Abschlussprüfung Fachoberschule 2014
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Funktionsuntersuchung /42

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{13}{5}x + 13,\quad x \in \mathbb{R}.$$

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Funktionsgraphen G_f und begründen Sie Ihre Aussage. **/3**

Berechnen Sie anschließend den Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der y-Achse.

1.2 Die einzige Nullstelle x_N des Funktionsgraphen G_f liegt im Intervall [–5; –4]. **/7**

Berechnen Sie einen Näherungswert für diese Nullstelle x_N durch ein geeignetes Verfahren. Brechen Sie die Berechnung nach drei Iterationsschritten ab.

Beurteilen Sie die Genauigkeit des von Ihnen berechneten Näherungswertes.

1.3 Bestimmen Sie die Hoch- und die Tiefpunkte des Funktionsgraphen G_f. **/10**

1.4 Weisen Sie nach, dass $W(1 \mid 10)$ der Wendepunkt des Funktionsgraphen G_f ist. **/4**

1.5 Skizzieren Sie den Funktionsgraphen G_f im Intervall [–4,5; 5] unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/6**

Berechnen Sie auch die Funktionswerte der Intervallgrenzen.

Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

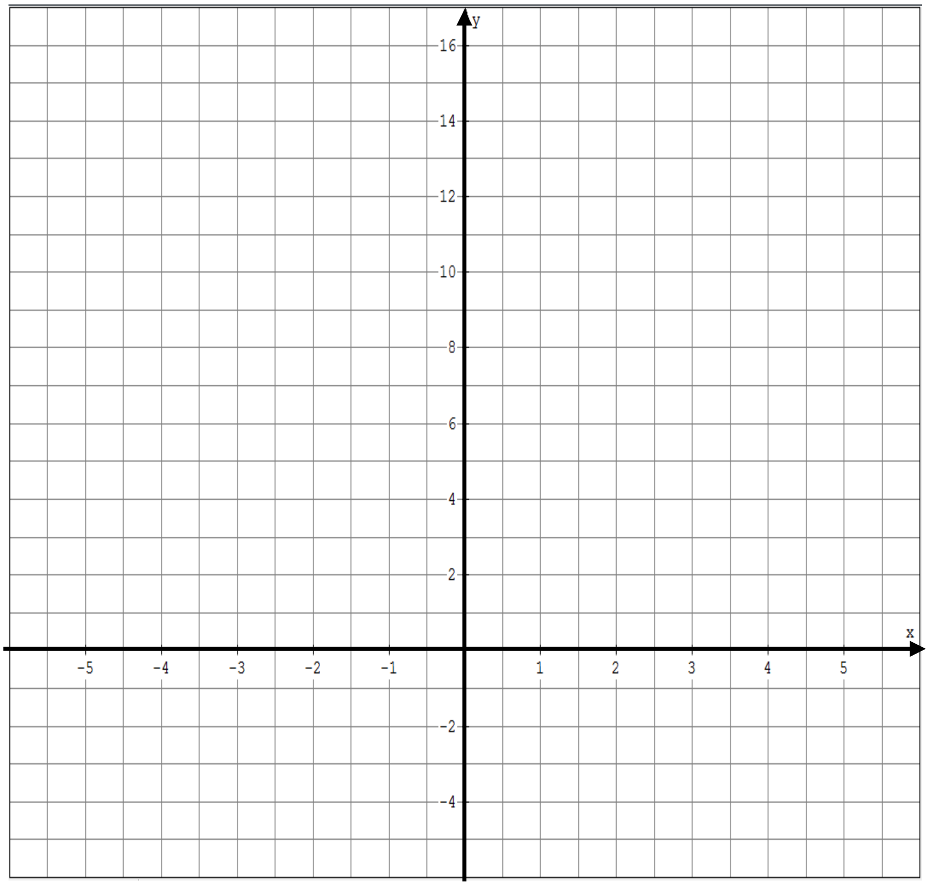
1.6 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Wendetangente mit den Koordinatenachsen. **/6**

1.7 Verschiebt man den Funktionsgraphen G_f um 10 Längeneinheiten in Richtung der y-Achse nach unten, erhält man den Funktionsgraphen G_g mit der Funktionsgleichung $g(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{13}{5}x + 3,\quad x \in \mathbb{R}$, **/6**

Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Funktionsgraphen G_g mit der x-Achse.

