Abschlussprüfung Fachoberschule 2013
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 /51

Auf einer entlegenen Insel bricht eine hochansteckende Krankheit aus, deren Ablauf sich in drei Phasen gliedert:

Phase 1: Die Anzahl der erkrankten Personen steigt immer schneller an. Die Ärzte stellen den Erreger fest, lassen einen Impfstoff einfliegen und beginnen mit einer Massenimpfung.

Phase 2: Die Impfung beginnt zu wirken. Die Anzahl der erkrankten Personen steigt zwar noch an, aber immer langsamer, bis sie ihren größten Wert erreicht.

Phase 3: Die Anzahl der erkrankten Personen nimmt immer schneller ab, bis alle gesund sind.

Der Verlauf dieser Epidemie lässt sich näherungsweise durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -0,025x^5 + 0,51x^4$ darstellen. Dabei ist x die Zeit in Tagen und $f(x)$ die Anzahl der erkrankten Personen.

1.1 Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle (auf ganze Zahlen runden) und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f (1 Tag $\hat{=}$ 5 mm; 1000 Personen $\hat{=}$ 1 cm) mit Hilfe dieser Wertetabelle. **/8**

x	0	4	8	12	16	20
$f(x)$						

1.2 Berechnen Sie, wann Phase 1 in Phase 2 übergeht. **/13**

Wie schnell steigt die Anzahl der erkrankten Personen zu diesem Zeitpunkt an?

1.3 Berechnen Sie, wann die meisten Personen erkrankt sind, und bestimmen Sie deren Anzahl zu diesem Zeitpunkt. **/9**

1.4 Berechnen Sie, wann Phase 3 endet. **/6**
(Hinweis: dieser Zeitpunkt liegt außerhalb der Wertetabelle).

1.5 Berechnen Sie, wann erstmalig 5000 Personen erkrankt sind. Zeigen Sie, dass dieser Zeitpunkt zwischen dem 12. und 13. Tag liegt und benutzen Sie ein geeignetes Näherungsverfahren, das Sie nach 2 Iterationen abbrechen. **/15**

Geben Sie an, wie genau Sie den Zeitpunkt bestimmt haben, indem Sie Ihr Ergebnis angemessen runden und dies begründen.

2 /22

Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades besitzt den Hochpunkt $H(-1|1)$. Die Gerade g mit $g(x)=1{,}5x-26{,}5$ schneidet den Graphen der Funktion f an der Stelle $x=-3$. Die Gerade g verläuft parallel zu der Tangente t an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x=0{,}5$.

2.1 Bestimmen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionsgleichung dieser Funktion. **/13**

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

2.2 Lösen Sie stattdessen das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion *f*. **/9**

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
30a & - & 11b & + & 4c & - & d & = & 31 \\
-3a & + & 2b & - & c & & & = & 0 \\
-2a & + & 2b & - & 2c & + & 2d & = & 2 \\
2a & + & 5b & + & 3c & + & d & = & 7
\end{array}
$$

3 /19

In einen geraden Kreiskegel mit dem Radius $R = 6cm$ und der Höhe $H = 20cm$ ist ein Kreiszylinder mit dem Radius r und der Höhe h gestellt. (siehe Abbildung 1). Dieser eingeschlossene Zylinder soll ein maximales Volumen besitzen.

Die Abbildung 2 zeigt einen Querschnitt durch beide.

In Abbildung 2 gilt nach Strahlensatz die Beziehung $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$.

