Abschlussprüfung Fachoberschule Herbst 2012
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 **/40**

Die Flugbahn eines Basstölpels (s. Bild), der von seinem Nistplatz auf einem 20m hohen Felsplateau über die Klippe fliegt, um im Wasser nach Fischen zu jagen, kann annähernd durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 10{,}24x + 20{,}48\,;\; x \in \mathrm{IR}$$

beschrieben werden. Dabei gilt für die x-Achse: $1\,\mathrm{LE} \mathrel{\hat{=}} 10\mathrm{m}$, die Felskante liegt bei $x = 0$. Gültig ist die Funktion vom Nistplatz bei $x \approx -2{,}4$ bis $x = 4$.

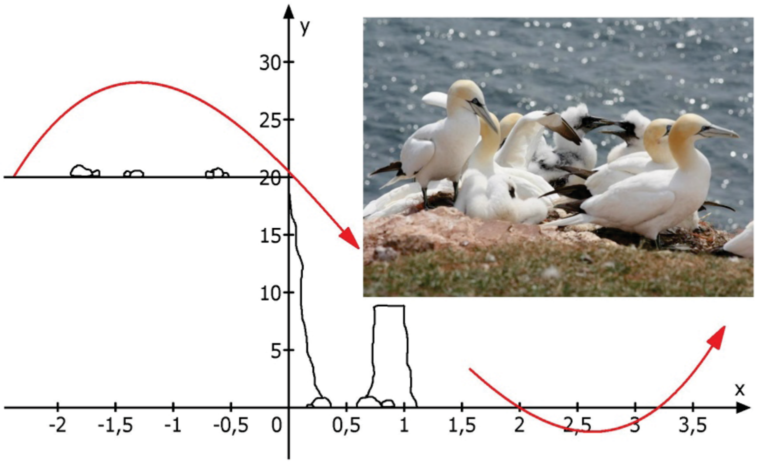


Foto: H. Niebel/J. Lehnen

1.1 Ermitteln Sie rechnerisch, wie weit von der Felskante entfernt der Vogel ins Wasser ein-, und wo er wieder auftaucht. **/8**

1.2 Bestimmen Sie die Höhe, in der der Vogel die Felskante überfliegt. **/2**

1.3 Berechnen Sie, wie tief der Tölpel ins Wasser eintaucht und wie groß seine maximale Flughöhe bezogen auf den Meeresspiegel ist. **/10**

1.4 Bestimmen Sie den Punkt, in dem die Flugbahn des Vogels während des Sinkfluges am steilsten ist. **/5**

1.5 Ein einzelner Fels ragt 10m von der Felskante entfernt 9m hoch aus dem Wasser. Prüfen Sie, ob der Vogel den Fels überfliegen kann, ohne ihn zu berühren. **/3**

1.6 Berechnen Sie den Winkel α, unter dem der Vogel ins Wasser eintaucht.
Hinweis: Achten Sie hierbei auf die Skalierung. **/5**

1.7 Der Vogel ist direkt aus seinem Nest heraus gestartet. Berechnen Sie den Abstand des Nestes von der Felskante mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahrens (z. B. Newtonsches Näherungsverfahren). Führen Sie zwei Iterationsschritte durch und runden Sie Ihr Ergebnis entsprechend der gefundenen Genauigkeit. **/7**

2 /15

Der Graph der ganzrationalen Funktion vierten Grades besitzt bei $W(0\,|\,0)$ einen Wendepunkt. Die x-Achse ist Wendetangente in diesem Wendepunkt. Ein weiterer Wendepunkt des Graphen der Funktion f ist $W(1\,|\,-1)$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ***ersatzweise*** *das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion* f.

