Abschlussprüfung Fachoberschule
2010 Herbst, (Mathematik)
Aufgabenvorschlag B

1 Kurvenuntersuchung /40

Die Tragflächen des berühmten Flugzeuges Junkers Ju-52 können an der Nahtstelle zum Flugzeugrumpf mithilfe der Funktionen f und g mit

$$f(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{3}{100}x^2 + \frac{28}{100}x\,;\ x \in [0;7]$$

und g mit

$$g(x) = \frac{1}{20}x^2 - \frac{7}{20}x\,;\ x \in [0;7]$$

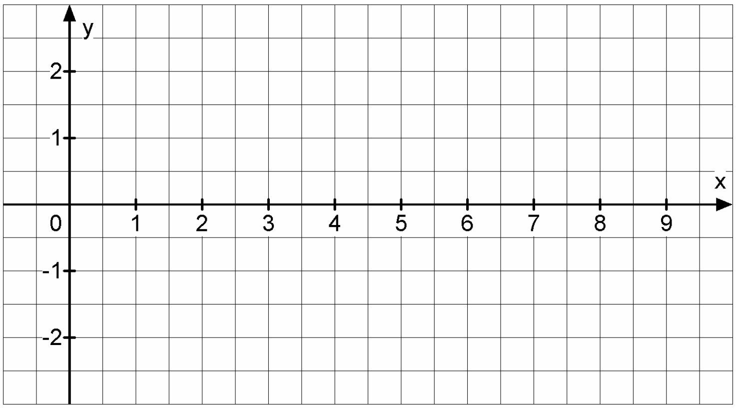
annähernd beschrieben werden.
(Hierbei gilt: 1 Einheit entspricht 1 m)

Foto: J. Lehnen

1.1 Bestimmen Sie die Stellen, an denen die beiden Tragflächenhälften im betrachteten Intervall aufeinander treffen. **/4**

1.2 Bestimmen Sie den absoluten Hochpunkt bzw. Tiefpunkt der zugehörigen Graphen von f und g. **/12**

1.3 Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f und g (Tragflächenprofil) in das beiliegende Koordinatensystem. **/4**



1.4 Bestimmen Sie die maximale Dicke des Tragflächenprofils. **/8**

1.5 In die Tragflächen sollen flächenfüllende Kraftstofftanks eingebaut werden. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Tragflächenprofils, das von f und g im Intervall $[0;7]$ eingeschlossen wird und das Volumen des Treibstofftanks, wenn dieser eine Länge von 2 m hat. **/6**

1.6 Zur Messung der Fluggeschwindigkeit wird an der Unterseite der Tragfläche im Punkt $P(5\,|\,g(5))$ ein Messrohr angebracht. Aus strömungstechnischen Gründen wird das Messrohr tangential an der Unterseite montiert. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden t, auf der das Messrohr liegt. **/6**

2 Rekonstruktion /15

Der Graph einer Funktion f dritten Grades schneidet die y-Achse unter einem Winkel von 45°, die Tangente an den Graphen der Funktion hat dort einen positiven Anstieg. Der Graph von f berührt im Extrempunkt $P_E(-2 \mid f(-2))$ die x- Achse, außerdem liegt der Punkt $P(-1 \mid -1{,}75)$ auf dem Graphen von f.

2.1 Stellen Sie mit den oben genannten Bedingungen das Bedingungsgefüge zusammen und stellen Sie daraus ein Gleichungssystem auf. **/7**

2.2 Bestimmen Sie die Koeffizienten von f, indem Sie das Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl lösen. **/7**

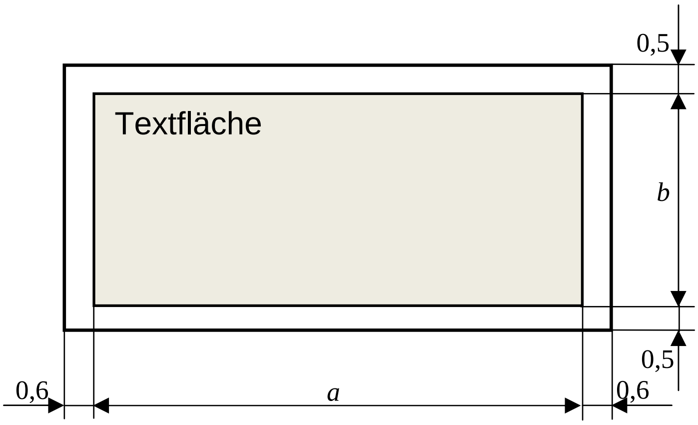
Sollten Sie unter 2.1 die Bedingungen nicht oder nur unvollständig aufgestellt haben, lösen Sie das folgende Ersatzgleichungssystem:

$$\begin{array}{lrclclclcl}
\text{I:} & 2{,}25 & = & a & + & b & + & c & + & d \\
\text{II:} & 20 & = & 8a & + & 4b & + & 2c & + & d \\
\text{III:} & 2{,}5 & = & 8a & - & 2b & + & c & & \\
\text{IV:} & -1 & = & 12a & - & 4b & & & &
\end{array}$$

