Abschlussprüfung Fachoberschule 2014 Herbst
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /40

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$f(x) = -\frac{1}{14} \cdot \left(x^3 + 6x^2 - 13x - 42\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion sei G_f.

1.1 Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie. **/2**
Begründen Sie Ihre Aussage.

1.2 Weisen Sie nach, dass $x = -2$ eine Nullstelle von f ist. **/7**
Berechnen Sie alle Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

1.3 Bestimmen Sie die Art und Lage der Extrempunkte und die Lage des Wendepunktes von G_f. **/12**
Hinweis: Die Überprüfung des Wendepunktes soll mit Hilfe der 3. Ableitung erfolgen.

1.4 Zeichnen Sie G_f im Intervall $[-8{,}3\,;\,4{,}3]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/6**
Berechnen Sie auch die Funktionswerte am Rand des Intervalls.
Nutzen Sie für die Zeichnung das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

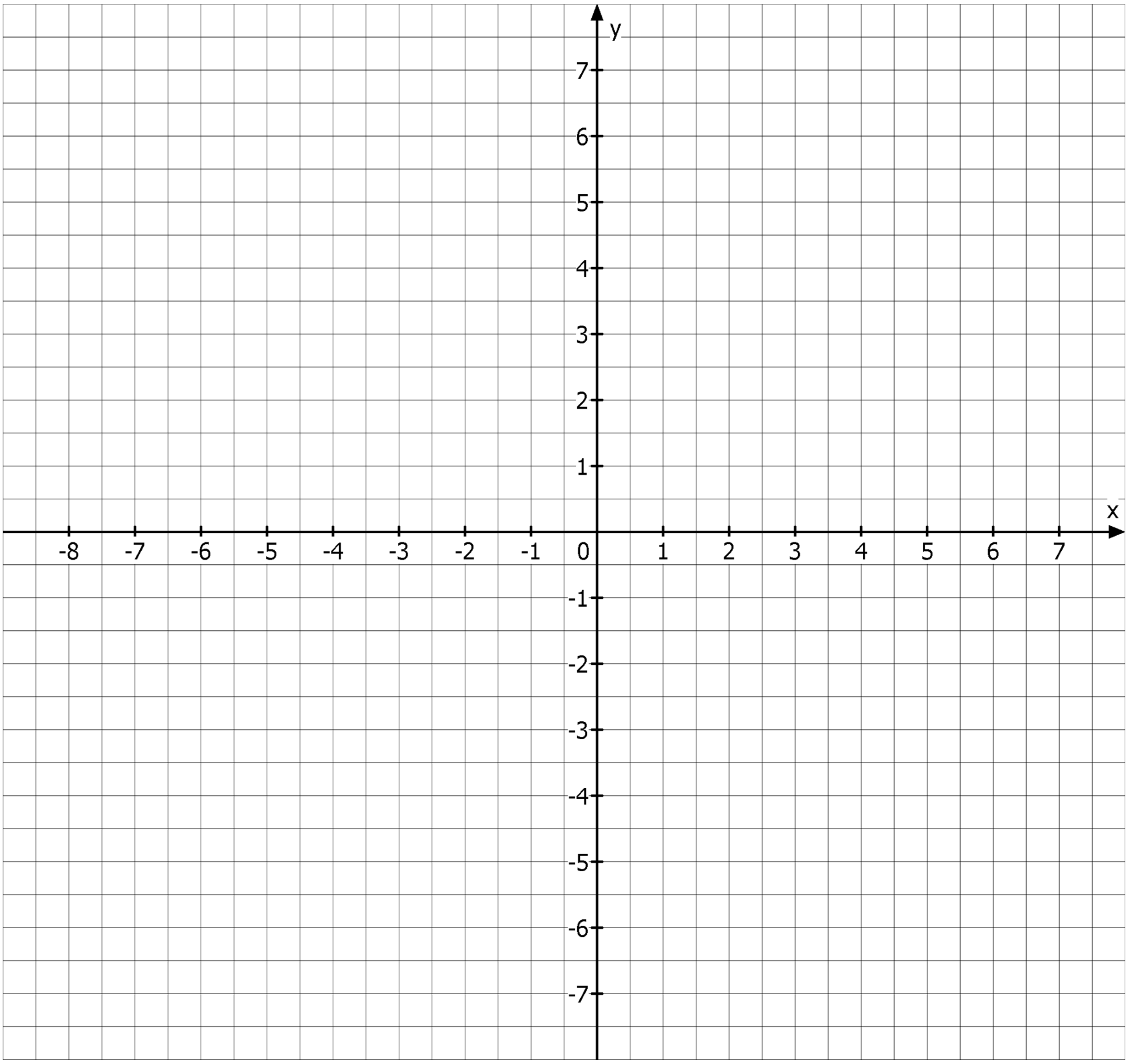
1.5 An der Stelle $x = -1$ hat der Graph der Funktion f die Normale n. **/6**
Bestimmen Sie die zugehörige Gleichung dieser Normalen.
Zeichnen Sie den Graphen von n mit in das Koordinatensystem von Aufgabe 1.4.

