Abschlussprüfung Fachoberschule 2011 (Mathematik)
Aufgabenvorschlag B

1 **/40**

Auf der Berliner Stadtautobahn A100 / Autobahndreieck Charlottenburg wurde über einen bestimmten Zeitraum die Staulänge l in Abhängigkeit von der Zeit t gemessen. Die Staulänge $l \geq 0$ kann näherungsweise durch die Funktion f mit

$f(t) = -\frac{1}{6}t^4 + 2t^2 - 1$; $t \in D_f$ dargestellt werden.

1 Längeneinheit ≙ 1 km, 1 Zeiteinheit ≙ 1 h

Foto: J. Lehnen

1.1 Berechnen Sie mit Hilfe einer Nullstellenberechnung die Gesamtdauer des Staus. **/7**

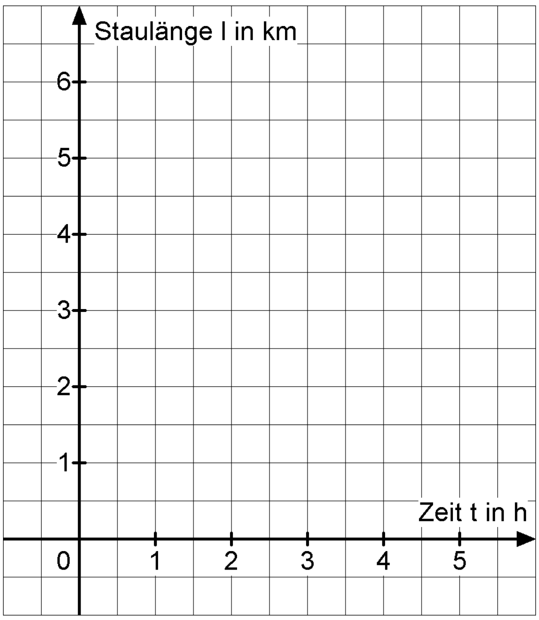
1.2 Berechnen Sie die Länge des Staus zum Zeitpunkt $t = 3$. Berechnen Sie, wie stark die Staulänge zu diesem Zeitpunkt pro Stunde steigt bzw. fällt. **/4**

1.3 Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Staulänge am größten war. Berechnen Sie, wie lang der Stau zu diesem Zeitpunkt war. **/6**

1.4 Bestimmen Sie den Wendepunkt des Graphen von f und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wendepunktes in Hinblick auf die Tendenz der Staulänge. **/7**

1.5 Bei Verkehrsdurchsagen werden nur noch Staulängen ab 1km Länge durchgegeben. Wann hat der Stau genau diese Länge und wieviel Zeit vergeht zwischen diesen beiden Zeitpunkten? **/9**

1.6 Zeichnen Sie den Graphen von f in das vorgegebene Koordinatensystem. **/4**



1.7 Beschreiben Sie anhand Ihrer graphischen Darstellung mit eigenen Worten den zeitlichen Verlauf des Staus. **/3**

2 /15

Die gesuchte Funktion f hat den Grad 3. Die Stelle $x_W = 2$ ist eine Wendestelle.

Die Orthogonale (Normale) im Wendepunkt $W(2 \mid f(2))$ hat die Steigung $m_O = \frac{1}{2}$.

Der Funktionsgraph hat im Punkt $H(3 \mid 2)$ ein lokales Maximum.

2.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion. **/12**

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie ersatzweise das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ der Funktion f.

$$\begin{aligned} 4 &= 54a_3 + 18a_2 + 6a_1 + 2a_0 \\ 0 &= 81a_3 + 18a_2 + 3a_1 \\ -1 &= 6a_3 + 2a_2 + 0{,}5a_1 \\ 0 &= 6a_3 + a_2 \end{aligned}$$

2.2 Beschreiben Sie allgemein, wie Sie die Funktionsgleichungen der Orthogonale und der Tangente im Wendepunkt $W(2 \mid f(2))$ bestimmen würden. **/3**
(HINWEIS: Das können Sie auch tun, wenn Sie in 2.1 keine Funktionsgleichung bestimmen konnten.)

