1 /40

Das Robert-Koch-Institut in Berlin hat den Verlauf der Darmerkrankung „EHEC[1]“ (siehe Bild) untersucht. Die Zahl der Erkrankten A kann näherungsweise durch folgende Funktionsgleichung dargestellt werden:

$$A(t) = -\frac{1}{250}t^3 + \frac{1}{10}t^2 \quad ; t \in D_A$$

Die Erfassung der Erkrankten beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

t (Zeit in Tagen, Werte sind ggf. auf zwei Nachkommastellen anzugeben)

1.1 Berechnen Sie, wie viele Personen am zehnten Tag ($t = 10$) erkrankt sind. **/2**

1.2 Berechnen Sie den Tag, an welchem die Epidemie vorbei ist. **/5**

1.3 Berechnen Sie den Tag, an dem die meisten Personen erkrankt sind.
Berechnen Sie weiter, wie viele Personen an diesem Tag erkrankt sind. **/10**

1.4 Berechnen Sie, an welchem Tag sich die Zahl der Erkrankten am stärksten änderte. **/4**

1.5 Berechnen Sie den exakten Zeitpunkt, an welchem noch kurz vor Ende der Epidemie 2 Personen erkrankt waren. Verwenden Sie hierzu ein geeignetes Näherungsverfahren (z.B. Newtonverfahren, Startwert $t = 24$). **/7**

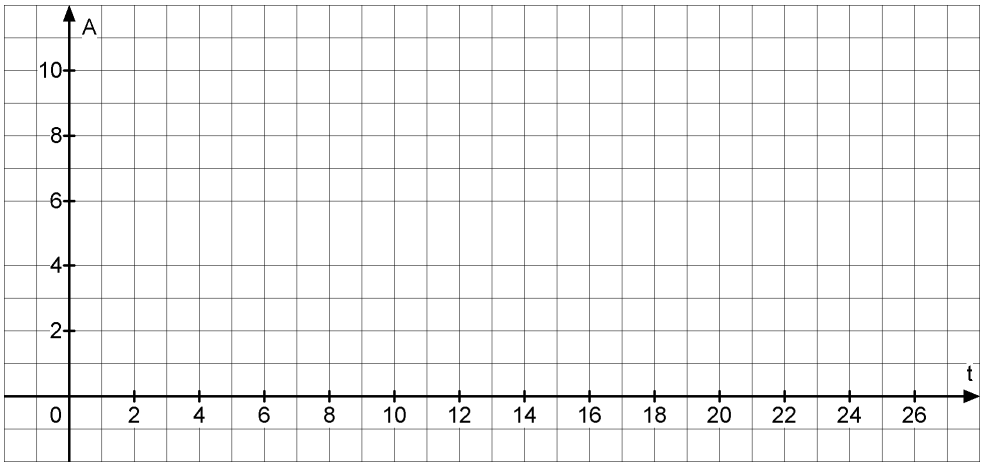
1.6 Zeichnen Sie den graphischen Verlauf der Epidemie in das nachstehende Koordinatensystem. **/4**

1.7 Berechnen Sie, wann die Erkrankungsrate 0,5 Erkrankungen/Tag beträgt. **/8**

→ Fortsetzung nächste Seite →

[1] **Enterohämorrhagische *Escherichia coli* (EHEC)**

graphische Darstellung zu 1.6



2 **/15**

Der Graph einer Funktion f dritten Grades besitzt bei $W(1|1)$ einen Wendepunkt und wird an der Stelle $x_0 = 2$ von der Geraden mit der Funktionsgleichung $g(x) = x + 2$ berührt.