[zur Kontrolle: $n(x) = -\frac{7}{11}x + \frac{83}{77}$]

1.6 Bestimmen Sie den Inhalt der Dreiecksfläche, die die Normale n (siehe Aufgabe 1.5), die Gerade $x = -1$ und die x-Achse einschließen. **/7**

Koordinatensystem für die Aufgaben 1.4 und 1.5 à nächste Seite

Koordinatensystem zu den Aufgaben 1.4 und 1.5:



2 Rekonstruktion /15

Der Graph einer Funktion dritten Grades geht durch den Koordinatenursprung und hat im Punkt $W(1\,|\,-2)$ eine Wendetangente mit der Steigung 2.

2.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion *f*. **/11**

Hinweis: Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, dann lösen Sie das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion *f.*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
0 & = & 6a & + & 2b & & & & \\
-2 & = & a & + & b & + & c & & \\
2 & = & 3a & + & 2b & + & c & & \\
0 & = & & & & & & & d
\end{array}$$

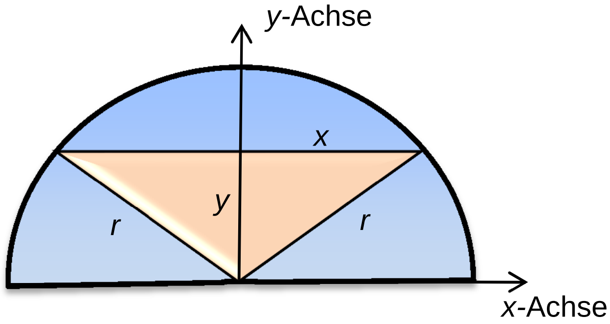
2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente im Punkt *W*. **/4**

3 Extremwertaufgabe /15

In eine Halbkugel mit dem Radius $r = 50$ cm wird ein Kegel eingesetzt.

Die Spitze des Kegels liegt im Mittelpunkt der Grundfläche der Halbkugel, die Grundfläche des Kegels liegt parallel dazu (siehe Skizze).

Hinweis:
Die Skizze zeigt die Halbkugel und den Kegel von der Seite.



3.1 Bestimmen Sie die Zielfunktion V, mit der berechnet werden kann, welcher Kegel das größtmögliche Volumen hat. /6

[zur Kontrolle: $V(y) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(50^2 y - y^3\right)$]

Geben Sie die Definitionsmenge von V an.

3.2 Berechnen Sie die Werte von x und y für den Kegel, der das größtmögliche Volumen hat. /7

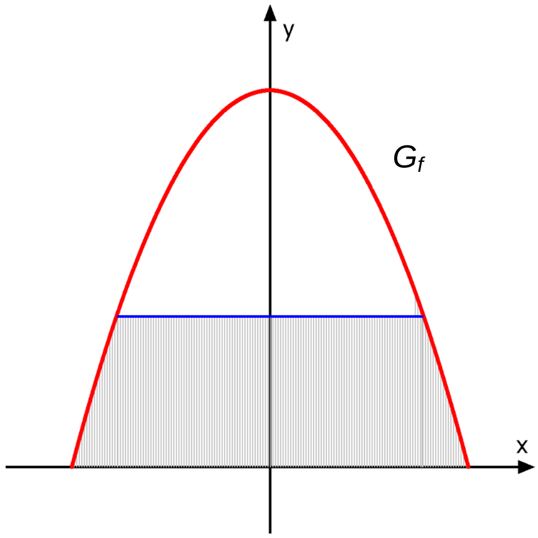
3.3 Berechnen Sie das größtmögliche Volumen des Kegels in cm^3. /2