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0\ ;\ \ x \in \mathrm{IR}$$

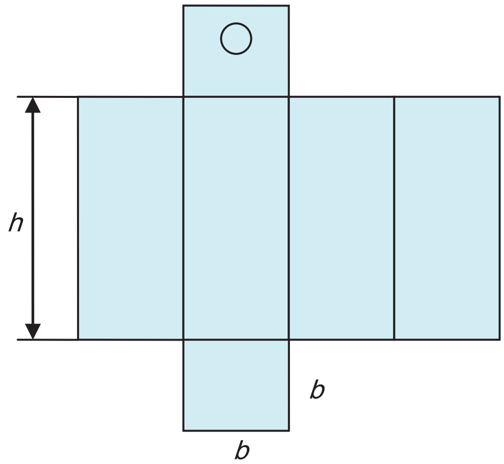
$$\begin{array}{rcccccccccc}
0 & = & & & & & & & & & a_0 \\
0 & = & & & & & & & a_1 & & \\
0 & = & & & & & 2a_2 & & & & \\
-3 & = & 3a_4 & + & 3a_3 & + & 3a_2 & + & 3a_1 & & \\
0 & = & 24a_4 & + & 12a_3 & + & 4a_2 & & & &
\end{array}$$

3 /15

Das Volumen eines Fruchtsafts beträgt 1 Liter (1000 cm^3). Um das Aufschütteln des Saftes zu ermöglichen, liegt das Volumen der Verpackung (Tetra Pack®) 10% über dem Volumen des Saftes.

Die Verpackung wird aus einem Stück beschichteten Karton (Kantenlängen: *b*, *h*) hergestellt (siehe Abbildung).

Zur Vereinfachung werden die Falzungen vernachlässigt und nur die Außenflächen betrachtet.



3.1 Berechnen Sie das Volumen V der Fruchtsaftpackung in cm^3. /1

3.2 Zeigen Sie, dass *O* eine Zielfunktion ist, mit der der Oberflächeninhalt des Fruchtsaftkartons berechnet werden kann: /6

$$O(b) = 2b^2 + \frac{4400}{b} \quad ; \quad D_O =]0;\infty[$$

$$(1\,\text{LE} \triangleq 1\,\text{cm} \quad \text{bzw.} \quad 1\,\text{VE} \triangleq 1\,\text{cm}^3)$$

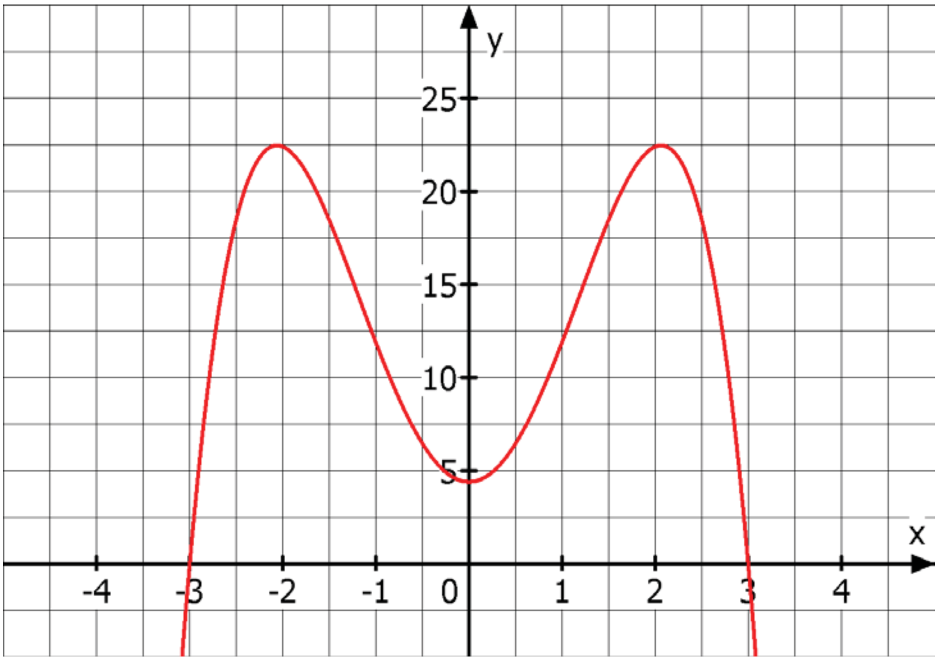
3.3 Ermitteln Sie diejenigen Werte für *h* und *b* , für die der Materialverbrauch bei der Verpackung minimal wird. /6

3.4 Berechnen Sie den Oberflächeninhalt für diese optimierte Verpackung. /2

4 **/30**

Gegeben sei die Funktion f mit der Funktionsgleichung:

$f(x) = -x^4 + 8,5x^2 + 4,5$; $x \in \mathrm{IR}$ und den Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$.