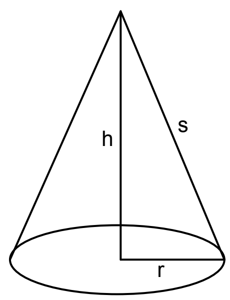
---

3 /15

Für eine Messehalle wird eine Werbefläche in Form eines geraden Kreiskegels geplant, der an zentraler Stelle auf dem Boden stehen soll.

Die Seitenlinie s des Kegels ist mit 3,6 m fest vorgegeben (siehe Skizze).

Der Kegel ist so zu gestalten, dass sein Volumen möglichst groß ist.



3.1 Weisen Sie nach, dass die Zielfunktion zur Bestimmung des Volumens wie folgt lautet: $V(h) = -\frac{\pi}{3}h^3 + 4{,}32\pi h$ **/6**

3.2 Wie sind Radius und Höhe zu wählen, wenn das Volumen des Kegels möglichst groß werden soll? **/7**

3.3 Berechnen Sie das Volumen dieses Kegels. **/1**

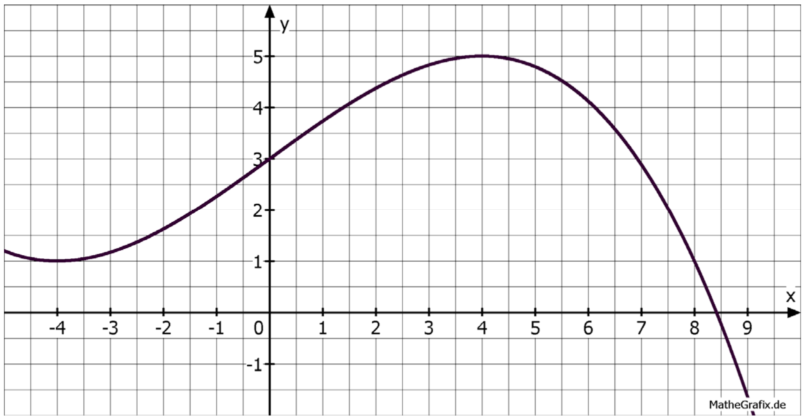
3.4 Bestimmen Sie die Größe der Werbefläche. **/1**

4 /30

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{4}x + 3 \; ; \; x \in \mathbb{R}$$

und deren Graph.



4.1 Begründen Sie rechnerisch, dass die Funktion f im Intervall $[8;9]$ eine Nullstelle haben muss. **/8**

Berechnen Sie diese Nullstelle in 3 Iterationsschritten durch ein geeignetes Näherungsverfahren.

Machen Sie eine Aussage über die Genauigkeit Ihrer Lösung.

4.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A_1, die der Graph der Funktion f mit der x-Achse und der senkrechten Geraden an der Stelle $x = -4$ vollständig einschließt. **/6**

Rechnen Sie mit dem in 4.1 bestimmten Näherungswert.

Wenn Sie den Näherungswert nicht bestimmen konnten, lesen Sie die Nullstelle aus dem gegebenen Graphen ab.

4.3 Für welches $b > -4$ gilt: $\int_{-4}^{b} f(x)dx = 24$? **/7**

Berechnen Sie eine Lösung.

Begründen Sie die Existenz einer zweiten Lösung für b und beschreiben Sie die Lage.