Fortsetzung auf der folgenden Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1 Funktionsuntersuchung

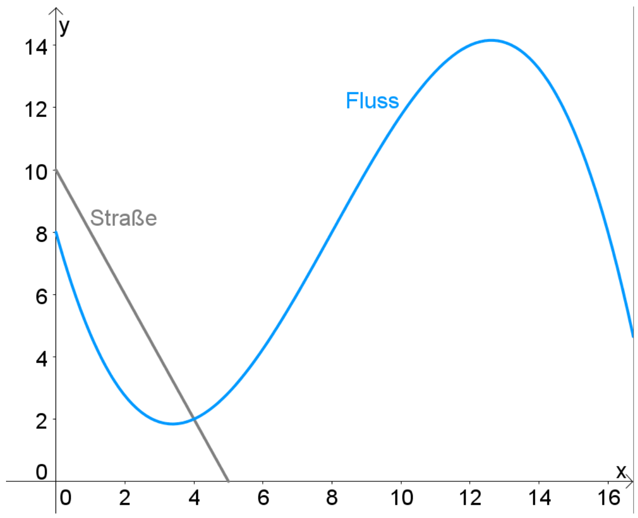


2 Fluss /16

Die Abbildung zeigt eine Karte, auf der der Verlauf eines Flussabschnittes und einer Straße dargestellt sind. 1 LE $\widehat{=}$ 100 m

Der Verlauf des Flussabschnittes lässt sich durch eine Funktion f dritten Grades beschreiben. Der Fluss geht im Punkt $W(8|8)$ von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung über.

Die Straße trifft bei $x = 4$ auf den Fluss und schneidet ihn in einem rechten Winkel. Der Verlauf der Straße wird durch die Funktion s mit $s(x) = -2x + 10$ beschrieben.



2.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem die Straße den Fluss überquert. **/3**

Welche mathematische Bedeutung hat der Punkt $W(8|8)$ bezüglich des Graphen von f? Begründen Sie Ihre Aussage.

2.2 Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Funktionsgleichung der Funktion f auf. Dieses Gleichungssystem sollen Sie nicht lösen. **/7**

2.3 Die Funktionsgleichung der Funktion f kann mithilfe des folgenden Gleichungssystems bestimmt werden. Lösen Sie dieses und geben Sie die Funktionsgleichung von f an. **/6**

Hinweis: Zum Lösen des Gleichungssystems rechnen Sie mit Brüchen oder mit fünf Nachkommastellen!

Gleichungssystem zum Bestimmen der Funktionsgleichung

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *der Funktion f.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 288a & + & 40b & + & 6c & + & d & = & 5 \\ 192a & + & 32b & + & 4c & & & = & 2 \\ 64a & + & 22b & + & 5c & + & d & = & 2{,}5 \\ 24a & + & b & & & & & = & 0 \end{array}$$

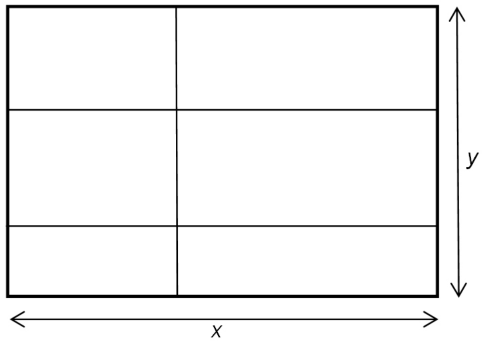
3 Lagerhalle /15

Der Bau einer Lagerhalle wird geplant.

Sie soll eine rechteckige Grundfläche von 800 m² haben und durch zwei Trennwände in *x*- und eine in *y*-Richtung in sechs Räume aufgeteilt werden (siehe Skizze).

Für jeden laufenden Meter Außenwand betragen die Kosten 900 €, für jeden laufenden Meter Innenwand betragen sie 200 €.

Die Maße x und y sollen so optimiert werden, dass die Gesamtkosten für die Wände minimal sind.



3.1 Zeigen Sie, dass man die Zielfunktion für die Berechnung der Gesamtkosten für die Wände mit der Funktionsgleichung /4

$$K(x) = 2\,200\,x + \frac{1\,600\,000}{x} = 2\,200\,x + 1\,600\,000\,x^{-1}$$

beschreiben kann, wenn man als Längeneinheit einen Meter wählt.

3.2 Berechnen Sie mithilfe der Zielfunktion die optimalen Maße der Lagerhalle (auf 1 cm genau). /7

Ermitteln Sie die minimalen Gesamtkosten für die Wände.

Fassen Sie die Ergebnisse in einem Antwortsatz zusammen.