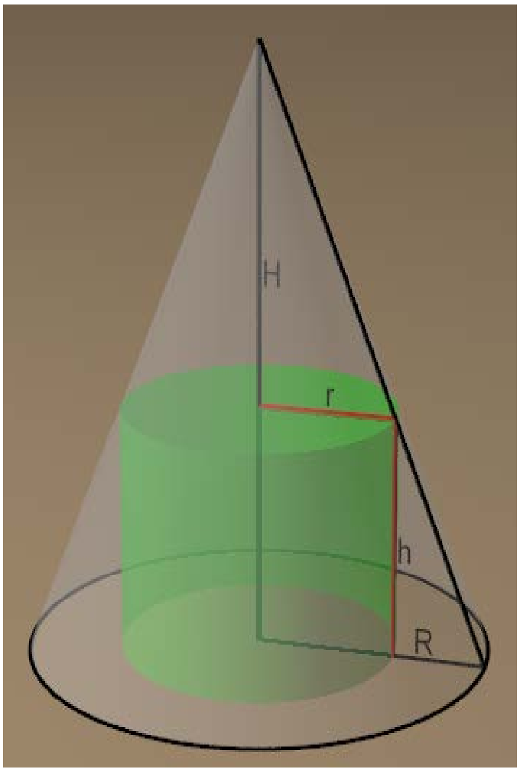


Abbildung 1

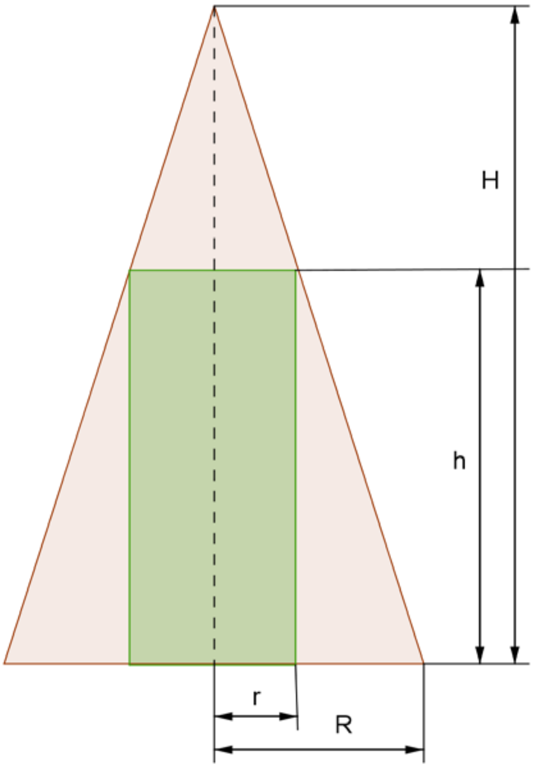


Abbildung 2

3.1 Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der Zielfunktion zur Bestimmung des Volumens V_Z des Kreiszylinders wie folgt lautet: $V_Z(r) = 20\pi r^2 - \frac{10}{3}\pi r^3$ **/7**

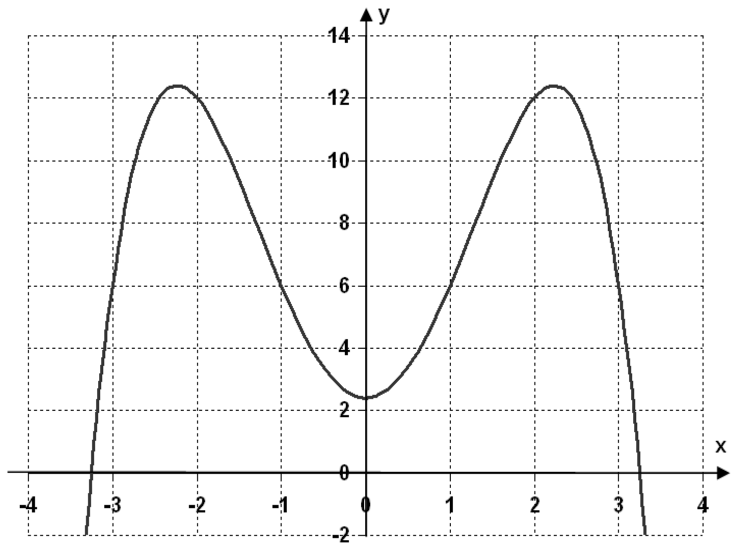
3.2 Bestimmen Sie r und h für den Zylinder mit maximalem Volumen. **/9**