4.4 Gegeben ist die Gerade g mit $g(x) = 3$. **/9**

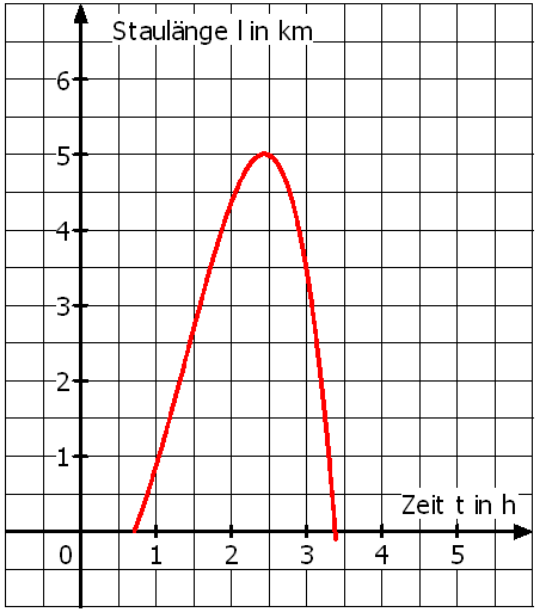
Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Funktionen f und g und bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A_2, die von den beiden Graphen im 1. Quadranten eingeschlossen wird.

Abschlussprüfung Fachoberschule 2011
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
1.1	Nullstellen von f: $f(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}t^4+2t^2-1=0$	1				
	Substitution $z=t^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}z^2+2z-1=0 \Leftrightarrow z^2-12z+6=0$		2			
	$z_{1/2}=6\pm\sqrt{\frac{144}{4}-6}=6\pm\sqrt{30} \Rightarrow z_1=6+\sqrt{30}\,;\, z_2=6-\sqrt{30}$		1			
	$t_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}\approx\pm 3{,}39\,;\, t_{3/4}=\pm\sqrt{z_2}\approx\pm 0{,}72$ t_2 und t_4 sind nicht zu berücksichtigen	2				
	Gesamtdauer des Staus: $t_{gesamt}=t_1-t_3=2{,}66\ h$ Der Stau hat eine Gesamtdauer von 2,67 Stunden = 2h + 40min.	1				
1.2	$f(3)=-\frac{1}{6}\cdot 3^4+2\cdot 3^2-1=3{,}5$	1				
	Zum Zeitpunkt $t=3$ beträgt die Staulänge $l=3{,}5km$ Änderungsrate des Staus $f'(3)$: $f'(t)=-\frac{4}{6}t^3+4t \Rightarrow f'(3)=-\frac{4}{6}\cdot 3^3+4\cdot 3=-6$ Die Änderungsrate beträgt: $f'(3)=-6\frac{km}{h}$		3			
1.3 **Forts. ↓**	Extremum berechnen $f'(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{6}t^3+4t=0 \Leftrightarrow t\left(-\frac{2}{3}t^2+4\right)=0$ $t_1=0\ (nicht\ zu\ berücksichtigen)$	1	1			
	Zwischensumme Aufg. 1.1 bis 1.3 (1.Teil):	6	7	0		Übertrag ↴

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
	↳ Übertrag:	6	7	0		
Forts. 1.3	$-\frac{2}{3}t^2+4=0 \Leftrightarrow t^2=6 \Leftrightarrow t_{2/3}=\pm\sqrt{6}$ $t_2=\sqrt{6}\approx 2,449;\ t_3=-\sqrt{6}$ (*nicht zu berücksichtigen*)		2			
	$f''(t)=-2t^2+4 \Rightarrow f''\left(\sqrt{6}\right)=-8<0 \Rightarrow$ *Hochpunkt* $f\left(\sqrt{6}\right)=5 \Rightarrow$ Staulänge zum Zeitpunkt $t=\sqrt{6}$ betrug $l=5km$.		2			
1.4	Wendepunkt berechnen $f''(t)=0 \Leftrightarrow -2t^2+4=0 \Leftrightarrow t_{1/2}=\pm\sqrt{2}$ $t_1=\sqrt{2};\ t_2=-\sqrt{2}$ (*nicht zu berücksichtigen*)	3				
	$f'''(t)=-4t \Rightarrow f'''\left(\sqrt{2}\right)=-4\sqrt{2}<0 \Rightarrow$ *Wendepunkt* $f\left(\sqrt{2}\right)=2,\overline{3} \Rightarrow W\left(\sqrt{2}\,\middle\vert\,2,\overline{3}\right)$		2			
	z.B. Die Staulängenänderung ist hier am größten oder Nach dem Wendepunkt wird die Zunahme des Staus geringer			2		
1.5	$f(t)=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}t^4+2t^2-1=1 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}t^4+2t^2-2=0$ Substitution: $z=t^2 \Rightarrow -\frac{1}{6}z^2+2z-2=0$ $z^2-12z+12=0 \Leftrightarrow z_{1/2}=6\pm\sqrt{\frac{144}{4}-12}=6\pm\sqrt{24}$ $\Rightarrow t_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}\approx\pm 3,301; t_{3/4}=\pm\sqrt{z_2}\approx\pm 1,049$ Gesamtdauer der Verkehrsdurchsagen: $t_{gesamt}=t_1-t_3=2,252\ h$	4	2 1 2			
	Zwischensumme Aufg. 1.1 bis 1.5:	13	18	2		Übertrag ↴