[Zur Kontrolle: $K_{\text{min}} \approx 118\,659{,}18$ €]

3.3 Zeigen Sie mithilfe der Zielfunktion, dass die Gesamtkosten für die Wände nur um ca. 0,1 % größer werden, wenn man von den optimalen Maßen abweicht und einen gleich großen, quadratischen Grundriss wählt. /4

4 Stahlskulptur /27

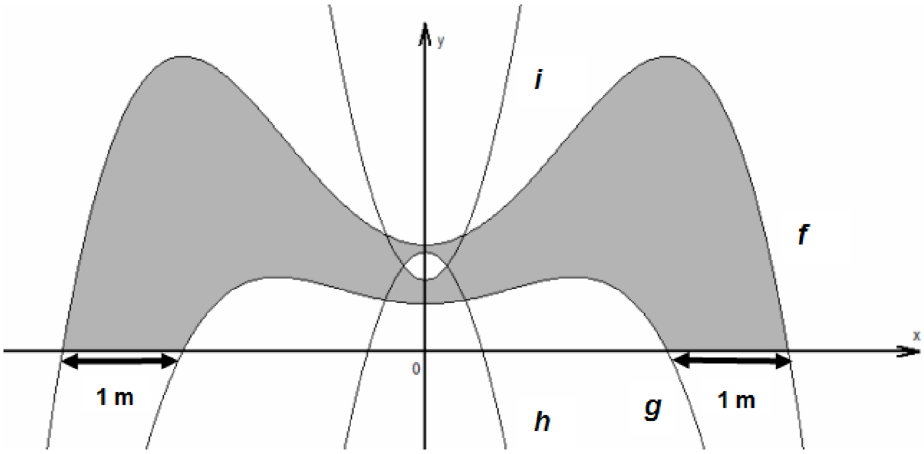
Gegeben sind die vier Funktionen ($x \in \mathbb{R}$)

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^2 + 3$$

$$g(x) = -\frac{1}{3}x^4 + x^2 + \frac{4}{3}$$

$$h(x) = -\frac{25}{2}x^2 + 2{,}8$$

$$i(x) = \frac{25}{2}x^2 + 2$$



Die Abbildung zeigt die Seitenfläche einer Stahlskulptur. Sie wird durch die Graphen der beiden Funktionen *f* und *g* und durch die *x*-Achse begrenzt.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Die Breite der auf dem Boden (*x*-Achse) beginnenden Seitenfläche (der Abstand der Nullstellen der Funktionen *f* und *g*) beträgt einen Meter.

4.1 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Funktionsgraphen G_f und G_g sowie der *x*-Achse begrenzt wird. **/17**

Geben Sie Ihr Ergebnis in einem Antwortsatz in m² an.

4.2 In der Mitte der Seitenfläche ist eine Linse ausgeschnitten. Diese Linse wird vollständig durch die Funktionsgraphen G_h und G_i begrenzt. **/8**
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Linse.

Geben Sie Ihr Ergebnis in einem Antwortsatz in m² an.

4.3 Berechnen Sie den Inhalt der Seitenfläche, die in der obigen Abbildung grau unterlegt ist. **/2**

Geben Sie Ihr Ergebnis in einem Antwortsatz in m² an.

Abschlussprüfung Fachoberschule 2014
Mathematik

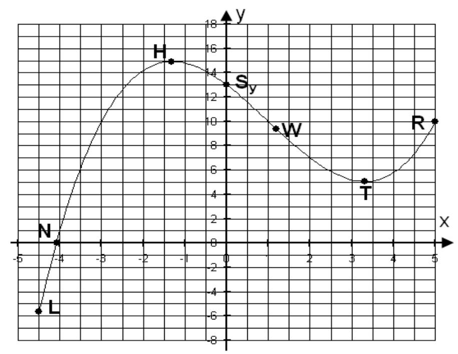
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich.
Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist der korrigierenden Lehrkraft überlassen.

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg.1</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th colspan="2">Erbrachte Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>BE</th><th>Begutachtung</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Da im Funktionsterm sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorkommen, ist der Funktionsgraph G_f weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.
(Oder: Nachweis über die entsprechenden Kriterien.)