3.3 Berechnen Sie den Rauminhalt des Zylinders mit maximalem Volumen. **/3**

4 /51

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$f(x) = -0{,}4x^4 + 4x^2 + 2{,}4 \;;\; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$



4.1 Weisen Sie nach, dass f eine achsensymmetrische Funktion bezüglich der Ordinatenachse (y-Achse) ist. Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die vom Graphen der Funktion f und der Abszissenachse (x-Achse) eingeschlossen wird. **/18**

4.2 Der Graph von f wird im ersten Quadranten vom Graphen einer Parabel p in zwei Punkten geschnitten. Die Funktionsleichung der Parabel lautet $p(x) = 0{,}4x^2 + 6$.

4.2.1 Skizzieren Sie den Graphen der Parabel in die obige Abbildung. Schraffieren Sie die Teilflächen, die im ersten Quadranten von den Graphen der Funktionen f und p eingeschlossen werden. **/5**

4.2.2 Berechnen Sie den gesamten Flächeninhalt der in Aufgabe 4.2.1 schraffierten Teilflächen. **/24**

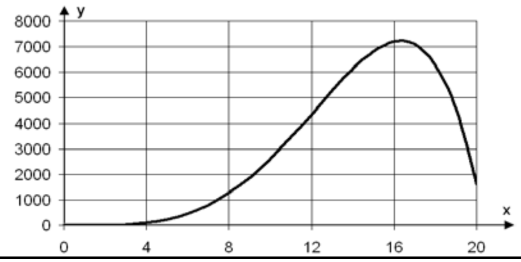
4.2.3 **/4**

Durch die Berechnung des Integrals $\int_a^b (p(x) - f(x))dx$,

wobei a = 0 und b die Abszisse des äußeren Schnittpunktes der Graphen der Funktionen f und p ist, bestimmen Sie einen Wert, der sich aus den Flächeninhalten der in 4.2.1 schraffierten Teilflächen zusammensetzt (die sogenannte Flächenbilanz).

Bestimmen Sie diesen Wert. Sie können die Zwischenergebnisse der Aufgabe 4.2.2 benutzen!

Begründen Sie das von 4.2.2 abweichende Ergebnis.

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg.</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th>BE</th><th colspan="2">Erreichte BE für Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>Σ</th><th>↓</th><th>[Abzüge]; Kommentare</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1.1</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>20</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0</td><td>105</td><td>1270</td><td>4355</td><td>7209</td><td>1600</td></tr></table></td><td>5</td><td></td><td></td><td rowspan="3">8</td><td rowspan="3"></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Graph zeichnen</td><td>2</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">1.2</td><td>$f'(x)=-0{,}125x^4+2{,}04x^3 \Rightarrow f''(x)=-0{,}5x^3+6{,}12x^2 \Rightarrow f'''(x)=-1{,}5x^2+12{,}24x$</td><td>3</td><td></td><td></td><td rowspan="7">13</td><td rowspan="7"></td><td rowspan="7"></td></tr>
<tr><td>Notw. Bed. für Wendestellen: $f''(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}5x^3+6{,}12x^2=0$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow x^2\left(-0{,}5x+6{,}12\right)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \text{ oder } x_2=12{,}24$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>die Lösung $x_1 = 0$ ist nicht sinnvoll (oder Prüfung wie unten)</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>f ''' (12,24) = 74,91 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ 12,24 ist eine Wendestelle von f</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Anstieg an der Stelle x_2 = 12,24 ist f ' (12,24) = 935,22</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Phase 1 endet nach 12,24 Tagen, Änderungsrate 935,22 Pers./Tag</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">1.3</td><td>Notw. Bed. für Extremstellen: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}125x^4+2{,}04x^3=0 \Leftrightarrow$</td><td>1</td><td></td><td></td><td rowspan="6">9</td><td rowspan="6"></td><td rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>$x^3\left(-0{,}125x+2{,}04\right)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \text{ oder } x_2=16{,}32$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>die Lösung $x_1 = 0$ ist nicht sinnvoll (oder Prüfung wie unten)</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>f '' (16,32) = - 534,34 < 0 $\Rightarrow$ 16,32 ist Maximalstelle von f</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>f(16,32) = 7235,7 $\Rightarrow$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>nach 16,32 Tagen sind die meisten Personen erkrankt (ca. 7236).</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">1.4</td><td>Phase 3 endet, wenn $f(x)=0 \Leftrightarrow -0{,}025x^5+0{,}51x^4=0 \Leftrightarrow$</td><td></td><td>1</td><td></td><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>$x^4\left(-0{,}025x+0{,}51\right)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \text{ oder } x_2=20{,}4$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>die Lösung $x_1 = 0$ ist nicht sinnvoll</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Krankheit ist nach 20,4 Tagen besiegt.</td><td></td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe Aufg. 1.1 bis 1.4</td><td>16</td><td>20</td><td>0</td><td>36</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich. Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist nur ein unverbindlicher Vorschlag.