Aufg. 1	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
	↳ Übertrag:	13	18	2		
1.6	graphische Darstellung 	4				
1.7	beispielhaft: 1) Der Stau beginnt 0,72 h ($\approx$43 min) nach Start der Zeitmessung. 2) Der Stau steigt sehr schnell an und erreicht eine maximale Länge von 5 km. 3) Insgesamt beträgt die Zeitdauer des Staus 2,66h ($\approx$2h + 40min).	3				
	Summe:	20	18	2	▾	
	Summe:	40				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 1**

Aufg. 2	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III	Erbrachte Teilleistung BE	Erbrachte Teilleistung Begutachtung
2.1	Ansatz: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $f'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ $f''(x) = 6a_3x + 2a_2$	1				
	Bedingungsgefüge: 1. $x_W = 2$ ist Wendestelle: $f''(2) = 0 = 12a_3 + 2a_2$	1				
	2. $m_T = -2$ in W: $f'(2) = -2 = 12a_3 + 4a_2 + a_1$		2			
	3. H(3|2) ist Punkt auf G_f: $f(3) = 2 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0$	1				
	4. H(3|2) ist Hochpunkt: $f'(3) = 0 = 27a_3 + 6a_2 + a_1$	1				
	Gleichungssystem: $2 = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + a_0$ $0 = 27a_3 + 6a_2 + a_1$ $-2 = 12a_3 + 4a_2 + a_1$ $0 = 12a_3 + 2a_2$		1			
	$a_3 = \frac{2}{3}$; $a_2 = -4$; $a_1 = 6$; $a_0 = 2$		4			
	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x + 2$	1				
2.2	Das Verfahren muss sinngemäß so beschrieben werden: Aus W und m_T folgt $y_W = m_Tx_W + b_T \Rightarrow b_T = y_W - m_Tx_W$ Aus W und m_O folgt $y_W = m_Ox_W + b_O \Rightarrow b_O = y_W - m_Ox_W$		3			
	Summe:	5	10	0		
	Summe:	15				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 2**

Aufg. 3	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
3.1	HB: $V(r,h)=\frac{1}{3}\pi r^2 h$		1			
	NB: $s^2=r^2+h^2$ $r^2=s^2-h^2=3{,}6^2-h^2$		1 1			
	ZF: $V(h)=\frac{1}{3}\pi(s^2-h^2)h=\frac{3{,}6^2}{3}\pi h-\frac{1}{3}\pi h^3$ $V(h)=-\frac{1}{3}\pi h^3+4{,}32\pi h$		2	1		
3.2	$V'(h)=-\pi h^2+4{,}32\pi=0$ $h_{1/2}=\pm\sqrt{4{,}32}\approx\pm 2{,}08$ Die negative Lösung ist nicht sinnvoll i.S.d.A.	1	2			
	$V''(h)=-2\pi h$ $V''(2{,}08)=-13{,}07<0$ => Maximum bei h_1		1 1			
	$r_1^2=s^2-h_1^2=3{,}6^2-2{,}08^2 \Rightarrow r_1=2{,}94$ Der Radius muss ca. 2,94 m betragen.		2			
3.3	$V(r,h)=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1=18{,}83$ Das Volumen beträgt ca. 18,83 m^3.	1				
3.4	$A=\pi r_1 s=33{,}25$ Die Größe der Werbefläche beträgt ca. 33,25 m^2.	1				
	Summe:	3	11	1	▾	
	Summe:	15				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 3**