2.3 Stellen Sie die Funktionsgleichung von f auf, indem Sie die berechneten Koeffizienten in Ihren Ansatz einsetzen. **/1**

3 Extremwertaufgabe /15

Eine Visitenkarte soll eine rechteckige Fläche haben. Dabei soll das Textfeld jeder Karte rechts und links einen Abstand von je 0,6 cm, oben und unten einen Abstand von je 0,5 cm zum Kartenrand aufweisen. Darüber hinaus soll der Umfang jeder Karte genau 28,4 cm groß sein.



Rechnen Sie ohne Einheiten

3.1 Zeigen Sie, dass A eine (Ziel)Funktion ist, mit der die Flächeninhalte der Textfläche der Visitenkarten in Abhängigkeit der Länge a des jeweilig gewählten Textfeldes berechnet werden können. Es gilt: **/7**

$A(a) = a(12 - a)$ mit $D_A = \{a \in IR \mid 0 \leq a \leq 12\}$

1 Längeneinheit $\hat{=}$ 1 cm bzw. 1 Flächeneinheit $\hat{=}$ 1 cm^2

3.2 Ermitteln Sie, welche Abmessungen zu wählen sind, damit das Textfeld möglichst viel Text aufnehmen kann. **/6**

Beschreiben Sie, wie das Textfeld in diesem Fall aussieht.

3.3 Erläutern Sie, warum $D_A = \{a \in IR \mid 0 \leq a \leq 12\}$ der Definitionsbereich der (Ziel)Funktion A ist. **/2**

4 Integralrechnung /30

Gegeben sind die Gerade g: $g(x)=\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$ und

die Parabel p: $p(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x+\frac{7}{3}$ mit $x\in IR$.

4.1 Berechnen Sie den Scheitelpunkt der Parabel mit Hilfe der Differenzialrechnung und die Schnittpunkte der Parabel mit der x- Achse. Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Geraden und der Parabel. **/10**

4.2 Skizzieren Sie mit Hilfe der Ergebnisse von 4.1 beide Funktionsgraphen in <u>einem</u> Koordinatensystem im Intervall $[-1;7]$. **/5**

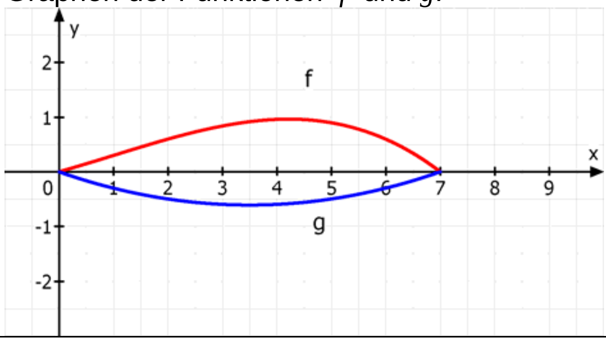
4.3 Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_{-1}^{5}(p(x)-g(x))dx$. **/6**

Begründen Sie, dass der Wert des bestimmten Integrals identisch ist mit dem Flächeninhalt, der von beiden Funktionen eingeschlossen wird.