4.1 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_{-3}^{3}(-x^4 + 8{,}5x^2 + 4{,}5)dx$ und erläutern Sie, ob der gefundene Wert mit dem Inhalt der vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossenen Fläche übereinstimmt. Begründen Sie Ihre Aussage. **/4**

4.2 Gegeben sei nun außerdem die Funktion g mit $g(x) = -2,75x^2 + 24,75$; $x \in \mathrm{IR}$. Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von g mit den Koordinatenachsen sowie dem Graphen von f und zeichnen Sie ihn in das obige Koordinatensystem ein. **/12**

4.3 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen von f und g vollständig eingeschlossen wird. **/9**

4.4 Bestimmen Sie den jeweiligen prozentualen Anteil der einzelnen Teilflächen an der von den beiden Graphen eingeschlossenen Gesamtfläche. **/5**

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	Nullstellen: $f(x_N)=0$ Die erste Lösung kann der Zeichnung entnommen oder geraten werden: $x_1=2$ Polynomdivision: $(x^3-2x^2-10{,}24x+20{,}48):(x-2)=x^2-10{,}24$; $\Rightarrow x_2=3{,}2$; $x_3=-3{,}2$. Im Wasser liegen nur x_1 und x_2, wegen der Skalierung $1LE=10m$ taucht der Vogel also bei 20*m* unter und bei 32*m* wieder auf.	1 1 1	4 1	
1.2	$f(0)=20{,}48$; bezogen auf den Meeresspiegel also 20,48*m*; bezogen auf die Felskante 0,48*m*.	2		
1.3	Gesucht sind die Extrema der Bahnkurve. Notw. und hinr. Bed.: $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)\neq 0$; $f'(x_E)=3x^2-4x-10{,}24=0$; daraus ergeben sich die Extremstellen $x_{E1}\approx -1{,}31$ und $x_{E2}\approx 2{,}65$; $f''(x)=6x-4$ $f''(-1{,}31)=-11{,}86<0\Rightarrow HP$ $f''(2{,}65)=11{,}9>0\Rightarrow TP$ Flughöhe und Tauchtiefe entsprechen den Funktionswerten der Extremstellen: $f(-1{,}31)\approx 28{,}21$; $f(2{,}65)\approx -2{,}09$ Die maximale Flughöhe beträgt 28,21*m*, die max. Tauchtiefe beträgt 2,09m.	2 2	1 1 1 2 1	
1.4	Gesucht ist hier der Wendepunkt; notw. und hinr. Bed.: $f''(x_W)=0$ und $f'''(x_W)\neq 0$. $f''(x_W)=6x-4=0\Rightarrow x_W=\frac{2}{3}$ $f'''(\frac{2}{3})=6>0\Rightarrow$ rechts-links-Wechsel $f(\frac{2}{3})\approx 13{,}06\Rightarrow P(\frac{2}{3}\mid 13{,}06)$ bzw. bei Berücksichtigung der Skalierung: $P(6{,}67m\mid 13{,}06m)$	1 1	2 1	
1.5	$f(1)=9{,}24m$; der Vogel überfliegt den Fels.	2	1	
1.6	$m_t=\tan\alpha\Rightarrow \arctan(m_t)=\alpha$ $f'(2)=-6{,}24$ die x-Achse ist um Faktor 10 gestaucht, gesucht ist also $\arctan(-0{,}624)=-31{,}96°$, der Vogel taucht unter einem Winkel von etwa 32° ins Wasser ein.		1 1 1	2
1.7	Die Höhe des Nestes entspricht dem Funktionswert $f(x_0)=20$, zu lösen ist also die Gleichung $20=x^3-2x^2-10{,}24x+20{,}48$ bzw. $0=x^3-2x^2-10{,}24x+0{,}48$	1		