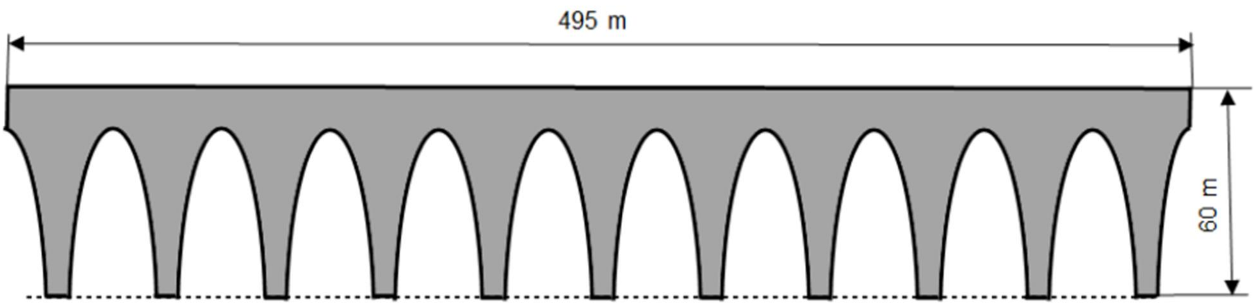
Hinweis: Runden Sie das Ergebnis auf volle cm^3.

4 Integralrechnung /30

Eine Brücke hat eine Gesamthöhe von 60 m und eine Gesamtstützweite von 495 m. Sie umfasst 10 volle Bögen sowie je einen halben Bogen am linken und rechten Rand.
In der unteren Abbildung ist die Seitenansicht der Brücke schematisch dargestellt.
Der Rand jeder Brückenöffnung kann beschrieben werden durch den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{19}{75}x^2 + 57$.
Der Graph der Funktion sei G_f.

Hinweis: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{m}$





4.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion *f.* /4

4.2 Berechnen Sie den Inhalt einer Brückenöffnung, das heißt die Fläche, die von G_f und der x-Achse begrenzt wird. /8

4.3 Berechnen Sie den Gesamtflächeninhalt aller Brückenöffnungen. /3

[zur Kontrolle: $A_{ges} = 12540\,\text{m}^2$]

4.4 Berechnen Sie die Seitenfläche der Brücke. /5

[zur Kontrolle: $A = 17160\,\text{m}^2$]

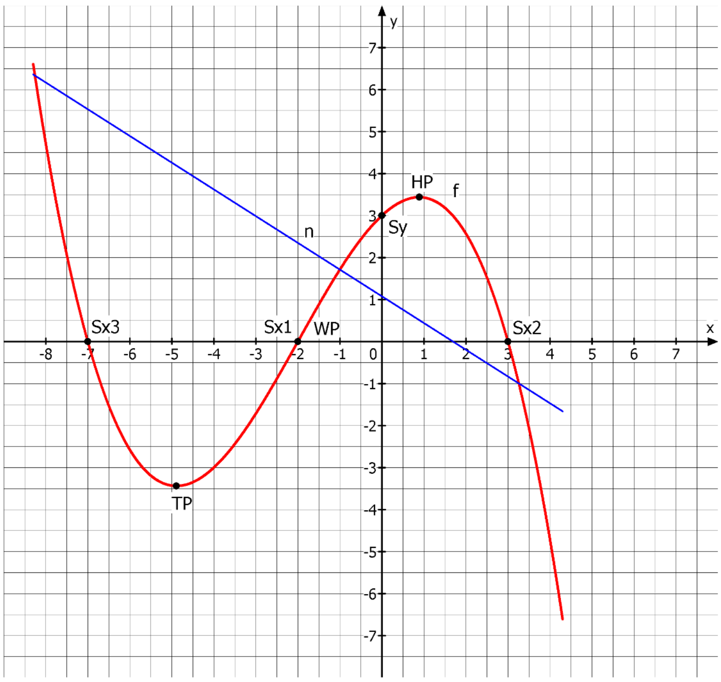
4.5 Beide Seitenflächen sollen einen Anstrich mit einem Speziallack zum Witterungsschutz bekommen. /3
Ein Eimer Speziallack kostet 45 €. Der Inhalt eines Eimers reicht für 35 m^2 aus.
Berechnen Sie die Materialkosten

4.6 Der Durchgang durch eine der Brückenöffnungen soll teilweise verschlossen werden. Dazu wird in der Brückenöffnung eine Mauer errichtet, die 20,52 m hoch ist. /7
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche dieser Mauer (in der Skizze grau schraffiert).

