Abschlussprüfung Fachoberschule 2013 Herbst
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Funktionsuntersuchung /40

Die Flugbahn eines neuen Testflugzeugs, das nur mit einem Piloten bemannt ist, lässt sich durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{44000}x^4 + \frac{1}{1375}x^3$$

beschreiben.

Das Testflugzeug startet im Koordinatenursprung und fliegt in die Richtung, die durch die x-Achse angegeben wird. Die gesamte Flugbahn befindet sich im I. Quadranten.

Hinweise: $1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{km}$

x: Entfernung vom Startpunkt

$f(x)$: Flughöhe

1.1 Nach $10\,\text{km}$ überfliegt das Testflugzeug einen $0{,}1\,\text{km}$ hohen Turm. **/2**

Berechnen Sie den vertikalen Abstand zur Turmspitze in km.

1.2 Genau in dem Moment, in dem das Flugzeug den höchsten Punkt der Flugbahn erreicht, versagt das Triebwerk und das Flugzeug stürzt entlang der vorgegebenen Flugbahn ab. **/10**

Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung (in km) zum Startort der höchste Punkt der Flugbahn erreicht wird.

Berechnen Sie die maximale Flughöhe in km.

[zur Kontrolle: $f'(x) = -\frac{1}{11000}x^3 + \frac{3}{1375}x^2$]

1.3 Berechnen Sie, wie weit (in km) vom Startort entfernt das Testflugzeug aufschlägt. **/4**

1.4 Kurz nachdem der Pilot den Ausfall des Triebwerks bemerkt, steigt er in $1{,}5\,\text{km}$ Höhe aus und schwebt bei völliger Windstille senkrecht mit dem Fallschirm zur Erde zurück. **/8**

Berechnen Sie mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens, wie weit vom Startort entfernt der Pilot landet. Führen Sie zwei Iterationsschritte durch und runden Sie Ihr Ergebnis entsprechend der gefundenen Genauigkeit.

Hinweis: Verwenden Sie als Startwert für die Iteration $x_0 = 29$.

1.5 Ermitteln Sie den Punkt, in dem der Anstiegswinkel der Flugbahn am größten ist. **/11**

Bestimmen Sie den Anstiegswinkel der Flugbahn in diesem Punkt.

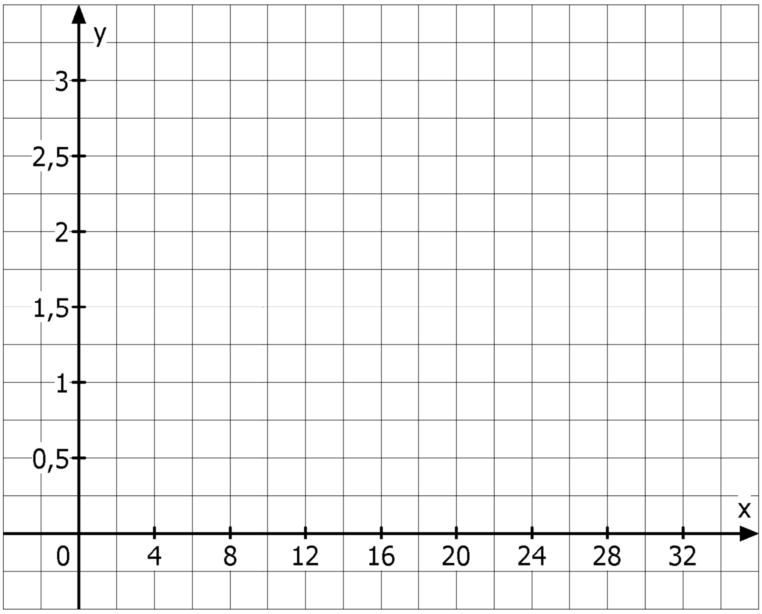
1.6 Zeichnen Sie die Flugbahn für $x \in [0\,;32]$ in das Koordinatensystem auf der **nächsten Seite**. **/5**

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6 → nächste Seite

Abschlussprüfung Fachoberschule 2013 Herbst
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

Koordinatensystem für Aufgabe 1.6



2 Rekonstruktion /15

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades besitzt bei $W(0\,|\,y_W)$ einen Wendepunkt. Die Steigung der zugehörigen Wendetangente beträgt dort $m=-8$. Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x_N=1$ und der zugehörige Graph den Tiefpunkt $T(2\,|-7)$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f.

