3$ und $x=-3$.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>$f'(x)=8x^3-40x$; $f''(x)=24x^2-40$; $f'(x)=0$
$x\cdot\left(8x^2-40\right)=0$; $x_{E1}=0$
$f''(0)=-40<0$; $x_{E2/3}=\pm\sqrt{5}$
$f''\left(\sqrt{5}\right)=f''\left(-\sqrt{5}\right)=80>0$
$f\left(\sqrt{5}\right)=f\left(-\sqrt{5}\right)=-32$
Die Tiefpunkte lauten $TP_1\left(-\sqrt{5}\middle|-32\right)$ und $TP_1\left(\sqrt{5}\middle|-32\right)$.
Ansatz für lineare Funktion durch diese beiden Tiefpunkte:
$h(x)=m\cdot x+n$
waagerechter Graph, kein Anstieg, also $m=0$
Punkt einsetzen ergibt:
$h(x)=-32$
Die lineare Funktion h hat die Funktionsgleichung $h(x)=-32$.</td><td></td><td>4
4</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
4.4	$A_{ges} = A_1 + A_2 + A_3$ $A_1 = \int_{-3}^{-\sqrt{5}} (g_{neu}(x) - f(x))\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-\sqrt{5}} (-2x^4 + 17x^2 + 9)\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{5}x^5 + \frac{17}{3}x^3 + 9x\right]_{-3}^{-\sqrt{5}}$ $A_1 = 21{,}7$ FE ; $A_3 = 21{,}7$ FE (Symmetrie)		4	
	$A_2 = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (g_{neu}(x) - h(x))\mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (-3x^2 + 59)\mathrm{d}x = \left[-x^3 + 59x\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}$ $A_2 = 241{,}5$ FE		4	
	$A_{ges} = 284{,}9$ FE Die von den Graphen der Funktionen f , g_{neu} und h eingeschlossene Fläche beträgt 284,9 FE.	2		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	6	24	0
	Summe der BE	30		