Da $f(0) = 13$, ist $S_y(0|13)$ der Schnittpunkt des Funktionsgraphen G_f mit der y-Achse.</td><td>2

1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>
<table>
<tr><th>n</th><th>xn</th><th>f(xn)</th><th>f'(xn)</th><th>f(xn)/f'(xn)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-4,00000000</td><td>1,00000000</td><td>11,80000000</td><td>0,08474576</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-4,08474576</td><td>-0,02166726</td><td>12,31278368</td><td>-0,00175974</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-4,08298603</td><td>-0,00000945</td><td>12,30204816</td><td>-0,00000077</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-4,08298526</td><td>0,00000000</td><td>12,30204348</td><td>0,00000000</td></tr>
</table>
oder
<table>
<tr><th>n</th><th>xn</th><th>f(xn)</th><th>f'(xn)</th><th>f(xn)/f'(xn)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>-5,00000000</td><td>-14,00000000</td><td>18,40000000</td><td>-0,76086957</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-4,23913043</td><td>-1,99602408</td><td>13,26909263</td><td>-0,15042657</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-4,08870387</td><td>-0,07045033</td><td>12,33694422</td><td>-0,00571052</td></tr>
<tr><td>3</td><td>-4,08299335</td><td>-0,00009953</td><td>12,30209283</td><td>-0,00000809</td></tr>
</table>
Die gesuchte Nullstelle liegt bei $x_N \approx -4,08$.
Je nach Verfahren und Startwert der Berechnung wird eine Aussage getroffen, wie viele Nachkommastellen sich nicht mehr verändern und mit welcher Genauigkeit die Nullstelle bestimmt wurde.</td><td></td><td>7</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufg.1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.3	$f'(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{13}{5} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{5}x - \frac{6}{5}$	2				
	$f'(x) = 0 = \frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{13}{5}$ $\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 2x - \frac{13}{3}$ $x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{13}{3}} \approx 1 \pm 2,31$ $x_1 \approx 3,31 \quad x_2 \approx -1,31$ $f''(3,31) \approx 3,97 > 0 \Rightarrow T \ (3,31 \mid 5,07)$	4				
	$f''(-1,31) \approx -1,57 < 0 \Rightarrow H \ (-1,31 \mid 14,93)$	4				
1.4	Nachweis über die entsprechende hinreichende und notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = \frac{6}{5}x - \frac{6}{5} \quad und \quad f'''(x) = \frac{6}{5}$ $f''(1) = 0 \quad und \quad f'''(1) \neq 0$ und es ist: $f(1) = 10$	4				
1.5	f(-4,5) = - 5,675 f(5) = 10	2				
	 Graph		4			

Aufg.1	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
1.6	Gegeben: $W(1 \mid 10)\ \ und\ \ m = f'(1) = -\frac{16}{5}$ Gesucht: $t(x) = mx + b$ $10 = (-\frac{16}{5}) \cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{66}{5}$ Es ergibt sich: $t(x) = -\frac{16}{5}x + \frac{66}{5}$ $t(0) = \frac{66}{5} \Rightarrow S_y\left(0 \middle\vert \frac{66}{5}\right)$ $t(x) = 0 = -\frac{16}{5}x + \frac{66}{5} \Rightarrow S_x\left(\frac{33}{8} \middle\vert 0\right)$		6			
1.7	$g(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{13}{5}x + 3$ $0 = \frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{13}{5}x + 3$ $0 = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ x_1=1 erfüllt die Gleichung $(x^3 - 3x^2 - 13x + 15):(x-1) = x^2 - 2x - 15$ $0 = x^2 - 2x - 15$ $x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{16} \Rightarrow x_2 = 5;\quad x_3 = -3$ Daraus ergeben sich die Punkte: $S_{x_1}\ (1 \mid 0)\quad S_{x_2}\ (5 \mid 0)\quad S_{x_3}\ (-3 \mid 0)$		6			
	Summe Aufgabe 1:	19	23	0		

Aufg. 2	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
2.1	$f(4)=s(4)=-2\cdot 4+10=2 \ \Rightarrow S(4\,\vert\,2)$	2				
	Da sich der Verlauf des Flusses und somit das Krümmungsverhalten ändert, besitzt der Graph von f in W einen Wendepunkt. Somit gilt $f''(8)=0$ und $f'''(8)\neq 0$		1			
2.2	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$; $f'(x)=3ax^2+2bx+c$; $f''(x)=6ax+2b$		1			
	$f(8)=8$ Wendepunkt		1			
	$f''(8)=0$ Wendepunkt		1			
	$f(4)=2$ Schnittpunkt S der Graphen von f und s.		1			
	$f'(4)=-\frac{1}{m_s}=-\frac{1}{-2}=0{,}5$ s ist Normale bzgl. f in S			2		
	Gleichungssystem: $512a+64b+8c+d=8$ $48a+2b=0$ $64a+16b+4c+d=2$ $48a+8b+c=0{,}5$		1			
2.3	Lösungen des Gleichungssystems berechnen $a=-\frac{1}{32}$; $b=\frac{3}{4}$; $c=-4$; $d=8$ Funktionsgleichung: $f(x)=-\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{4}x^2-4x+8$		6			
	Summe Aufgabe 2:	2	12	2		