<table>
<tr><th rowspan="2">Aufg. 4</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th><th colspan="2">Erbrachte Teilleistung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th><th>BE</th><th>Begutachtung</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Es gibt eine Nullstelle im Intervall [8;9], da ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte im Intervall auftritt, denn $f(8)=1$ und $f(9)=-1,6406$</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche Lösung mit dem Newtonschen Näherungsverfahren
$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
$f'(x)=-\frac{3}{64}x^2+\frac{3}{4}$</td><td>1
1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><table>
<tr><th>x_n</th><th>$f(x_n)$</th><th>$f'(x_n)$</th><th>x_{n+1}</th></tr>
<tr><td>8,5</td><td>-0,220703</td><td>-2,636719</td><td>8,416296</td></tr>
<tr><td>8,416296</td><td>-0,002782</td><td>-2,570346</td><td>8,415214</td></tr>
<tr><td>8,415214</td><td>-0,0000005</td><td>-2,569492</td><td>8,415214</td></tr>
</table></td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Die Nullstelle liegt bei. $x_n\approx 8,415214$.
Genauigkeit: z. B. 6 Nachkommastellen stimmen überein.</td><td></td><td></td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>Ansatz für Flächeninhalt:
$A_1=\int_{-4}^{8,4152}f(x)dx=\int_{-4}^{8,4152}(-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{4}x+3)dx$
Stammfunktion: $F(x)=-\frac{1}{256}x^4+\frac{3}{8}x^2+3x$
$A_1=F(8,4152)-F(-4)=32,2122-(-7)=39,2122FE$</td><td>1

2</td><td>1
1
1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Zwischensumme Aufg. 4.1 bis 4.3:</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td></td><td>Übertrag ↴</td></tr>
</table>

Aufg. 4	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
	↳ Übertrag:	6	6	2		
4.3	Aus $\int_{-4}^{b} f(x)dx = 24$ folgt					
	$F(b)-F(-4)=24 \Leftrightarrow -\frac{1}{256}b^4+\frac{3}{8}b^2+3b-17=0$		2			
	Ermittlung der ersten Lösung b = 4 durch ein geeignetes Verfahren, z.B. durch Probieren in Kombination mit Flächenabschätzung	2				
	Eine weitere Lösung für b müsste größer als 8,4152 (siehe 4.1) sein			1		
	und $39{,}2122+\int_{8{,}4152}^{b} f(x)dx=24$ (Der Integralwert ist negativ, da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt.)			2		
4.4	a) Schnittpunkte berechnen: Aus $f(x)=g(x)$ folgt $-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{4}x=x(-\frac{1}{64}x^2+\frac{3}{4})=0$	2				
	$x_1=0; x_2=\sqrt{48}\approx 6{,}93$ und $x_3=-\sqrt{48}\approx -6{,}93$		2			
	Schnittpunkte: $P_1(0/3); P_2(6{,}93/3); P_3(-6{,}93/3)$	1				
	b)Flächenberechnung: $A_2=\int_0^{\sqrt{48}}(f(x)-g(x))dx=\int_0^{\sqrt{48}}(-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{4}x)dx$		2			
	Stammfunktion: $D(x)=-\frac{1}{256}x^4+\frac{3}{8}x^2$	1				
	$A_2=D(\sqrt{48})=9FE$		1			
	Summe:	12	13	5		
	Summe:	30				**Erreichte BE Endsumme Aufgabe 4**