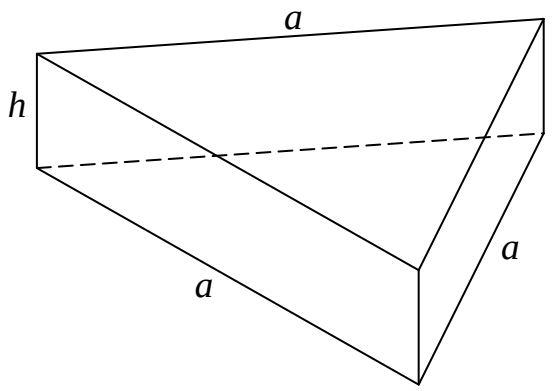
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie <u>ersatzweise</u> das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *der Funktion* f.

2	=	4a	+	2b	+	1c	+	0,5d
2	=	24a	+	8b	+	2c		
3	=	a	+	b	+	c		
0	=	3a	+	b				

3 /15

Eine Schokoladenfabrik möchte eine Pralinenschachtel in Form eines gleichseitigen Dreiecks entwerfen (s. Skizze). Das Volumen dieser Schachtel ergibt sich aus den zu verpackenden 250*cm*³ Pralinen und dem Hohlraum zwischen den Pralinen, der mit 182*cm*³ angegeben wird. Ein Designer erhält nun den Auftrag, die Schachtel so zu dimensionieren, dass der Materialverbrauch für die Schachtel möglichst gering gehalten wird. Klebefalze und Laschen sollen dabei vernachlässigt werden.



Rechnen Sie ohne Einheiten:

3.1 Zeigen Sie, dass der Inhalt der Oberfläche der Schachtel durch folgende (Ziel-) Funktion beschrieben werden kann: **/7**

$$A(a) = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{5184}{\sqrt{3} \cdot a}$$

(1 Längeneinheit ≙ *1* cm *bzw.* *1 Volumeneinheit* ≙ *1* cm^3 *.)*

3.2 Ermitteln Sie diejenigen Werte für a und h, für die der Materialverbrauch bei der Schachtelherstellung minimal wird. **/6**

3.3 Berechnen Sie den Oberflächeninhalt für diese optimierte Schachtel. **/2**

4 /30

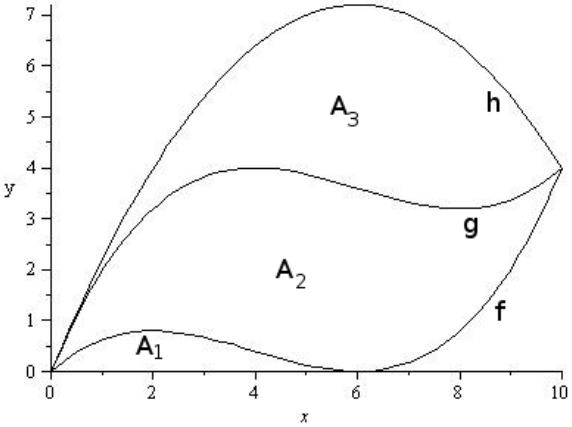
Die Funktionen f, g und h sind durch die folgenden Funktionsgleichungen gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{40}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{9}{10}x\,,\ x \in D_f\,,$$

$$g(x) = \frac{1}{40}x^3 - \frac{9}{20}x^2 + \frac{12}{5}x\,,\ x \in D_g\,,$$

$$h(x) = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{12}{5}x\ ,\ x \in D_h$$

(siehe die nebenstehende Abbildung).



4.1 Berechnen Sie den Inhalt A_1 der Fläche, die vollständig vom Graph der Funktion f und der x-Achse begrenzt wird. Bestimmen Sie dazu die Nullstellen der Funktion f auf rechnerischem Weg. **/7**

4.2 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^{10} \left(g(x) - f(x)\right) dx$ und begründen Sie, **/10**

dass der Wert dieses Integrals dem Inhalt A_2 der Fläche entspricht, die vollständig von den Graphen der Funktionen f und g begrenzt wird. Bestimmen Sie dazu auf rechnerischem Weg die Schnittpunkte der beiden Funktionen.