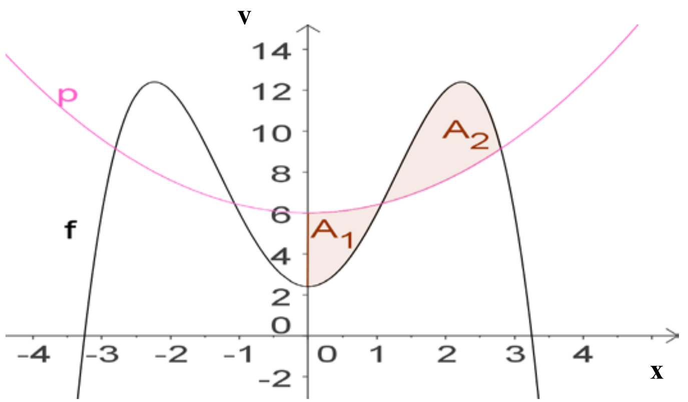
Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	BE Σ	Erreichte BE für Teilleistung ↓	[Abzüge]; Kommentare
	Summe Aufg. 1.1 bis 1.4	16	20	0	**36**		
1.5	f(12) = 4355 < 5000 (siehe oben) und f(13) = 5284 > 5000 ⇒ gesuchter Zeitpunkt im Intervall]12;13[	1		2			
	Ansatz: f(x) = 5000 ⇔ g(x) = 0 mit g(x) = f(x) - 5000		2				
	Iterationsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$	1					
	Startwert x_1 = 13		1		**15**		
	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} n & x_n & g(x_n) & g'(x_n) \\ \hline 1 & 13 & \mathbf{283{,}785} & \mathbf{911{,}755} \\ 2 & \mathbf{12{,}68875} & \mathbf{-2{,}64682} & \mathbf{927{,}3052} \\ 3 & \mathbf{12{,}6916} & & \end{array}$	6					
	Ergebnis angemessen gerundet und begründet			2			
	Summe Aufg. 1.	24	23	4	**51**	**0**	