Abschlussprüfung Fachoberschule 2014 Herbst
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.1	Da im Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen, ist der Graph weder achsensymmetrisch zur *y*-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung oder $f(x) \neq f(-x)$, $f(-x) \neq -f(x)$	2		
1.2	Nullstellen: $f(x)=0$ $-\frac{1}{14}(x^3+6x^2-13x-42)=0 \Rightarrow x^3+6x^2-13x-42=0$ Erste Lösung: $x_{N1}=-2$ $(x^3+6x^2-13x-42):(x+2)=x^2+4x-21$ $x^2+4x-21=0$ $x_{N2}=3$; $x_{N3}=-7$ Schnittpunkte mit der *x*-Achse: $S_{X1}(-2\|0)$; $S_{X2}(3\|0)$; $S_{X3}(-7\|0)$ Schnittpunkt mit der *y*-Achse: $f(0)=3$; $S_Y(0\|3)$	4	3	
1.3	$f'(x)=-\frac{3}{14}x^2-\frac{6}{7}x+\frac{13}{14} \Rightarrow f''(x)=-\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}$ $f'(x)=0=x^2+4x-\frac{13}{3}$ $x_{1/2}=-2\pm\sqrt{\frac{25}{3}}$ $x_{E1}\approx -4{,}89$; $x_{E2}\approx 0{,}89$ $f(-4{,}89)\approx -3{,}44$; $f(0{,}89)\approx 3{,}44$ $f''(-4{,}89)\approx 1{,}24>0$; Minimum $f''(0{,}89)\approx -1{,}24<0$; Maximum Tiefpunkt: $TP(-4{,}89\|-3{,}44)$ Hochpunkt: $HP(0{,}89\|3{,}44)$ $f''(x)=0=-\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}$; $x_W=-2$ $f'''(x)=-\frac{3}{7}<0$ $f(-2)=0 \Rightarrow WP(-2\|0)$	4	2 6	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.4	$S_{X1}\left(-2\,\vert\,0\right)$; $S_{X2}\left(3\,\vert\,0\right)$; $S_{X3}\left(-7\,\vert\,0\right)$; $S_{Y}\left(0\,\vert\,3\right)$ $TP\left(-4{,}89\,\vert\,-3{,}44\right)$; $HP\left(0{,}89\,\vert\,3{,}44\right)$; $WP\left(-2\,\vert\,0\right)$ $f\left(-8{,}3\right)=6{,}61$; $f\left(4{,}3\right)=-6{,}61$ 	3 3		
1.5	$f'\left(-1\right)=m_t=\frac{11}{7}$; $m_n=-\frac{1}{m_t}=-\frac{7}{11}\Rightarrow n\left(x\right)=-\frac{7}{11}x+n_n$ $n\left(-1\right)=f\left(-1\right)=\frac{12}{7}\Rightarrow n_n=\frac{83}{77}\Rightarrow n\left(x\right)=-\frac{7}{11}x+\frac{83}{77}$ Bemerkung: Auch Berechnung mit gerundeten Werten für die Koeffizienten der Normale erhält volle BE. Grafik siehe 1.4		4 2	
1.6	untere Seite *g* des Dreiecks: $l_g=1+x_N$ $n\left(x\right)=0;-\frac{7}{11}x+\frac{83}{77}=0;x_N=\frac{83\cdot 11}{77\cdot 7}\approx 1{,}69;l_g=1+1{,}69=2{,}69$ linke Seite *h* des Dreiecks: $l_h=n\left(-1\right)=-\frac{7}{11}(-1)+\frac{83}{77}\approx 1{,}71$ Flächeninhalt: $A=\frac{1}{2}\cdot 2{,}69\cdot 1{,}71\approx 2{,}3$. Der Flächeninhalt beträgt $2{,}3$ FE..			7
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	16	17	7
	Summe der BE			

