Abschlussprüfung Fachoberschule 2013
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 **/46**

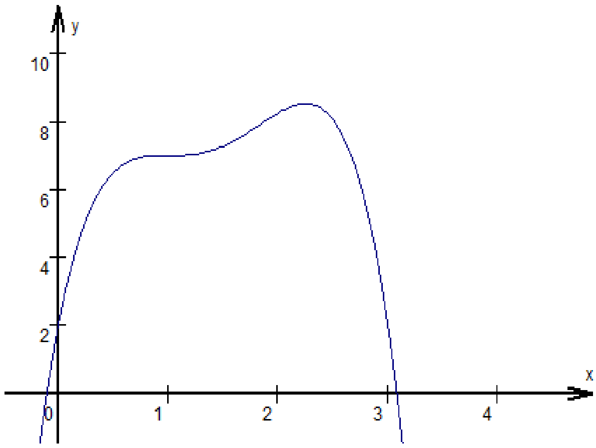
Am 1. Februar 2012 wird um 24:00 Uhr ein Erdbeben mit der Anfangsstärke 2 auf der sogenannten „Richter-Skala“ gemessen.

Das Beben dauert etwas länger als drei Minuten.

Die x-Achse gibt die Dauer des Bebens in Minuten, die y-Achse die Stärke in Werten von 0 bis 10 an.

Die Gleichung der Funktion, die den Erdbebenverlauf annähernd darstellt, lautet:

$$f(x) = -1{,}875x^4 + 10{,}625x^3 - 20{,}625x^2 + 16{,}875x + 2$$



1.1 Auf dem Graphen von f sind sechs charakteristische Punkte zu erkennen. **/6**

Nennen Sie diese bei ihrem mathematischen Namen und entnehmen Sie der Skizze die ungefähren Koordinaten.

1.2 Nach ungefähr einem Drittel der Erdbebendauer erreicht der Anstieg der Bebenstärke den Wert 0 und es scheint so, dass der Höhepunkt des Bebens erreicht sei. Danach nimmt die Stärke des Bebens aber zunächst wieder zu. **/13**

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes und formulieren Sie einen Antwortsatz, der auf Zeitpunkt (in Sekunden) und Bebenstärke Bezug nimmt.

1.3 Leider nimmt die Stärke des Bebens nach ungefähr einem Drittel der Erdbebendauer erneut zu. **/12**

Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt danach die Zunahme am stärksten ist.

1.4 Weisen Sie nach, dass das Beben nach genau 2,25 Minuten seine maximale Stärke erreicht hat. **/6**

Berechnen Sie die Stärke des Erdbebens zu diesem Zeitpunkt.

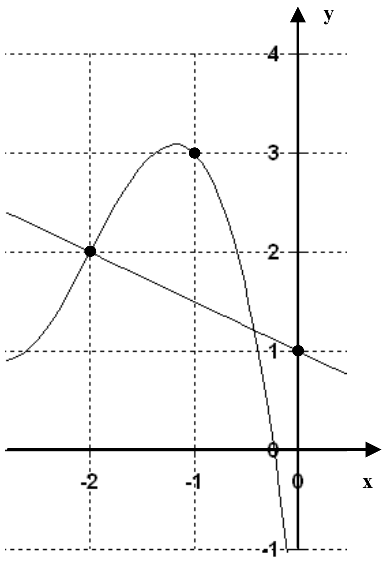
1.5 Berechnen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens, zu welchem Zeitpunkt das Beben vollständig beendet ist. **/9**

Berechnen Sie auf zwei Stellen nach dem Komma genau. Brechen Sie nach maximal drei Iterationsschritten die Rechnung ab.

2 /17

In der rechten Abbildung sind der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades und die Normale im Wendepunkt des Graphen dargestellt.

Die drei fett markierten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.



2.1 Bestimmen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionsgleichung dieser Funktion. **/10**

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

2.2 Lösen Sie stattdessen das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ der Funktion f: **/7**

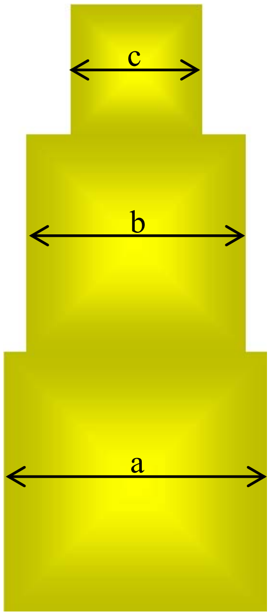
$$\begin{array}{rrrrcl} -a & +b & -c & +d & = & 3 \\ -8a & +4b & -2c & +d & = & 2 \\ -13a & +3b & -c & +d & = & 3 \\ & -2b & +c & & = & 2 \end{array}$$

3 **/17**

Ein Goldschmied entwirft einen Anhänger, der aus drei quadratischen Goldplättchen zusammengesetzt ist, die alle 2 mm dick sind (siehe Abbildung rechts).