Aufg.	Erwartete Teilleistung	I	II	III	Σ	↓	[Abzüge]; Kommentare
2.1	Ansatz: f(x) = ax³ +bx² +cx +d; f'(x) = 3ax² +2bx + c; f"(x) = 6ax +2b	2	1				
	Bedingungsgefüge:						
	1. f (-1) = 1 ⇐ Punkt P (-1|1)		1				
	2. f ' (-1) = 0 ⇐ HP bei x = -1		2				
	3. f (-3) = g (-3) = -31 ⇐ Schnittpunkt mit g	1		1	**13**		
	4. f ' (0,5) = $m_t = m_g$ = 1,5 ⇐ t || g bei x = 0,5	1	1	1			
	Gleichungssystem: $\begin{array}{rrrrrrrrrr} \text{I:} & -a & + & b & - & c & + & d & = & 1 \\ \text{II:} & 3a & - & 2b & + & c & & & = & 0 \\ \text{III:} & -27a & + & 9b & - & 3c & + & d & = & -31 \\ \text{IV:} & 0,75a & + & b & + & c & & & = & 1,5 \end{array}$		2				
2.2	Lösungen des gegebenen Gleichungssystems berechnet: a = 2; b = 2; c = -2; d = -1	4	4		**9**		
	Funktionsgleichung: f(x) = 2x³ + 2x² - 2x - 1		1				
	Summe Aufg. 2	8	12	2	**22**		

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich. Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist nur ein unverbindlicher Vorschlag.

Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB			BE	Erreichte BE für Teilleistung	
		I	II	III	Σ	↓	[Abzüge]; Kommentare
Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB			BE	Erreichte BE für Teilleistung	
		I	II	III	Σ	↓	[Abzüge]; Kommentare
3.1	Hauptbedingung HB: $V_Z(r,h)=\pi r^2 h$ soll maximal sein		2				
	Nebenbedingung NB: $\frac{h}{H}=\frac{R-r}{R}\Rightarrow h=\frac{R-r}{R}\cdot H=\frac{6-r}{6}\cdot 20=\left(1-\frac{r}{6}\right)\cdot 20=20-\frac{10}{3}r$	1	1	1	**7**		
	Zielfunktion ZF: $V_Z(r)=\pi r^2 h=\pi r^2\left(20-\frac{10}{3}r\right)=20\pi r^2-\frac{10}{3}\pi r^3$		2				
3.2	Notw. Bed. für Extremstellen: $V_Z\,'(r)=40\pi r-10\pi r^2=0\Leftrightarrow$	1					
	$40\pi r-10\pi r^2=0\Leftrightarrow 10\pi r(4-r)=0\Leftrightarrow r_1=0;\ r_2=4$		3				
	Lösung r_1 = 0 ist nicht sinnvoll (oder weitere Prüfung wie unten)		1				
	$V_Z\,''(r)=40\pi-20\pi r\Rightarrow V_Z\,''(4)=-40\pi<0\Rightarrow$ max. Volumen bei $r=4$	1	1		**9**		
	$h=20-\frac{10}{3}\cdot 4=\frac{20}{3}$		1				
	maximales Volumen bei $r=4\,cm$ und $h=\frac{20}{3}cm\approx 6{,}67\,cm$	1					
3.3	$V_{Z_{\max}}=A_G\cdot h=\pi r^2 h=\pi\cdot 4^2\cdot\frac{20}{3}=335{,}10$	1	1		**3**		
	Der Zylinder hat ein maximales Volumen von 335,10 cm³	1					
	Summe Aufg. 3	6	12	1	**19**		

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich. Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist nur ein unverbindlicher Vorschlag.

Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	BE Σ	Erreichte BE für Teilleistung ↓	[Abzüge]; Kommentare
4.1	Graph von f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da alle im Funktionsterm vorkommenden Exponenten von x gerade sind.		2				
	(oder auch:) $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \Re$						
	Bedingung für Nullstellen von f: $0 = -0,4x^4 + 4x^2 + 2,4 \Leftrightarrow$ $0 = x^4 - 10x^2 - 6$	2					
	Substitution $x^2 = z$	1	1				
	Lösungen der quadratischen Gleichung $z_1 = 10,57;\ z_2 = -0,57$	2	1		**18**		
	Resubstitution $x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} \Rightarrow x_1 = 3,25$ $x_2 = -3,25 x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2} \Rightarrow$ nicht lösbar in $\Re$	1	2				
	Bestimmung des Inhaltes der Fläche A						
	$A = \left\| \int_{-3,25}^{3,25} f(x)dx \right\| = 2\left\| \int_{0}^{3,25} (x)dx \right\| =$ Ansatz (Integral)		2				
	Stammfunktion		1				
	$2\left\|\left[-0,08x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 2,4x\right]_0^{3,25}\right\| = 49,13\,FE$ Berechnungen	3					
4.2.1					**5**		
	Skizze der Parabel zeigt Scheitelpunkt (0|6); nach oben geöffnet		1	1			
	zwei Schnittpunkte mit Graphen von f im 1. Quadranten	1					
	Schraffierte Teilflächen		1	1			
	Zwischensumme Aufg. 4.1 bis 4.2.1	10	11	2	**23**		