4.4 Eine zur y- Achse parallele Gerade mit der Gleichung $x=u$ halbiert den Flächeninhalt A. Ermitteln Sie u. **/9**

Abschlussprüfung Fachoberschule
2010 Herbst (Mathematik)
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.1	Schnittstellen von f und g:			
	$f(x)=g(x)$			
	$-\frac{1}{100}x^3+\frac{3}{100}x^2+\frac{28}{100}x=\frac{1}{20}x^2-\frac{7}{20}x$	1		
	$-\frac{1}{100}x^3-\frac{2}{100}x^2+\frac{63}{100}x=0$			
	$-x\left(\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{100}x-\frac{63}{100}\right)=0$	1		
	$x_{S1}=0$			
	$\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{100}x-\frac{63}{100}=0$			
	$x^2+2x-63=0$	1		
	$x_{S2/3}=-1\pm\sqrt{1+63}=-1\pm 8$			
	$x_{S2}=7$		1	
	$x_{S3}=-9$ *nicht im Definitionsbereich*			
	Die Tragflächen treffen bei $x_{S1}=0$ $x_{S2}=7$ aufeinander.			
	Alternativ: Berechnung über Nullstellen			
1.2	Hochpunkt des Graphen von f:			
	$f'(x)=0$			
	$-\frac{3}{100}x^2+\frac{6}{100}x+\frac{28}{100}=0$			
	$x^2-2x-\frac{28}{3}=0$	1		
	$x_{1/2}=1\pm\sqrt{1+\frac{28}{3}}$	1		
	$x_{1/2}=1\pm\sqrt{\frac{31}{3}}$			
	$x_1=4,215;\quad f''(x_{E1})<0$		1	
	$x_2=-2,215;\quad$ *nicht im Definitionsbereich*		1	
	$f(x_1)=0,964$		1	
	$H(4,214\,\vert\,0,964)$		1	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Tiefpunkt des Graphen von g:	1		
	$g'(x)=0$			
	$\frac{2}{20}x-\frac{7}{20}=0$	1		
	$x=\frac{7}{2}=3,5$		1	
	$g''(3,5)>0$		2	
	$g(3,5)=-0,6125$			
	$T(3,5\,\vert\,-0,6125)$		1	
1.3	Graphen der Funktionen f und g: 	4		
1.4	Die Dicke des Profils in y-Richtung lässt sich als $d(x)=f(x)-g(x)$ darstellen.		2	
	Die Dicke *d* ist an der Stelle x maximal, falls gilt: $d'(x)=0$ und $d''(x)<0$.		1	
	$d(x)=-0,01\cdot(x^3+2x^2-63x)$			
	$d'(x)=-0,01\cdot(3x^2+4x-63)$		1	
	$0=-0,01\cdot(3x^2+4x-63)$		1	
	$0=x^2+\frac{4}{3}x-21$			
	$x_1=-5,297$; *nicht im Definitionsbereich*		1	
	$x_2=3,964$		1	
	$d''(3,964)=-0,2776<0$		1	
	Die maximale Dicke beträgt: $d(3,964)\approx 1,56m$			
1.5	Die Querschnittsfläche der Tragfläche lässt sich als Flächeninhalt der von den Funktionsgraphen eingeschlossenen Fläche beschreiben:			

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	$A=\int_0^7 (f(x)-g(x))dx$		1	
	$=-0,01\cdot\int_0^7 (x^3+2x^2-63x)dx$		1	
	$=-0,01\cdot\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{63}{2}x^2\right]_0^7$			
	$=\frac{343}{48}\approx 7,146\ m^2$		2	
	$V=A\cdot 2m=\frac{343}{24}\approx 14,292\ m^3$	2		
1.6	Die Steigung der Tangente kann über die erste Ableitung der Parabel g ermittelt werden:		1	
	$g'(x)=0,1x-0,35$ $g'(5)=0,15$	1		
	Mit der Steigung $m=0,15$ der Tangente und dem Berührpunkt $P(5\mid-0,5)$ ergibt sich: $-0,5=0,75+b.$		3	
	Die gesuchte Funktionsgleichung von t lautet: $t(x)=0,15\cdot x-1,25$	1		
	Summe	15	25	0
	mögliche BE	40		

Abschlussprüfung Fachoberschule
2010 Herbst (Mathematik)
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

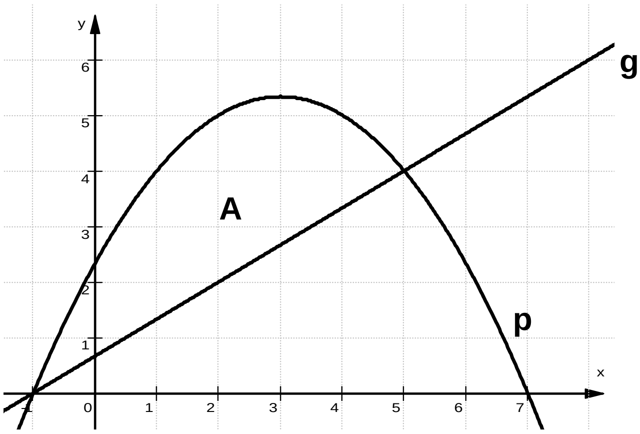
Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
2.1	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ Bedingungsgefüge: 1. $f'(0) = 1$ (Anstieg bei $x = 0$ ist 1) 2. $f(-2) = 0$ ($x_N = -2$ ist Nullstelle) 3. $f'(-2) = 0$ ($x_E = -2$ ist Extremstelle) 4. $f(-1) = -1,75$ ($P(-1 \mid -1,75)$ liegt auf dem Graphen von f) Gleichungssystem: $\begin{array}{rrcrrrrrrrr} \text{I:} & -1{,}75 & = & -a & + & b & - & c & + & d \\ \text{II:} & 0 & = & -8a & + & 4b & - & 2c & + & d \\ \text{III:} & 0 & = & 12a & - & 4b & + & c & & \\ \text{IV:} & 1 & = & & & & & c & & \end{array}$	1	1 1 1 2	1
2.2	Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS) Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS): $a = 1,\quad b = 3,25,\quad c = 1,\quad d = -3$	2	5	
2.3	Für den Funktionsterm gilt: $f(x) = x^3 + 3,25x^2 + x - 3$	1		
	Summe	4	10	1
	mögliche BE	15		

