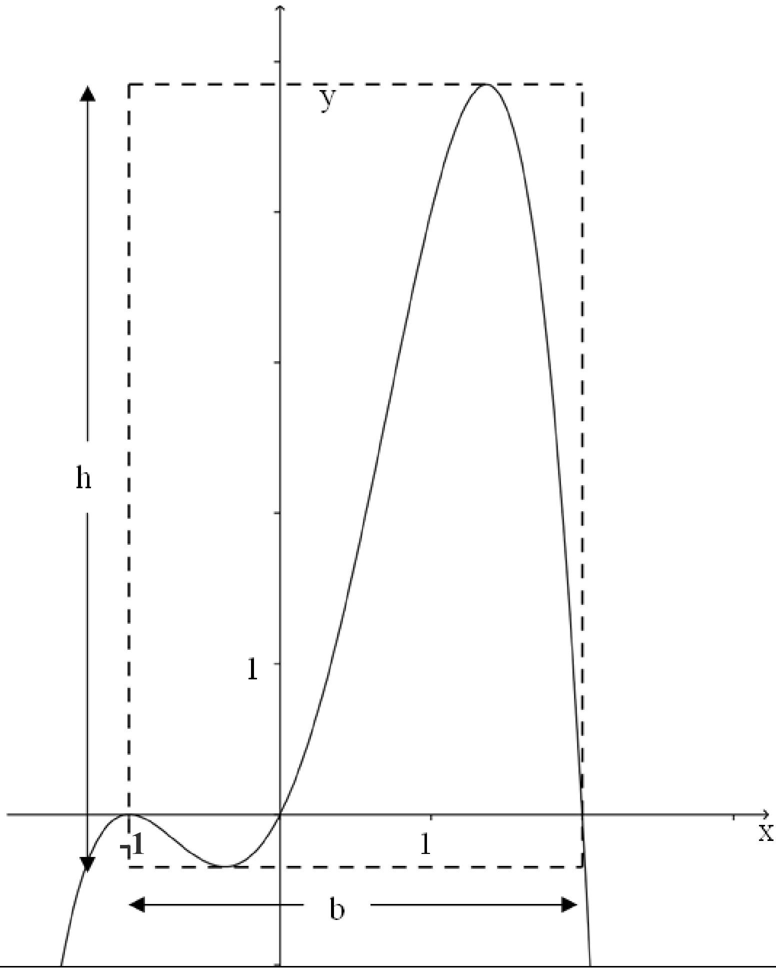
1 / 40

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x.$$

Dazu ist ein Rechteck gegeben, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Die Seiten enthalten jeweils eine Nullstelle bzw. einen Extremalpunkt.



1.1	Geben Sie das Symmetrieverhalten von f begründet an!	**/ 2**
1.2	Berechnen Sie die Nullstellen von f !	**/ 5**
1.3	Berechnen Sie die Extremalpunkte des Graphen von f !	**/ 15**
1.4	Berechnen Sie die Wendepunkte des Graphen von f !	**/ 7**
1.5	Berechnen Sie den Flächeninhalt des beschriebenen Rechtecks! (Falls Sie 1.2 bzw. 1.3 nicht lösen können, lesen Sie die entsprechenden Werte näherungsweise in der Zeichnung ab!)	**/ 4**
1.6	Stellen Sie die Gleichung der Normalen n von f im Koordinatenursprung auf! Tragen Sie die Normale in die Skizze ein!	**/ 4**
1.7	Berechnen Sie die Schnittpunkte der Normalen n mit den Rechteckseiten! (Falls Sie 1.2 bzw. 1.3 nicht lösen können, beschreiben Sie den Lösungsweg, um die Schnittpunkte zu finden, schrittweise als Text!)	**/3**

2 /15

Eine punktsymmetrische ganzrationale Funktion f fünften Grades verläuft durch den Punkt $P_1(-1|-3,5)$. Die Tangente von f an der Stelle $x_1 = -1$ verläuft durch den Punkt $P_2(2|13)$. Die zweite Ableitung an der Stelle $x_1 = -1$ ist gleich 2.