4.3 Ermitteln Sie die Schnittstellen der Funktionen g und h auf rechnerischem Weg, und bestimmen Sie den Inhalt A_3 der Fläche, die vollständig von den Graphen der Funktionen g und h begrenzt wird. **/8**

4.4 Zeigen Sie, dass die in 4.2 berechnete Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g durch die senkrechte Gerade mit der Gleichung $x = 5$ halbiert wird. **/5**

Abschlussprüfung Fachoberschule
2011 Herbst, (Mathematik)
Erwartungshorizont Aufgabenvorschlag A

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	$A(10) = -\frac{1}{250}(10)^3 + \frac{1}{10}(10)^2 = 6$ Am zehnten Tag sind 6 Personen erkrankt.	1 1		
1.2	Berechnung der Nullstellen von A. $A(t) = 0$ $-\frac{1}{250}t^3 + \frac{1}{10}t^2 = 0$ $t^2(-\frac{1}{250}t + \frac{1}{10}) = 0$ $t_{N1/2} = 0\ (Beginn\ der\ Epidemie)$ $-\frac{1}{250}t + \frac{1}{10} = 0$ $t_{N3} = \frac{250}{10} = 25$ Die Epidemie ist nach 25 Tagen vorbei.	1 2	1 1	
1.3	Hochpunkt des Graphen von A : $A'(t) = -\frac{3}{250}t^2 + \frac{1}{5}t$ $A'(t) = 0$ $-\frac{3}{250}t^2 + \frac{1}{5}t = 0$ $t(-\frac{3}{250}t + \frac{1}{5}) = 0$ $t_{E1} = 0\ (Beginn\ der\ Epidemie)$ $-\frac{3}{250}t + \frac{1}{5} = 0$ $t_{E2} = \frac{250}{15} = 16\frac{2}{3} = 16,\overline{6}$ $A''(t) = -\frac{6}{250}t + \frac{1}{5}$ $A''(t_{E2}) = -\frac{6}{250} \cdot 16,\overline{6} + \frac{1}{5} < 0\ (Maximum)$ $A(t_{E2}) = A(16,\overline{6}) \approx 9,26$ Am 16. Tag sind die meisten Personen erkrankt. An diesem Tag sind 9 Personen erkrankt.	1 1 1 1	1 1 1 1 1	
1.4	Wendestellen von A : $A''(t) = 0$ $-\frac{6}{250}t + \frac{1}{5} = 0$ $t = \frac{250}{30} = 8,\overline{3}$ Am 8. Tag änderte sich die Anzahl der Erkrankten am stärksten.	1 1	1 1	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.5	$A(t)=2$	1		
	$-\frac{1}{250}t^3+\frac{1}{10}t^2=2$		1	
	$-\frac{1}{250}t^3+\frac{1}{10}t^2-2=0$			1
	Nullstellenfindung z. B. mit dem Newtonverfahren		1	
	$t_0=24 \quad A(t_0)=0{,}304$		1	
	$t_1=24{,}1439 \quad A(t_1)=-003907$		1	
	$t_2=24{,}1421 \quad A(t_2)=-0{,}000001$			
	$t\approx 24{,}142\ Tage$		1	
1.6	Graph der Funktion A :	4		
1.7	Erkrankungsrate			
	$A'(t)=\frac{1}{2}$		1	
	$-\frac{3}{250}t^2+\frac{1}{5}t=\frac{1}{2}$	1		
	$-\frac{3}{250}t^2+\frac{1}{5}t-\frac{1}{2}=0$			
	$t^2-\frac{250}{15}t+\frac{250}{6}=0$	1		
	$t_{1/2}=\frac{250}{30}\pm\sqrt{\frac{\left(-\frac{250}{15}\right)^2}{4}-\frac{250}{6}}=\frac{25}{3}\pm 5{,}27$			2
	$t_1\approx 3$		1	
	$t_2\approx 13{,}6$		1	
	Die Erkrankungsrate am 3. Tag und am 13. Tag beträgt jeweils 0,5 Erkrankungen/Tag.		1	
	Summe	18	19	3
	mögliche BE		40	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2	Ansatz:			
	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	1		