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
3.1	Hauptbedingung: Die Kosten $K(x,y) = 900(2x+2y)+200(2x+y) = 2200x+2000y$ sollen minimal sein. Nebenbedingung: $x \cdot y = 800 \Leftrightarrow y = \frac{800}{x}$ Zielfunktion durch Einsetzen hergeleitet: $K(x) = 2200x + 2000\frac{800}{x} = 2200x + \frac{1600000}{x}$			4		
3.2	Minimum berechnen: Bestimmen der Ableitungsfunktionen: $K'(x) = 2200 - 1600000x^{-2}$ und $K''(x) = +3200000x^{-3}$ Hinreichende Bedingung: $K'(x) = 0$ und $K''(x) > 0$ Mögliche Extremstellen: $2200 - 1600000x^{-2} = 0 \Leftrightarrow 2200x^2 - 1600000 = 0$ $\Leftrightarrow x_{E1,E2} = \pm 26{,}97$ (negative Lösung nicht sinnvoll) Hinr. Bed. prüfen: $K''(26{,}97) \approx 163{,}16 > 0 \Rightarrow$ Min. optimales y: $y = \frac{800}{26{,}97} \approx 29{,}66$ minimale Kosten: $K(26{,}97) \approx 118659{,}18$ Für x = 26,97 m und y = 29,66 m ergeben sich die minimalen Gesamtkosten für die Wände in Höhe von 118659,18 €.	2	5			
3.3	Mehrkosten bei quadratischem Grundriss: $x = y = \sqrt{800}$; $K(\sqrt{800}) \approx 118793{,}94$ $K(\sqrt{800}) - K(26{,}97) = 134{,}76$ Prozentsatz: $p = 0{,}113$			4		
	Summe Aufgabe 3:	2	5	8		

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
4.1	$f(x) = 0 = -\frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^2 + 3$ $0 = x^4 - 8x^2 - 9$	2				
	Substitution: $u = x^2$ $0 = u^2 - 8u - 9$ $u_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 + 9}$ $u_1 = 9 \qquad u_2 = -1$		4			
	Einsetzen in die Substitutionsgleichung: $9 = x^2 \qquad -1 = x^2$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_{3/4} \notin R$	3				
	Aus den Nullstellen von *f* und der Abbildung ergeben sich die Nullstellen von g: $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$		1			
	$A_1 = \int_0^3 (-\frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^2 + 3)\ dx$ $= [-\frac{1}{15}x^5 + \frac{8}{9}x^3 + 3x]_0^3$ $\approx 16{,}8\ FE$ $A_2 = \int_0^2 (-\frac{1}{3}x^4 + x^2 + \frac{4}{3})\ dx$ $= [-\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}x]_0^2$ $\approx 3{,}2\ FE$		6			
	$A = 2 \cdot A_1 - 2 \cdot A_2 = 27{,}2\ FE$ Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt 27,2 m².		1			

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
4.2	$h(x) = i(x)$ $-\frac{25}{2}x^2 + 2,8 = \frac{25}{2}x^2 + 2$ $0 = 25x^2 - \frac{8}{10}$ $0 = x^2 - \frac{4}{125}$ $x_1 \approx 0,18 \qquad x_2 \approx -0,18$	3				
	Außerdem ergibt sich: $d(x) = h(x) - i(x) = -25x^2 + \frac{8}{10}$		1			
	$A_1 = \int_0^{0,18} (-25x^2 + \frac{8}{10})\,dx$ $= [\frac{25}{3}x^3 + \frac{8}{10}x]_0^{0,18}$ $\approx 0,1 \ FE$ $A = 2 \cdot A_1 = 0,2 \ FE$		3			
	Der Inhalt der gesuchten Fläche beträgt 0,2 m^2.	1				
4.3	$A_G = 27,2\,m^2 - 0,2\,m^2 = 27 \ m^2$ Der Inhalt der Seitenfläche beträgt 27 m^2.		2			
	Summe Aufgabe 4	9	18	0		