Bestimmen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Funktionsgleichung dieser Funktion.
Die Lösung dieses Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

Lösen Sie stattdessen das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ der Funktion *f*.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 52a & + & 14b & + & 2c & = & -7 \\ -5a & + & 3b & + & 3c & = & 18,5 \\ -32a & - & 8b & - & 2c & = & 5 \end{array}$$

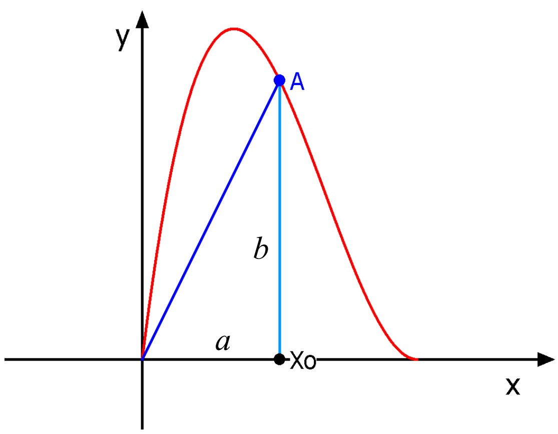
3 / 15

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x \quad ; x \in [0;4]$.

(siehe Zeichnung)

In die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossene Fläche soll ein möglichst großes Dreieck einbeschrieben werden. Die untere Seite des Dreiecks liegt auf der x-Achse vom Ursprung bis zur Stelle x_0. Die rechte Seite ist eine Parallele zur y-Achse mit dem Punkt *A* auf dem Graphen von f.



3.1 Weisen Sie nach, dass die Funktionsgleichung der Zielfunktion zur Bestimmung des Flächeninhaltes wie folgt lautet: **/ 5**

$$A(x) = x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 4x + 8\right)$$

3.2 Wie groß sind die Seiten a und b des Dreiecks mit dem größten Flächeninhalt? **/ 7**

3.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks. **/ 3**

4 Runden Sie alle Ergebnisse und Zwischenergebnisse auf 3 Stellen nach dem Komma. / 30

Eine Werbeagentur hat für einen Kunden ein Firmenlogo entworfen, das den Buchstaben W darstellt und an der Fassade der Firmenzentrale des Kunden angebracht werden soll.

In der Abbildung 1 ist das Logo durch die grau gefärbte Fläche dargestellt, deren Ränder die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

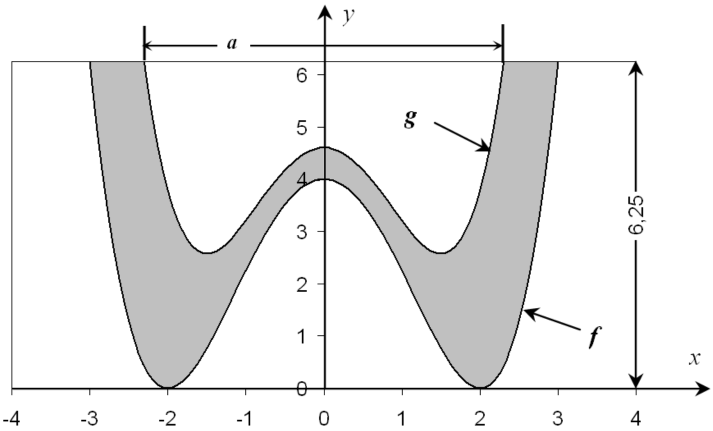
$f(x) = 0{,}25x^4 - 2x^2 + 4$ und

$g(x) = 0{,}4x^4 - 1{,}8x^2 + 4{,}6$

sind. (1 $LE \hat{=} 1\,m$)

Das Logo ist 6,25 m hoch und ganz oben 6 m breit.

Abbildung 1



4.1 Berechnen Sie das Integral $I = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx$ und markieren Sie die entsprechende Fläche durch eine Schraffur in der Abbildung 1. **/ 7**

4.2 Am oberen Ende des Logos soll in der Weihnachtszeit der Zwischenraum durch eine Lichterkette überbrückt werden, die mindestens die Länge a haben muss (siehe Abbildung 1). Berechnen Sie a. **/ 8**