	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$	1		
	$f''(x) = 6ax + 2b$	1		
	Bedingungsgefüge:			
	1. $f(2) = 4$ ($g(2) = 2 + 2 = 4$)	1		
	2. $f'(2) = 1$ (Steigung der Geraden)		1	
	3. $f(1) = 1$ (Wendepunkt bei $W_1(1\|1)$)		1	
	4. $f''(1) = 0$ (Wendepunkt bei $W_1(1\|1)$)		1	
	Gleichungssystem:			
	I: $4 = 8a + 4b + 2c + d$			
	II: $1 = 12a + 4b + c$			
	III: $1 = a + b + c + d$			
	IV: $0 = 6a + 2b$			
	Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS)		5	
	Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS):			
	$a = -1, \quad b = 3, \quad c = 1, \quad d = -2$	2		
	Für die Funktionsgleichung gilt:			
	$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2$	1		
	Summe	7	8	0
	mögliche BE	15		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Erstellung der Zielfunktion:			
	$A_O(a,h) = 2 \cdot A_{Dreieck} + 3 \cdot A_{Rechteck}$			
	$= 2 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot a \cdot h$ Hauptbedingung		2	
	$V = 250 + 182 = 432 cm^2$ (Gesamtvolumen)	1		
	$V = A_{Dreieck} \cdot h$			
	$432 = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot h$ Nebenbedingung	1		
	Es folgt:			
	$h = \frac{1728}{\sqrt{3} \cdot a^2}$		1	
	Eingesetzt in die Hauptbedingung:			
	$A(a) = 2 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot a \cdot \frac{1728}{\sqrt{3} \cdot a^2}$	1		
	$= \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{5184}{\sqrt{3} \cdot a}$ Zielfunktion		1	
3.2	Berechnung der Abmessungen:			
	Bedingung für Minimum: $A'(a_{\min}) = 0$ und $A''(a_{\min}) > 0$	1		
	$A'(a) = \sqrt{3} \cdot a - \frac{5184}{\sqrt{3} \cdot a^2}$		1	
	$\sqrt{3} \cdot a - \frac{5184}{\sqrt{3} \cdot a^2} = 0 \quad \Big\vert + \frac{5184}{\sqrt{3} \cdot a^2}$			
	$\sqrt{3} \cdot a = \frac{5184}{\sqrt{3} \cdot a^2} \quad \Big\vert : \sqrt{3} \quad \cdot a^2$			
	$a^3 = \frac{5184}{3}$			
	$a^3 = 1728 \quad \Big\vert \sqrt[3]{}$			
	$a = 12 cm$		1	
	Überprüfung der Art des Extremums:			
	$A''(a) = \sqrt{3} + \frac{10368}{\sqrt{3} \cdot a^3}$		1	
	$A''(12) = \sqrt{3} + \frac{10368}{\sqrt{3} \cdot 12^3} \approx 5{,}196 > 0 \Rightarrow$ Minimum	1		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Höhe der Schachtel: $h = \frac{1728}{\sqrt{3} \cdot a^2}$ $h = \frac{1728}{\sqrt{3} \cdot 12^2} = 6{,}93cm$		1	
3.3	Oberfläche der optimierten Schachtel: $A(a) = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{5184}{\sqrt{3} \cdot a}$ $A(12) = \frac{12^2}{2} \cdot \sqrt{3} + \frac{5184}{\sqrt{3} \cdot 12} \approx 374{,}12cm^2$ Der Inhalt der Oberfläche beträgt 374,12cm² bei einer Kantenlänge von 12cm und einer Höhe von rund 6,9cm.	1	1	
	Summe	6	9	0
	mögliche BE	15		