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.1	Ansatz: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$ Bedingungsgefüge: 1. $f''(1)=0$ (Wendestelle bei $x=1$) 2. $f(1)=-2$ (Wendepunkte $W(1\|-2)$) 3. $f'(1)=2$ (Steigung im Wendepunkt) 4. $f(0)=0$ (Graph geht durch den Ursprung) Gleichungssystem: $\begin{array}{llcccccccc} \text{I.} & 0 & = & 6a & + & 2b & & & & \\ \text{II.} & -2 & = & a & + & b & + & c & & \\ \text{III.} & 2 & = & 3a & + & 2b & + & c & & \\ \text{IV.} & 0 & = & & & & & & & d \end{array}$ Lösen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS) ergibt: $a=-4$; $b=12$; $c=-10$; $d=0$ Für die Funktionsgleichung gilt: $f(x)=-4x^3+12x^2-10x$	3 1	3 2 2	
2.2	$y_T=m\cdot x+n$ $m=f'(1)=2$ mit dem Wendepunkt $W(1\|-2)$ ergibt sich: $-2=2\cdot 1+n$; $n=-4$ $y_T=2x-4$ Die Gleichung der Wendetangente lautet: $y_T=2x-4$		4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	4	11	0
	Summe der BE	15		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	$V(x,y)=\frac{x^2\pi y}{3}$ (*Hauptbedingung*) $x^2+y^2=50^2 \Rightarrow x^2=50^2-y^2$ (*Nebenbedingung*) $V(y)=\frac{(50^2-y^2)\pi y}{3}=\frac{\pi}{3}(50^2y-y^3)$ (*Zielfunktion*) Definitionsmenge $y\in[0,50]$		2 1	3
3.2	$V'(y)=\frac{\pi}{3}(50^2-3y^2)$ $\frac{\pi}{3}(50^2-3y^2)=0 \Leftrightarrow y=\frac{50\cdot\sqrt{3}}{3}$ $y\approx 28{,}87$ cm $x^2=50^2-y^2=50^2-\frac{50^2}{3} \Leftrightarrow x=\frac{50\cdot\sqrt{6}}{3}$ $x\approx 40{,}82$ cm	4	3	
3.3	$V(x,y)=\frac{x^2\pi y}{3}=\frac{\frac{50^2\cdot 6}{9}\pi\frac{50\cdot\sqrt{3}}{3}}{3}$ $V(x,y)\approx 50383$ Das größtmögliche Volumen des Kegels beträgt 50383 cm^3. Anmerkung: Auch richtige Rechnungen mit gerundeten Werten erhalten alle BE.	2		
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	6	6	3
	Summe der BE	15		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
4.1	Nullstellen: $-\frac{19}{75}x^2+57=0$ $x^2=225$ $x_{N1}=-15$; $x_{N2}=15$	4		
4.2	Ansatz für Flächeninhalt: $A_B=\int\limits_{x_{N1}}^{x_{N2}} f(x)\mathrm{d}x$ Stammfunktion: $F(x)=-\frac{19}{225}x^3+57x$ $F(15)=570$; $F(-15)=-570$ $A_B=F(15)-F(-15)=1140$ Die Fläche zwischen dem Graphen von *f* und der *x*-Achse ist 1140 m^2 groß.		4 4	
4.3	Ansatz: 10 volle und 2 halbe Bögen $A_1=11\cdot\int\limits_{x_{N1}}^{x_{N2}} f(x)\mathrm{d}x=11\cdot1140=12540$ Die Gesamtfläche aller Brückenbögen beträgt 12540 m^2.	3		
4.4	Ansatz für Flächeninhalt: $A=A_2-A_1$ $A_2=60\cdot495=29700$ (Rechteck) $A_1=12540$ (Gesamtfläche der Bögen) $A=29700-12540=17160$ (Fläche einer Seite) Die Größe der Seitenfläche beträgt $17160\,\mathrm{m}^2$.		5	
4.5	$\frac{34320}{35}=980{,}57$ (Anzahl der Farbeimer: 981) $981\cdot45€=44145$ € (Materialkosten) Die Materialkosten betragen 44145 €.	3		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.6</td><td>$f(x) = 20,52$
$-\frac{19}{75}x^2 + 57 = 20,52$
$x^2 = 144$
$x_{1/2} = \pm 12$
$A = A_1 + A_2 = (22,8 \cdot 12) + \int_{12}^{15}\left(-\frac{19}{75}x^2 + 57\right)\mathrm{dx}$
$\approx 273,6 + 31,92$

Aufgrund der Symmetrie: $A_{ges} = 2A \approx 610,44\,\mathrm{m}^2$.</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>13</td><td>17</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">30</td></tr>
</table>