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
	Newtonsche Näherungsformel:	1		
	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit			1
	$x_0 = -2,4$ (s. Einleitung),		1	
	$f(x) = x^3 - 2x^2 - 10,24x + 0,48$ sowie			
	$f'(x) = 3x^2 - 4x - 10,24$		1	
	Damit wird $x_1 \approx -2,38269$ und $x_2 \approx -2,38252$; die ersten drei Nachkommastellen stimmen überein,			1
	entsprechend gerundet ergibt sich $x \approx -2,383$; das Nest ist also etwa 23,38m von der Felskante entfernt.		1	
	Summe	15	21	4
	mögliche BE	40		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
auf-
gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2</td><td>Ansatz:
$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$
$f'(x)=4a_4x^3+3a_3x^2+2a_2x+a_1$
$f''(x)=12a_4x^2+6a_3x+2a_2$

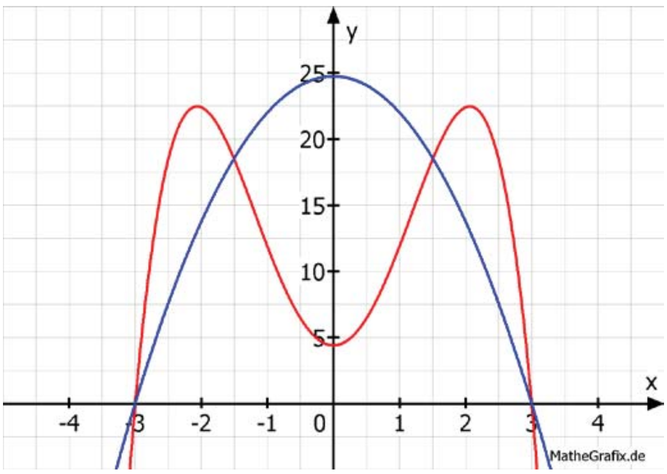
Bedingungsgefüge:
1. $f(0)=0$ $(a_0=0)$
2. $f'(0)=0$ (Steigung der Tangente)
3. $f''(0)=0$ (Wendepunkt bei $W_1(0\,|\,0)$)
4. $f(1)=-1$ (Wendepunkt bei $W_2(1\,|\,-1)$)
5. $f''(1)=0$ (Wendepunkt bei $W_2(1\,|\,-1)$)</td><td>1
1
1

1</td><td>
1
1
1
1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Gleichungssystem:
<table>
<tr><td>I.</td><td>0</td><td>=</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>a_0</td></tr>
<tr><td>II.</td><td>0</td><td>=</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>a_1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>III.</td><td>0</td><td>=</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$2a_2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IV.</td><td>-1</td><td>=</td><td>a_4</td><td>+</td><td>a_3</td><td>+</td><td>a_2</td><td>+</td><td>a_1</td><td>+</td><td>a_0</td></tr>
<tr><td>V.</td><td>0</td><td>=</td><td>$12a_4$</td><td>+</td><td>$6a_3$</td><td>+</td><td>$2a_2$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Lösen des Gleichungssystems
(ebenso Ersatz-LGS)

Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS):
$a_4=1; a_3=-2; a_2=0; a_1=0; a_0=0$</td><td>

1</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Für die Funktionsgleichung gilt:
$f(x)=x^4-2x^3$</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>6</td><td>9</td><td>0</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">15</td></tr>
</table>