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
4.1	Bestimmung der Nullstellen von f: Nullsetzen $f(x)=0$			
	$\frac{1}{40}x^3-\frac{3}{10}x^2+\frac{9}{10}x=0 \Leftrightarrow x^3-12x^2+36x=0 \Leftrightarrow$	1		
	$x\cdot\left(x^2-12x+36\right)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=x_3=6$		2	
	Berechnung des bestimmten Integrals:			
	$\int_0^6 f(x)dx=\int_0^6\left(\frac{1}{40}x^3-\frac{3}{10}x^2+\frac{9}{10}x\right)dx=$			1
	$\left[\frac{1}{160}x^4-\frac{1}{10}x^3+\frac{9}{20}x^2\right]_0^6=$		2	
	$\frac{1}{160}\cdot 6^4-\frac{1}{10}\cdot 6^3+\frac{9}{20}\cdot 6^2=\frac{27}{10}$	1		
	Flächeninhalt: $A_1=2{,}7\,\text{FE}$			
4.2	Berechnung des bestimmten Integrals:			
	$\int_0^{10}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^{10}\left(-\frac{3}{20}x^2+\frac{15}{10}x\right)dx=$		1	
	$\left[-\frac{1}{20}x^3+\frac{15}{20}x^2\right]_0^{10}=$		2	
	$-\frac{1}{20}\cdot 10^3+\frac{15}{20}\cdot 10^2=25$	1		
	Bestimmung der Schnittpunkte: Gleichsetzen $f(x)=g(x)$			
	$\frac{1}{40}x^3-\frac{3}{10}x^2+\frac{9}{10}x=\frac{1}{40}x^3-\frac{9}{20}x^2+\frac{12}{5}x \Leftrightarrow$	1		
	$-6x^2+18x=-9x^2+48x \Leftrightarrow 3x^2-30x \Leftrightarrow$			
	$x\cdot(x-10)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=10$		2	
	$f(0)=0, f(10)=4 \Rightarrow$ Schnittpunkte: $P_1=(0\|0), P_2=(10\|4)$		1	
	Die Integrationsgrenzen entsprechen den x-Koordinaten der Schnittpunkte. Der Integrand ist die Differenz der Funktionen, die die obere/untere Begrenzung bilden.			2
	Flächeninhalt: $A_2=25\,\text{FE}$			
4.3	Bestimmung der Schnittstellen: Gleichsetzen $g(x)=h(x)$			
	$\frac{1}{40}x^3-\frac{9}{20}x^2+\frac{12}{5}x=-\frac{1}{5}x^2+\frac{12}{5}x \Leftrightarrow$	1		
	$x^3-18x^2=-8x^2 \Leftrightarrow x^3-10x^2=0 \Leftrightarrow$			
	$x^2\cdot(x-10)=0 \Rightarrow x_1=x_2=0, x_3=10$		2	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Berechnung des bestimmten Integrals:			
	$\int_0^{10}\left(h(x)-g(x)\right)dx=\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)dx=$		2	
	$\left[-\frac{1}{160}x^4+\frac{1}{12}x^3\right]_0^{10}=-\frac{1}{160}\cdot 10^4+\frac{1}{12}\cdot 10^3=\frac{125}{6}$		2	
	Flächeninhalt: $A_3=\frac{125}{6}\text{FE}$	1		
4.4	Berechnung des bestimmten Integrals: obere Grenze 5			1
	$\int_0^{5}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^{5}\left(-\frac{3}{20}x^2+\frac{15}{10}x\right)dx=$		2	
	$\left[-\frac{1}{20}x^3+\frac{15}{20}x^2\right]_0^{5}=-\frac{1}{20}\cdot 5^3+\frac{15}{20}\cdot 5^2=\frac{25}{2}$	1		
	Flächeninhalt: $A=\frac{25}{2}\text{FE}$			
	Die Fläche wird also durch die Gerade $x=5$ halbiert		1	
	Summe	7	19	4
	mögliche BE		30	