Die Gesamthöhe beträgt 21 mm, das oberste Quadrat ist halb so breit wie das unterste.

Das Schmuckstück soll minimales Volumen haben.



3.1 Zeigen Sie, dass man das Volumen des Anhängers mit der Funktionsgleichung der Zielfunktion **/8**

$$V(c) = 28\,c^2 - 252\,c + 882$$

berechnen kann, wobei c die Kantenlänge des obersten Quadrates in mm ist und $V(c)$ das Volumen des Ohranhängers in mm³.

3.2 Geben Sie an, welche Werte für c sinnvoll sind und begründen Sie. **/2**

3.3 Wie sind die Kantenlängen der drei Quadrate zu wählen, damit der Anhänger minimales Volumen hat? **/7**

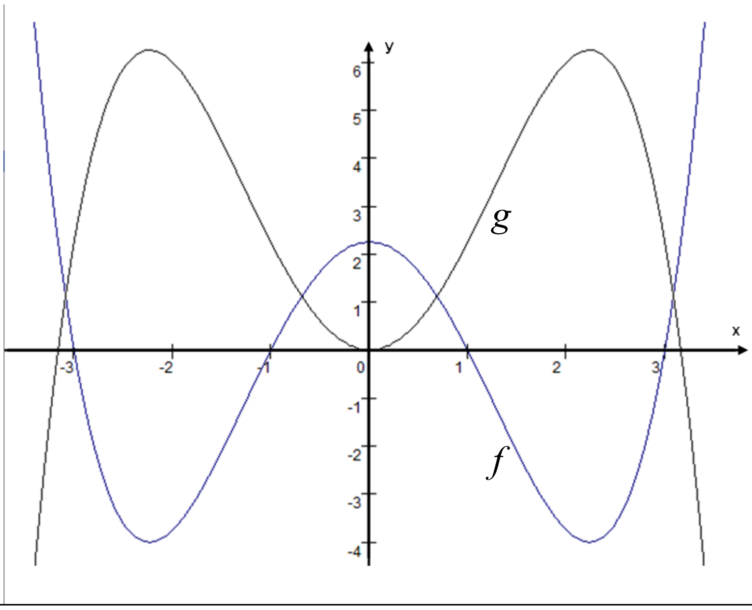
4 /36

Gegeben sind die beiden reellen Funktionen

f und g durch die Funktionsgleichungen

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{4} \quad \text{und}$$

$$g(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2$$



4.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten der beiden Graphen und begründen Sie Ihre Aussagen. **/2**

4.2 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$, wobei $x_1 = 3$ und $x_2 = -3$ die äußeren Nullstellen der Funktion f sind. **/6**

Erklären Sie, warum Sie nicht den Inhalt der Fläche berechnet haben, die vom Graphen von f und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird.

4.3 Beschreiben Sie, wie der Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird, berechnet werden kann. **/4**

Die Durchführung der Berechnung ist nicht erforderlich.

4.4 Berechnen Sie, um wie viele Einheiten a der Graph von g nach oben verschoben werden muss, so dass die vom Graphen von g und der x-Achse im Intervall [0;1] eingeschlossene Fläche 2 FE beträgt. **/6**

4.5 Ein Architekt plant für eine Gartenanlage den Bau von drei Wasserbecken in der Form der Fläche, die vollständig von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird. Die Tiefe der Becken beträgt 1,20 Meter. **/18**

Für beide Achsen gilt, dass eine Längeneinheit einem Meter entspricht.

Berechnen Sie das Gesamtvolumen aller drei Wasserbecken.

Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	BE Σ	Erreichte BE für Teilleistung ↓	[Abzüge]; Kommentare
1.1	Schnittp. mit x-Achse (-0,1|0); Schnittp.mit y-Achse (0|2); Sattelpunkt (1|7); Wendepunkt (2|8); Hochpunkt (2,3|8,5); Schnittp. mit x-Achse (3,1|0)		6		**6**		
1.2	Vermutung: bei x_1 = 1 liegt eine Sattelstelle vor, d.h. es muss gelten: f'(1) = 0; f''(1) = 0; und f'''(1) ≠ 0 wäre dann hinreichend.		2	1			
	Berechnung der Ableitungsfunktionen						
	$f'(x) = -7,5x^3 + 31,875x^2 - 41,25x + 16,875 \Rightarrow$	3					
	$f''(x) = -22,5x^2 + 63,75x - 41,25 \Rightarrow f'''(x) = -45x + 63,75$						
	Prüfung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen				**13**		
	$f'(1) = -7,5 + 31,875 - 41,25 + 16,875 = 0$						
	$f''(1) = -22,5 + 63,75 - 41,25 = 0$		3				
	$f'''(1) = -45 + 63,75 \neq 0$						
	Bei x_1 = 1 handelt es sich um eine Sattelstelle.	1					
	Berechnung der Bebenstärke: f(1) = 7	1					
	Nach genau 60 Sekunden hat das Beben die Stärke 7	1	1				
1.3	Die Steigung ist am größten im Wendepunkt		2				
	Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$	1					
	$\Leftrightarrow -22,5x^2 + 63,75x - 41,25 = 0 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 2,8\overline{3}x + 1.8\overline{3}$	1					
	Lösungen berechnet: $x_1 = 1 \; und \; x_2 = 1,8\overline{3}$	2	1		**12**		
	x_1 ist die Sattelstelle und kommt nicht in Frage	1					
	$f'''(1,8\overline{3}) > 0 \Rightarrow L-R-WP \; bei \; x_w = 1,8\overline{3}$	1	1				
	Nach etwa 110 Sekunden steigt das Edbeben am stärksten an.	1	1				
1.4	notwendige Bedingung geprüft: $f'(2,25) = 0$		1				
	hinreichende Bedingung geprüft $f''(2,25) \approx -11,72 < 0 \Rightarrow Max.$ y-Koordinate berechnet $f(2,25) \approx 8,53$	2	1		**6**		
	Nach 135 Sekunden hat das Beben die maximale Stärke 8,53	1	1				
	Zwischensumme Aufg.1.1 bis 1.4	16	20	1	**37**		

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich. Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist nur ein unverbindlicher Vorschlag.

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg.</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th>BE</th><th colspan="2">Erreichte BE für Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>Σ</th><th>↓</th><th>[Abzüge]; Kommentare</th></tr>
<tr><td></td><td>Zwischensumme Aufg.1.1 bis 1.4</td><td>16</td><td>20</td><td>1</td><td>37</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">1.5</td><td>Lösung mittels Newton-Verfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$</td><td>1</td><td></td><td></td><td rowspan="4">9</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>Startwert 3 gewählt</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td><table>
<tr><th>n</th><th>xn</th><th>f(xn)</th><th>f'(xn)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3,00000</td><td>2,00000</td><td>-22,50000</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3,08889</td><td>-0,21586</td><td>-27,45342</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3,08103</td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>5</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Nach ca. 3,08 min ≈ 185 s ist das Beben beendet.</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufg. 1</td><td>23</td><td>22</td><td>1</td><td>46</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB			BE	Erreichte BE für Teilleistung	
		I	II	III	Σ	↓	[Abzüge]; Kommentare
2.1	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$	2	1				
	Punkt (-1|3) $\Rightarrow$ $f(-1) = 3$		1				
	Punkt (-2|2) $\Rightarrow$ $f(-2) = 2$		1				
	Wendestelle -2 $\Rightarrow$ $f''(-2) = 0$		1				
	Normalensteigung -½ an der Stelle -2 $\Rightarrow$ Tangentensteigung 2 an der Stelle -2 $\Rightarrow$ $f'(-2) = 2$		1	1	**10**		
	Gleichungssystem $\begin{array}{rrrrcr} -a & +b & -c & +d & = & 3 \\ -8a & +4b & -2c & +d & = & 2 \\ -12a & +2b & & & = & 0 \\ 12a & -4b & +c & & = & 2 \end{array}$		2				
2.2	Gleichungssystem lösen: $a = -1$; $b = -6$; $c = -10$; $d = -2$	3	3		**7**		
	$f(x) = -x^3 - 6x^2 - 10x - 2$		1				
	Summe Aufg. 2	5	11	1	**17**		

Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	BE Σ	Erreichte BE für Teilleistung ↓	[Abzüge]; Kommentare
3.1	**HB:** *V(a,b,c) = 2a² + 2b² +2 c²* soll minimal sein		2				
	NB1: c = ½ a ⇔ a = 2c	1		1			
	NB2: a + b + c = 21 ⇔ b = 21 - a - c ⇔ b = 21 - 3c	1		1			
	Zielfunktion: $V(c) = 2(2c)^2 + 2(21-3c)^2 + 2c^2$				8		
	$= 2(4c^2) + 2(441 - 126c + 9c^2) + 2c^2$ $= 8c^2 + 882 - 252c + 18c^2 + 2c^2$ $= 28c^2 - 252c + 882$		2				
3.2	Natürlich muss 0 < c sein und wegen a+b+c = 3c+b =21 auch 3c < 21 und damit 0 < c < 7		1	1	2		
3.3	$V'(c) = 56c - 252 \Rightarrow V''(c) = 56$	2					
	Notw. Bed. für Extremstellen: $V'(c) = 0 \Leftrightarrow 56c - 252 = 0$						
	Lösung: c = 4,5	1			7		
	Hinr. Bed. prüfen: $V''(c) = 56 \Rightarrow V''(4{,}5) = 56 > 0 \Rightarrow Max.$	1	1				
	$c_{\min} = 4{,}5\,mm \Rightarrow a_{\min} = 9\,mm \Rightarrow b_{\min} = 7{,}5\,mm$		2				
	Summe Aufg. 3	6	8	3	**17**		

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich. Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist nur ein unverbindlicher Vorschlag.

Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	BE Σ	Erreichte BE für Teilleistung ↓	[Abzüge]; Kommentare
4.1	G_f und G_g sind achsensymmetrisch zur y-Achse, da alle in den Funktionstermen vorkommenden Exponenten von x gerade sind. (oder auch: f(x)=f(-x) bzw. g(x)=g(-x) für alle x $\in$ **D**.)		2		**2**		
4.2	$\int_{-3}^{3} f(x)\ dx = 2\int_{0}^{3} f(x)\ dx = 2(F(3)-F(0))$ $F(x)=\frac{1}{20}x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{9}{4}x$ $F(3)=-3,6;\quad F(0)=0$ $\int_{-3}^{3} f(x)\ dx = -7,2$ Ansatz Stammfunktion Berechnungen	2 (Berechnungen)	1 (Ansatz) 1 (Stammfunktion)		**6**		
	Mit diesem Integral wurde nicht Inhalt der Fläche berechnet, die vom Graphen von f und der x-Achse vollständig eingeschlossen wird, weil $f(x)$ im Integrationsintervall das Vorzeichen wechselt.			2			
4.3	$A=2\left(\left\|\int_0^1 f(x)dx\right\|+\left\|\int_1^3 f(x)dx\right\|\right)=2\left(\|F(1)-F(0)\|+\|F(3)-F(1)\|\right)$ F ist Stammfunktion von f		2	2	**4**		
4.4	Ansatz für die gesuchte Funktion $g(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{2}x^2+a$			1	**6**		
	eingeschlossene Fläche: $\int_0^1 g(x)dx=\left[\frac{1}{20}x^5+\frac{5}{6}x^3+ax\right]_0^1 = -\frac{1}{20}+\frac{5}{6}+a$	1	2				
	Es soll gelten: $-\frac{1}{20}+\frac{5}{6}+a=2 \Leftrightarrow a=\frac{73}{60}$	1		1			
	Zwischensumme Aufg.1.1 bis 1.4	4	8	6	**18**		

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich. Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist nur ein unverbindlicher Vorschlag.

Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	BE Σ	Erreichte BE für Teilleistung ↓	[Abzüge]; Kommentare
	Zwischensumme Aufg.1.1 bis 1.4	4	8	6	**18**		
4.5	Differenzfunktion: $d(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 5x^2 - \frac{9}{4}$	1	1				
	Ansatz für Nullstellen: $0 = -\frac{1}{2}x^4 + 5x^2 - \frac{9}{4} \Leftrightarrow 0 = x^4 - 10x^2 + \frac{9}{2}$	2					
	Substitution $x^2 = u$ ergibt $0 = u^2 - 10u + \frac{9}{2}$	1	1				
	Lösungen berechnet: $u_1 \approx 9{,}53$ und $u_2 \approx 0{,}47$	1	1				
	Resubstitution: $x_{1/2} \approx \pm 3{,}09$ und $x_{3/4} \approx \pm 0{,}69$	1	1		**18**		
	Flächenberechnung: $A = 2\left(\left\lvert\int_0^{0,69} d(x)\,dx\right\rvert + \left\lvert\int_{0,69}^{3,09} d(x)\,dx\right\rvert\right) = 2\left(\lvert D(0,69) - D(0)\rvert + \lvert D(3,09) - D(0,69)\rvert\right) \approx 32{,}18$ $Stammfunktion\ D(x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{9}{4}x \Rightarrow D(0,69) \approx -1{,}02; D(3,09) \approx 15{,}07$	3	3				
	Volumenberechnung: V = 32,18 m² · 1,2 m = 38,62 m³		1				
	Das Gesamtvolumen beträgt ca. 38,62 m³		1				
	Summe Aufg. 4	13	17	6	**36**		

In Aufgabe 1 wurden von	46	möglichen Bewertungseinheiten		erreicht.
In Aufgabe 2 wurden von	17	möglichen Bewertungseinheiten		erreicht.
In Aufgabe 3 wurden von	17	möglichen Bewertungseinheiten		erreicht.
In Aufgabe 4 wurden von	36	möglichen Bewertungseinheiten		erreicht.
Insgesamt wurden von	**116**	**möglichen Bewertungseinheiten**		**erreicht.**
Insgesamt wurden von	**100%**	**möglichen Bewertungseinheiten**		**erreicht.**

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich. Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist nur ein unverbindlicher Vorschlag.