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Volumen der Fruchtsaftpackung:	1		
	$V = 1000cm^3 \cdot 1{,}1 = 1100cm^3$			
3.2	Bestimmung der Zielfunktion:			
	$O = 2b^2 + 4bh$			
	$O(b,h) = 2b^2 + 4bh \quad \Rightarrow$ Hauptbedingung	1		
	$V = b^2 h \quad \Rightarrow V = 1100$			1
	$1100 = b^2 h$			
	daraus folgt:		1	
	$h = \frac{1100}{b^2} \quad ; \quad Nebenbedingung$	1		
	daraus folgt:			
	$O(b) = 2b^2 + 4b \cdot \frac{1100}{b^2} = 2b^2 + \frac{4400}{b} \quad ; \quad Zielfunktion$		2	
3.3	Bestimmung von h und b:			
	$O'(b) = 4b - \frac{4400}{b^2}$	1		
	$O''(b) = 4 + \frac{8800}{b^3}$	1		
	$O'(b_E) = 0\,;\, 4b_E - \frac{4400}{b_E^{\;2}} = 0\,;\, b_E \neq 0$			
	$4b_E^{\;3} - 4400 = 0\,;\, b_E^{\;3} = 1100\,;\, b_E = \sqrt[3]{1100} \approx 10{,}3$		1	
	$O''(\sqrt[3]{1100}) > 0\,;\, Minimum$		1	
	$O(\sqrt[3]{1100}) = 639{,}36$	1		
	$h = \frac{1100}{b^2} \approx 10{,}3$			
	Der Inhalt der Oberfläche ist minimal für $b = 10{,}3cm$ und $h = 10{,}3cm$.	1		
3.4	$O(\sqrt[3]{1100}) = 639{,}36$	2		
	Der Oberflächeninhalt beträgt $639{,}36cm^2$.			
	Summe	9	5	1
	mögliche BE		15	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	$\int_{-3}^{3}(-x^4+8,5x^2+4,5)dx=\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{17}{6}x^3+4,5x\right]_{-3}^{3}\approx 82,8$		3	
	Der Wert des Integrals entspricht dem Flächeninhalt, da die Grenzen des Integrals mit den Nullstellen übereinstimmen (s. Skizze) und auf dem betrachteten Intervall keine Vorzeichenwechsel zu finden sind.			1
4.2	Achsenschnittpunkte des Graphen von g:			
	y-Achse:	1		
	$g(0)=24,75 \Rightarrow S_y(0\,\|\,24,75)$	1		
	x-Achse:			
	$f(x_N)=0=-2,75{x_N}^2+24,75$	1		
	$\Rightarrow x_{1,2}=\pm 3$	1		
	$\Rightarrow S_{x1}(-3\,\|\,0)$; $S_{x2}(3\,\|\,0)$			
	Schnittpunkte der Graphen von f und g:			
	$f(x_S)=g(x_S)$	1		
	$-x^4+8,5x^2+4,5=-2,75x^2+24,75$			
	$0=x^4-11,25x^2+20,25$		1	
	Substitution liefert $x_{1,2}=\pm 3$ und $x_{3,4}=\pm 1,5$;		1	
	mit $f(\pm 3)=0$ und $f(\pm 1,5)=18,5625\approx 18,56$ ergibt sich	1		
	$S_{1,2}(\pm 3\,\|\,0)$ und $S_{3,4}(\pm 1,5\,\|\,18,6)$.			
	Skizze: 		2 2	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.3	Zu berechnen ist unter Berücksichtigung der Symmetrie: $A_{ges} = 2\cdot(A_1 + A_2)$ wobei	1		
	$A_1 = \int_0^{1,5} (x^4 - 11,25x^2 + 20,25)dx$	1		
	$= \left[\frac{1}{5}x^5 - 3,75x^3 + 20,25x\right]_0^{1,5}$			1
	$= 19,2375 FE$ und		1	
	$A_2 = \left\|\int_{1,5}^{3} (x^4 - 11,25x^2 + 20,25)dx\right\|$		1	1
	$= \left\|\left[\frac{1}{5}x^5 - 3,75x^3 + 20,25x\right]_{1,5}^{3}\right\|$		1	
	$= \|-11,1375\| = 11,1375 FE$	1		
	$A_{ges} = 2\cdot(19,2375 + 11,1375) = 2\cdot 30,375 = 60,75 FE$	1		
4.4	Die drei Teilflächen haben einen Flächeninhalt von $2\cdot 19,2375 = 38,475 FE$ bzw. $11,1375 FE$.	1		
	$60,75 \mathrel{\hat{=}} 100\%$ $38,475 \mathrel{\hat{=}} x\%$,		1 1	
	per Dreisatz ergibt sich für die mittlere Fläche ein Anteil von $63,33\%$, die Differenz zu 100% beträgt $36,67\%$; d.h.	1		
	für die beiden Außenflächen bleiben jeweils $18,33\%$.	1		
	Summe	13	14	3
	mögliche BE	30		