Hinweis: Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f.

$$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\;;\;x\in\mathrm{IR}$$

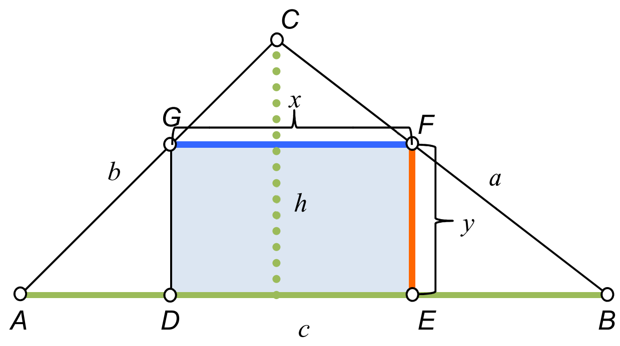
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
0 & = & & & & & a_2 & & & & \\
-16 & = & & & & & & & 2a_1 & & \\
0 & = & a_4 & + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 \\
\frac{-7}{2} & = & 8\,a_4 & + & 4\,a_3 & + & 2\,a_2 & + & a_1 & + & \frac{1}{2}a_0 \\
0 & = & 8\,a_4 & + & 3\,a_3 & + & a_2 & + & \frac{1}{4}a_1 & &
\end{array}$$

3 Extremwertaufgabe /15

Einem Dreieck ABC mit der unteren Seite $c = 10$ cm und der Höhe $h = 4$ cm soll ein größtmögliches Rechteck $DEFG$ einbeschrieben werden. Die untere Rechteckseite liegt auf c und die Eckpunkte F und G jeweils auf den Dreiecksseiten a und b (siehe Abbildung).

Hinweis:

Die Zeichnung entspricht nicht genau den in der Aufgabenstellung angegebenen Maßen.



3.1 Bestimmen Sie die Zielfunktion A, mit der der Flächeninhalt des Rechtecks berechnet werden kann. **/6**

[zur Kontrolle: $A(y) = \frac{10}{4}\left(4y - y^2\right)$; $y \in [0, h]$]

3.2 Berechnen Sie die Seitenlängen des Rechtecks, für die es den größtmöglichen Flächeninhalt annimmt. **/8**

3.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt für dieses Rechteck. **/1**

4 Integralrechnung /30

Gegeben ist die Funktion *f* mit: $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 6$; $x \in \mathrm{IR}$.

4.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen der Funktion *f*. **/6**

[zur Kontrolle: $x_{N1} -1$; $x_{N2} = 1{,}5$; $x_{N3} = 4$]

4.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt A der vom Graphen von f und der x-Achse vollständig eingeschlossenen Fläche. **/8**

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

4.3 Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$. Erklären Sie das Ergebnis. **/4**

4.4 Gegeben sei außerdem die Funktion *g* mit $g(x) = -x^4 + x^3 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$; $x \in \mathrm{IR}$. **/12**

Die Graphen der Funktionen f und g schließen auf dem Intervall $\mathrm{I} = \left[-1{,}5\,;1{,}5\right]$ eine Fläche *B* vollständig ein.

Zeigen Sie, dass die Differenzfunktion h mit $h(x) = f(x) - g(x)$ keine weiteren Nullstellen in dem Intervall I besitzt.

[zur Kontrolle: $h(x) = x^4 - \frac{25}{4}x^2 + 9$]

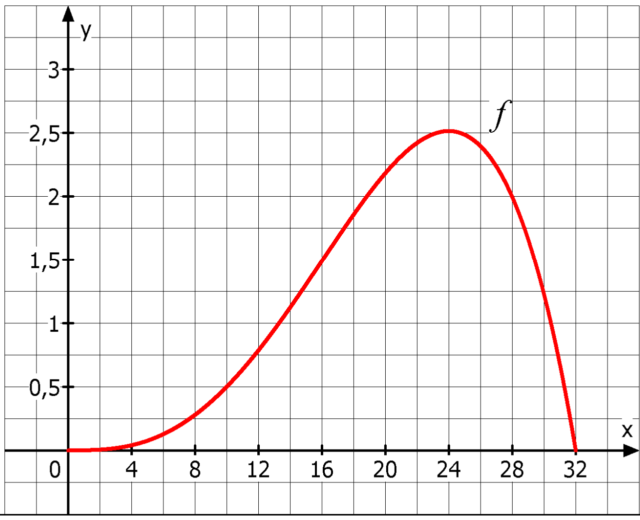
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche *B*.