4.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Firmenlogos. **/ 15**

Ende der Aufgabenstellung

Abschlussprüfung Fachoberschule 2011
Mathematik

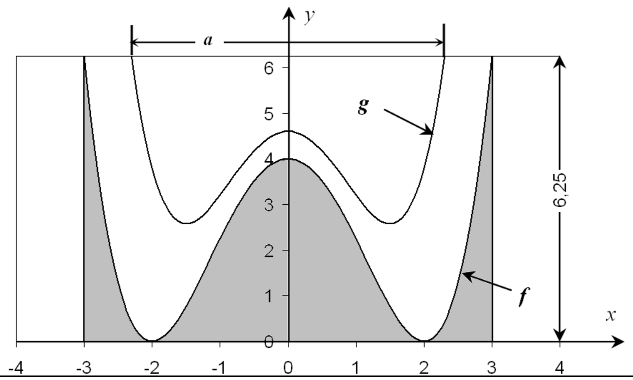
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Teilauf- gaben		BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
1						
1.1	Keine Symmetrie, da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vorhanden	2				
1.2	Nullstellenberechnung $f(x)=0 \Leftrightarrow -x^4+3x^2+2x=0 \Leftrightarrow x(-x^3+3x+2)=0$ $\Leftrightarrow x=0 \;\; oder \;\; -x^3+3x+2=0$ $Nullstelle \;\; x_{N1}=0$	2				
	Aus der Skizze $Nullstelle \;\; x_{N2}=-1$ entnommen und Polynomdivision $(-x^3+3x+2):(x+1)=-x^2+x+2$ durchgeführt		2			
	Die Gleichung $-x^2+x+2=0$ gelöst und die Nullstellen $x_{N3}=-1$ und $x_{N4}=2$ berechnet		1			
1.3	Notwendige Bed. $f'(x)=-4x^3+6x+2=0$	2				
	Aus der Skizze $Extremstelle \;\; x_{E1}=-1$ entnommen und Polynomdivision $(-4x^3+6x+2):(x+1)=-4x^2+4x+2$ durchgef.		2			
	Die Gleichung $-4x^2+4x+2=0$ gelöst und die Extremstellen $x_{E2}\approx 1{,}366$ und $x_{E3}\approx -0{,}366$ berechnet		2			
	Hinr. Bed. $f''(x_E)\neq 0$ geprüft	1				
	$f''(x)=-12x^2+6 \Rightarrow \;\; f''(-1)=-6<0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$ $f''(1{,}366)\approx -16{,}39<0 \qquad \Rightarrow \text{HP}$ $f''(-0{,}366)\approx 4{,}39>0 \qquad \Rightarrow \text{TP}$		3			
	y-Koordinaten berechnet und Punkte angegeben $HP_1(-1\|0)$; $HP_2(1{,}366\|4{,}848)$; $TP(-0{,}366\|-0{,}348)$	5				
	Zwischensumme:	11	11	0		Aufgaben 1.1.bis 1.3

	Zwischensumme:	11	11	0		Aufgaben 1.1.bis 1.3
1.4	Notwendige Bed. $f''(x) = -12x^2 + 6 = 0$ Wendestellen $x_{W1} \approx 0,7071$ und $x_{W2} \approx -0,7071$ berechnet Hinreichende Bed. $f'''(x) = -24x \neq 0$ geprüft $f'''(0,7071) < 0 \Rightarrow$ Links-Rechts-Wendepunkt $f'''(-0,7071) > 0 \Rightarrow$ Rechts- Links-Wendepunkt y-Koordinaten berechnet und Punkte angegeben $WP_1(0,7071;2,644)$ $WP_2=(-0,7071;-0,1642)$	1	2 2 2			
1.5	Breite = 3 LE Höhe = 5,196 LE A =15,588 FE	2	2			
1.6	Normalensteigung $m_N = \frac{-1}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$ Normalengleichung $n(x) = -\frac{1}{2}x$ Einzeichnen der Normalen	1	2 1			
1.7	Schnittpunkt mit der senkrechten Seite $n(-1) = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(-1\middle\|\frac{1}{2}\right)$ Schnittpunkt mit der waagerechten Seite $n(x_S) = -0,348 \Leftrightarrow x_s = 0,696 \Rightarrow Q\left(0,696\middle\|-0,348\right)$ Alternative: Lösungsweg beschrieben Möglichkeit von Schnittpunkten der Normalen mit der senkrechten bzw. waagerechten Rechtecksseite formuliert y_P als Funktionswert von n beschrieben x_Q als Nullstelle von n beschrieben		2	1		
		15	24	1		
	Mögliche BE:	40				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 1**

Aufg. 2	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
2	Ansatz: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$ $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$	1	1			
	Bedingungsgefüge: 1. $f(-1) = -3{,}5$ Punkt $P(-1 \mid -3{,}5)$		1			
	2. $f'(-1) = m_t = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13-(-3{,}5)}{2-(-1)} = 5{,}5$ Anstieg bei $x_1 = -1$		2	1		
	3. $f''(-1) = 2$ 2. Ableitung bei $x_1 = -1$		2			
	Gleichungssystem: $-a - b - c = -3{,}5$ $5a + 3b + c = 5{,}5$ $-20a - 6b = 2$		1			
	Lösungen des gegebenen Gleichungssystems $a = -1; \quad b = 3; \quad c = 1{,}5$		5			
	Funktionsgleichung: $f(x) = -x^5 + 3x^3 + 1{,}5x$	1				
	Summe:	2	12	1		
	Mögliche BE:	15				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 2**