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
3.1	Erstellung der Zielfunktion $A(a,b) = a \cdot b$ als Hauptbedingung $28{,}4 = 2\cdot(a+2\cdot 0{,}6)+2\cdot(b+2\cdot 0{,}5)$ als Nebenbedingung $= 2a+2{,}4+2b+2$ $24 = 2(a+b)$ Es folgt: $a+b=12$ $b = 12-a$ Eingesetzt in die Hauptbedingung: $A(a) = a\cdot(12-a)$ $=12a-a^2$	 1 1	1 1 1	 2
3.2	Berechnung der Abmessungen: $A(a)=12a-a^2, \quad A'(a)=12-2a, \quad A''(a)=-2$ $A'(a)=0$ und $A''(a)\neq 0$ ist hinreichend für Extremstellen $12-2a=0 \quad \vert +2a$ $2a=12 \quad \vert \div 2$ $a_1 = 6 \in D_A$ ist Extremstellenkandidat. Mit $A''(6)=-2$ <0 folgt, dass $a_H = 6$ Hochstelle von A ist. Einsetzen von a_H in die nach b umgestellte Nebenbedingung: $b_H = 12-6$ $=6$ Damit die Textfläche maximal viel Text aufnehmen kann, muss sie quadratisch sein. Wegen 1 Einheit entspricht 1 *cm*, ist als Kantenlänge dieses Quadrats 6 cm zu wählen. Ein Lösungsweg anhand des Scheitelpunkts des Graphen der quadratischen Zielfunktion ist entsprechend zu bewerten.	 1 1	1 1 1	 1

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
auf-
gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.3</td><td>$D_A = \{a \in IR \mid 0 \le a \le 12\}$ ist der Definitionsbereich.

Bei $a = 0$ kann die waagerecht verlaufende Länge des Textfeldes nicht gewählt werden, das Textfeld besteht dann aus einem Strich – der Flächeninhalt ist dann Null.
Die Höhe des Textfeldes ist mindesten $h = 0$ groß. Es ergibt sich in diesem Fall aus der Formel für die Nebenbedingung $a = 12$ und das Textfeld besteht aus einem Strich.</td><td></td><td>1

1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>4</td><td>8</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">15</td></tr>
</table>

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
4.1	Scheitelpunkt: $p'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ und $p''(x) = -\frac{2}{3}$ $p'(x) = 0 \Rightarrow S(3 / \frac{16}{3})$ $p''(3) < 0 \Rightarrow$ Maximum Nullstellen: $p(x) = 0$ liefert die quadratische Gleichung $x^2 - 6x - 7 = 0$ mit den Lösungen $x_{0/1} = 7$ und $x_{0/2} = -1$. Also sind die Schnittpunkte $N_1(7 / 0)$ und $N_2(-1 / 0)$. Schnittpunkte: $p(x)$ und $g(x)$ gleichsetzen führt auf die Gleichung $x^2 - 4x - 5 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 5$ und $x_2 = -1$. Damit ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(5 / 4)$ und $S_2(-1 / 0)$.	3	3 4	
4.2		2	3	
4.3	$A = \int_{-1}^{5} ((-\frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{7}{3}) - (\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}))dx$ $A = [-\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x]_{-1}^{+5} = (\frac{100}{9} + \frac{8}{9})$ FE= 12 FE Begründung der Identität.	3	2 1	
4.4	$6 = [-\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x]_{-1}^{u}$ $6 = -\frac{1}{9}u^3 + \frac{2}{3}u^2 + \frac{5}{3}u + \frac{8}{9}$ liefert die Gleichung			3

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
auf-
gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$0 = u^3 - 6u^2 - 15u + 46$

Die Polynomendivision durch (u –2) bringt die Gleichung $u^2 - 4u - 23 = 0$ mit den Lösungen
$u_1 \approx 7{,}2$ und $u_2 \approx -3{,}2$.
Diese Lösungen entfallen, da nicht Element $[-1;5]$.
Also halbiert die
Gerade x = 2 die Fläche.</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>8</td><td>19</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">30</td></tr>
</table>