Abschlussprüfung Fachoberschule
2013 Herbst, (Mathematik)
Erwartungshorizont Aufgabenvorschlag A

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	$f(10)=0{,}5$. Das Flugzeug hat über dem Turm eine Flughöhe von $0{,}5\text{ km}$. Die Flughöhe über der Turmspitze beträgt demnach $0{,}4\text{ km}$.	2		
1.2	Es gilt: $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)\neq 0$. $f'(x)=-\frac{1}{11000}x^3+\frac{3}{1375}x^2$ $f''(x)=-\frac{3}{11000}x^2+\frac{6}{1375}x$ $0=-\frac{1}{11000}x^3+\frac{3}{1375}x^2$ $=x^2\left(-\frac{1}{11000}x+\frac{3}{1375}\right)$ $x_{E1,2}=0$; $x_{E3}=24$ $x_{E1,2}=0$ ist der Startort, daher nicht sinnvoll. $f''(24)\approx -0{,}05<0$; Hochpunkt $f(24)\approx 2{,}51$ Die maximale Flughöhe wird 24 km vom Startort entfernt erreicht, sie beträgt etwa $2{,}51\text{ km}$.		2 8	
1.3	Nullstellen: $f(x_N)=0$ $0=-\frac{1}{44000}x^4+\frac{1}{1375}x^3$ $=x^3\left(-\frac{1}{44000}x+\frac{1}{1375}\right)$ $x_{1,2,3}=0$; $x_4=32$ Das Flugzeug schlägt 32 km vom Startort entfernt auf.	4		
1.4	Zu lösen ist die Gleichung $f(x)=1{,}5$ bzw. $0=-\frac{1}{44000}x^4+\frac{1}{1375}x^3-1{,}5$ mit einem Näherungsverfahren. Newton: $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ Startwert z. B. $x_0=29$ $x_1\approx 29{,}42609988$ $x_2\approx 29{,}40389979$ Eine Stelle nach dem Komma stimmt überein, der Pilot steigt etwa $29{,}4\text{ km}$ vom Startort entfernt aus.	3	5	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.5</td><td>Am steilsten ist die Flugbahn im Wendepunkt.
Für Wendepunkte gilt: $f''(x_W)=0$ und $f'''(x_W)\neq 0$
$f''(x)=-\frac{3}{11000}x^2+\frac{6}{1375}x$
$f'''(x)=-\frac{6}{11000}x+\frac{6}{1375}$

$0=-\frac{3}{11000}x^2+\frac{6}{1375}x$
$0=x\left(-\frac{3}{11000}x+\frac{6}{1375}\right)$
$x_{W1}=0\,;\,x_{W2}=16$
$f'''(0)=-\frac{6}{1375}>0\,;\,f'''(16)=-\frac{6}{1375}<0$
$x_{W1}=0$ ist der Startpunkt, am steilsten steigt das Flugzeug demnach bei $x_{W2}=16$.
$f(16)\approx 1{,}49$
Der Punkt des steilsten Anstiegs ist der Wendepunkt $P_W(16\,|\,1{,}49)$.
Anstieg bei $x_{W2}=16$: $f'(16)\approx 0{,}186$, $\arctan(0{,}186)\approx 10{,}54°$.
16 km nach dem Start steigt das Flugzeug am steilsten, der Bahnneigungswinkel beträgt dort 10,54°.</td><td></td><td>4</td><td>4