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
3.1	Hauptbedingung HB: Flächeninhalt eines Dreieckes: $A = \frac{1}{2} gh$ $A(x) = \frac{1}{2} x \cdot f(x) = \frac{1}{2} x\left(x^3 - 8x^2 + 16x\right)$ $= \frac{1}{2} x^4 - 4x^3 + 8x^2 = x^2\left(\frac{1}{2} x^2 - 4x + 8\right)$	1		2 2		
3.2	$A'(x) = 2x^3 - 12x^2 + 16x$ $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = 2x^3 - 12x^2 + 16x$ $0 = x^3 - 6x^2 + 8x$ $0 = x\left(x^2 - 6x + 8\right)$ $x_1 = 0 \Rightarrow \textit{Flächeninhalt Null}$ $x_{2/3} = \frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8} = 3 \pm 1$ $x_2 = 4 \Rightarrow \textit{Flächeninhalt Null}$ $x_3 = 2 \quad f(2) = 8$ $a = 2$ und $b = 8$	1 1 1	1 1 1 1			
3.3	$A(x) = \frac{1}{2} x \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 8$ Das Dreieck hat einen Flächeninhalt von $8\ FE$.		3			
	Summe:	4	7	4		
	Mögliche BE:	15				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 3**

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
4.1	$I=\int_{-3}^{3} f\left(x\right)dx = 2\int_{0}^{3} f\left(x\right)dx = 2\left(F\left(3\right)-F\left(0\right)\right)$ wegen Symmetrie		2			
	F ist Stammfunktion von *f*					
	$F\left(x\right)=0{,}05x^5-\frac{2}{3}x^3+4x$	2				
	$F\left(3\right)=6{,}15$ *und* $F\left(0\right)=0 \Rightarrow I=12{,}3$	2				
	 Schraffur			1		
4.2	Ansatz: $g\left(x\right)=6{,}25 \Leftrightarrow 0{,}4x^4-1{,}8x^2-1{,}65=0$		2			
	Substitution $x^2=z$ führt zu der Gleichung					
	$0{,}4z^2-1{,}8z-1{,}65=0 \Leftrightarrow z^2-4{,}5z-4{,}125=0$	2				
	Lösungen: $z_1=-0{,}78109$ (nicht sinnvoll) und $z_2=5{,}28109$	2				
	Resubstitution ergibt $x_{1/2}=\pm\sqrt{5{,}28109}=\pm2{,}29806$		1			
	Also ist $a=4{,}59612\,m\approx4{,}596\,m$		1			
	Zwischensumme:	8	6	1		Aufgaben 4.1 bis 4.2

	Zwischensumme:	8	6	1		Aufgaben 4.1 bis 4.2
4.3	Der gesuchte Flächeninhalt ist $A_{ges} = A_1 - A_2 - A_3$, *wobei* $A_1 =$ Flächeninhalt des Rechtecks von -3 bis 3 der Höhe 6,25 $= 37{,}5$ $A_2 = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 12{,}3$ (s.o.) *und* $A_3 =$ Inhalt der Fläche zwischen dem Graph von g und der Gerade h mit $h(x) = 6{,}25$ $A_3 \approx 2\left\vert \int_0^{2{,}298} d(x)\,dx \right\vert = 2\left\vert D(2{,}298) - D(0) \right\vert$	4	3	1		
	d ist die Differenzfunktion von g und h $d(x) = h(x) - g(x) = -0{,}4x^4 + 1{,}8x^2 + 1{,}65$		2			
	D ist die Stammfunktion von d $D(x) = -0{,}08x^5 + 0{,}6x^3 + 1{,}65x$	1				
	$D(2{,}297) \approx 5{,}946$ und $D(0) = 0 \Rightarrow A_3 \approx 11{,}892$	3				
	$\Rightarrow A_{ges} \approx 13{,}308$	1				
	Das Logo hat einen Flächeninhalt von ca. 13,308 m².					15 BE
	Summe:	17	11	2	▼	
	Mögliche BE:	30				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 4**