Aufg.	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	BE Σ	Erreichte BE für Teilleistung ↓	[Abzüge]; Kommentare
	Zwischensumme Aufg. 4.1 bis 4.2.1	10	11	2	**23**		
4.2.2	Bestimmung Differenzfunktion $d(x)=p(x)-f(x)=0,4x^4-3,6x^2+3,6$	1	1				
	Ansatz für Nullstelle: $d(x)=0 \Leftrightarrow 0,4x^4-3,6x^2+3,6=0$ $\Leftrightarrow\ 0=x^4-9x^2+9$	3					
	Substitution $x^2=z \Rightarrow 0=z^2-9z+9$	1	1				
	Lösungen der quadratischen Gleichung $z_1=7,85\ z_2=1,15$	2	1				
	Resubstitution: $x_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}\ \Rightarrow\ x_1=2,80\ x_2=-2,80$ $x_{3/4}=\pm\sqrt{z_2}\ \Rightarrow\ x_3=1,07\ x_4=-1,07$	2	1				
	Berechnung Inhalt der Fläche $A_{ges}=A_1+A_2$		1		**24**		
	$A_1=\left\|\int_0^{1,07} d(x)\,dx\right\|=\|D(1,07)-D(0)\|=2,49$ Ansatz (Integral)		2				
	$D(x)=0,08x^5-1,2x^3+3,6x$ Stammfunktion		1				
	$D(0)=0;\ D(1,07)=2,49; D(2,8)=-2,49$ Berechnungen	3					
	$A_2=\left\|\int_{1,07}^{2,80} d(x)\,dx\right\|=\|D(2,80)-D(1,07)\|=\|4,98\|$ Ansatz (Integral)		2				
	1 Berechnung	1					
	Gesamtflächeninhalt $A_{ges}=A_1+A_2=2,49+4,98=7,47$	1					
4.2.3	Flächenbilanz: $A_{Bilanz}=A_1-A_2=2,49-4,98=-2,49$	1	1		**4**		
	Inhalt der Fläche summiert Teilflächeninhalte, Flächenbilanz versieht Teilflächeninhalte je nach Lage mit Vorzeichen. Teilflächen der Differenzfunktion unterhalb der Abszissenachse gehen somit mit negativem Vorzeichen in die Summe ein.			2			
	Summe Aufg. 4	25	22	4	**51**		

In Aufgabe 1 wurden von	51	möglichen Bewertungseinheiten		erreicht.
In Aufgabe 2 wurden von	22	möglichen Bewertungseinheiten		erreicht.
In Aufgabe 3 wurden von	19	möglichen Bewertungseinheiten		erreicht.
In Aufgabe 4 wurden von	51	möglichen Bewertungseinheiten		erreicht.
Insgesamt wurden von	**143**	**möglichen Bewertungseinheiten**		**erreicht.**
Insgesamt wurden von	**100%**	**möglichen Bewertungseinheiten**		**erreicht.**

Die Anzahl der Bewertungseinheiten für jede Teilaufgabe ist verbindlich. Die Verteilung der Bewertungseinheiten innerhalb einer Teilaufgabe ist nur ein unverbindlicher Vorschlag.