3</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>
</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>14</td><td>19</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">40</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
2	Ansatz: $f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ $f'(x)=4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1$ $f''(x)=12a_4x^2+6a_3x+2a_2$	3		
	Bedingungsgefüge: 1. $f''(0)=0$ (Wendepunkt $W(0\mid y_W)$) 2. $f'(0)=-8$ (Steigung der Wendetangente) 3. $f(1)=0$ (Nullstelle $x=1$) 4. $f(2)=-7$ (Tiefpunkt $T(2\mid -7)$) 5. $f'(2)=0$ (Steigung der Tangente im Tiefpunkt) Gleichungssystem: $\begin{array}{lrcrcrcrcrcr} \text{I.} & 0 & = & & & & & 2a_2 & & & & \\ \text{II.} & -8 & = & & & & & & & a_1 & & \\ \text{III.} & 0 & = & a_4 & + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 & + & a_0 \\ \text{IV.} & -7 & = & 16a_4 & + & 8a_3 & + & 4a_2 & + & 2a_1 & + & a_0 \\ \text{V.} & 0 & = & 32a_4 & + & 12a_3 & + & 4a_2 & + & a_1 & & \end{array}$		5	
	Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS) Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS): $a_4=1\,;a_3=-2\,;a_2=0\,;a_1=-8\,;a_0=9$		6	
	Für die Funktionsgleichung gilt: $f(x)=x^4-2x^3-8x+9$	1		
	Summe	4	11	0
	mögliche BE	15		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Bestimmung der Zielfunktion: $A = x \cdot y$; Hauptbedingung Die Dreiecke *ABC* und *GFC* sind ähnlich. $\frac{c}{h} = \frac{x}{(h-y)} \Leftrightarrow c(h-y) = hx$ $x = \frac{c(h-y)}{h}$; Nebenbedingung $A(y) = \frac{c(h-y)y}{h}$; $c = 10$; $h = 4$ $= \frac{10}{4} \cdot (4y - y^2)$ $= 10y - 2,5y^2$		1	5
3.2	Bestimmung von x und y: $A'(y) = 10 - 5y$ $A''(y) = -5$ $A'(y) = 0$ $10 - 5y = 0 \Leftrightarrow y = 2$ $A''(2) = -5 < 0$; *Maximum* $x = \frac{c(h-y)y}{h} = 5$ $x = 5\text{ cm}$; $y = 2\text{ cm}$ Der Inhalt des Rechtecks ist maximal für $x = 5$ cm und $y = 2$ cm.	3 5		
3.3	$A = 5 \cdot 2 = 10$ Der Flächeninhalt beträgt 10 cm^2.	1		
	Summe	9	1	5
	mögliche BE	15		

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Nullstellen: $f(x_N)=0$ Erste Nullstelle durch Probieren: $f(-1)=0 \Rightarrow x_{N1}=-1$ Polynomdivision: $\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6\right):(x+1)=x^2-\frac{11}{2}x+6$ $x^2-\frac{11}{2}x+6=0$; Anwendung der p-q-Formel $x_{N2}=1{,}5$; $x_{N3}=4$.	6		
4.2	$A_1=\int_{-1}^{1,5}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6\right)\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+6x\right]_{-1}^{1,5}$ $\approx 5{,}77-(-4)=9{,}77$ $A_2=\left\lvert\int_{1,5}^{4}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6\right)\mathrm{dx}\right\rvert=\left\lvert\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+6x\right]_{1,5}^{4}\right\rvert$ $\approx\lvert -4-(5{,}77)\rvert=\lvert -9{,}77\rvert=9{,}77$ $A=A_1+A_2\approx 2\cdot 9{,}77=19{,}54$ FE		3 3 2	
4.3	$\int_{-1}^{4}\left(x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6\right)\mathrm{dx}=0$, da die beiden Teilflächen entgegengesetzt gleich groß sind, kompensieren sie sich vollständig, die Bilanz ergibt null.	4		
4.4	$f(x_S)=g(x_S)$ $x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{1}{2}x+6=-x^4+x^3+\frac{7}{4}x^2+\frac{1}{2}x-3$ $h(x)=x^4-\frac{25}{4}x^2+9$; $h(x)=0$ Substitution mit $z:=x^2$ und p-q-Formel liefern $z_{1,2}=\frac{25}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{25}{8}\right)^2-9}=\frac{25}{8}\pm\frac{7}{8}$ $z_1=\frac{9}{4}\Rightarrow x_{1,2}=\pm 1{,}5$; $z_2=4\Rightarrow x_{3,4}=\pm 2$ Keine Nullstellen zwischen $-1{,}5$ und $1{,}5$, zu berechnen ist das Integral $B=\int_{-1,5}^{1,5}\left(x^4-\frac{25}{4}x^2+9\right)\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{25}{12}x^3+9x\right]_{-1,5}^{1,5}$ $\approx 7{,}99-(-7{,}99)=15{,}98$ FE		8 4	
	Summe	10	20	0
	mögliche BE		30	