Abschlussprüfung Fachoberschule
2010, (Mathematik)
Aufgabenvorschlag B

1 **/41**

Gegeben ist eine Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^3+12x^2-16x+4$; $x\in\mathbb{R}$

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und begründen Sie Ihre Aussage. **/2**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f im Unendlichen.. **/2**

1.3 Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse an. **/1**

1.4 Begründen Sie, dass die Funktion f im Intervall $[0;1]$ eine Nullstelle haben muss. **/9**

Berechnen Sie diese Nullstelle durch ein geeignetes Näherungsverfahren auf vier Nachkommastellen genau.

Brechen Sie Ihre Berechnung bei einem Fehlerquotienten von $f(x)\leq 0{,}01$ oder nach höchstens drei Iterationsschritten ab.

1.5 Weisen Sie nach, dass eine zweite Nullstelle bei $x=2$ existiert. **/1**

1.6 Nennen Sie die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung der Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f und berechnen Sie diese Punkte. **/15**

1.7 Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[0;5]$ unter Zuhilfenahme aller ermittelten Punkte. **/6**

1.8 Gegeben sei nun die Funktionsgleichung $f_a(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^3+ax^2-16x+4$ mit $x\in\mathbb{R}$ und $a\in\mathbb{R}$. **/5**

Ermitteln Sie, für welches a der Graph der Funktion f keine Wendepunkte besitzt.

Begründen Sie Ihre Antwort.

2 **/24**

Der Funktionsgraph f einer Funktion dritten Grades besitzt den Extrempunkt $P(1\,|\,-2)$. An der Stelle $x=2$ hat die zugehörige Normale n die Funktionsgleichung $n(x)=-0{,}1x+2{,}2$.

2.1 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion f. **/12**

Wenn Sie das Gleichungssystem nicht aufstellen können, lösen Sie <u>*ersatzweise*</u> *das folgende Gleichungssystem und bestimmen Sie damit die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f.*

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 12a & + & 6b & + & 3c & + & 1{,}5d & = & 3 \\ 2a & + & 2b & + & 2c & + & 2d & = & -4 \\ 3a & - & 2b & - & 2c & & & = & 10 \\ -6a & - & 4b & - & 2c & & & = & 0 \end{array}$$

Falls Sie die Funktionsgleichung der Funktion f nicht bestimmen konnten, arbeiten Sie im Weiteren mit der Funktionsgleichung $f(x)=2x^3-4x^2+2x-2$ und der Normalengleichung $n(x)=-0{,}1x+2{,}2$.

2.2 Skizzieren Sie die Graphen der Funktion f sowie der Normale n. **/5**
Verwenden Sie hierbei das Extremum von f im Punkt $P(1\,|\,-2)$, den Schnittpunkt der Graphen der Funktion f und der Normale n, das absolute Glied der Funktion f sowie das Verhalten von f im Unendlichen.

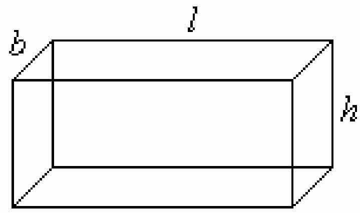
2.3 Die Graphen der Funktion f und der Normale n sowie die y-Achse schliessen eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche. **/7**
Berücksichtigen Sie bei Ihrer Lösung die folgenden Hinweise:
Die Graphen der Funktion f und der Normale n schneiden sich an der Stelle $x=2$.
Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse bei ca. $x=1{,}75$.

3 **/15**

Aus Sperrholz soll eine quaderförmige Kiste gebaut werden;
alle 12 Kanten sind mit Aluminiumschiene zu verstärken.

Beim Bau sind folgende Maßgaben zu beachten:

1. Die Länge l soll genau das Doppelte der Breite b betragen.
2. Es stehen insgesamt 540 cm Aluminiumschiene zur Verfügung.



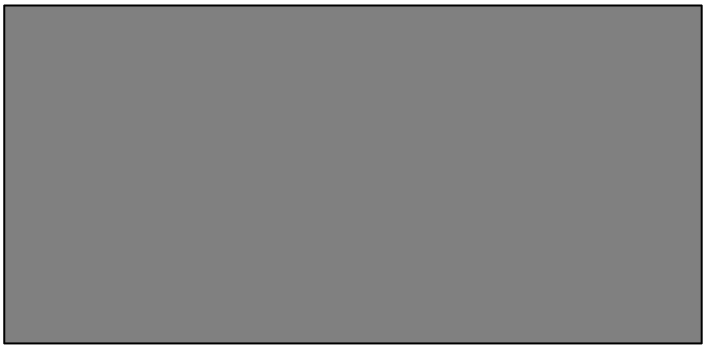
3.1 Weisen Sie nach, dass man das Volumen der Kiste mit der folgenden Zielfunktionsgleichung berechnen kann (Längeneinheit: 1cm): **/6**

$$V(b) = 270b^2 - 6b^3$$

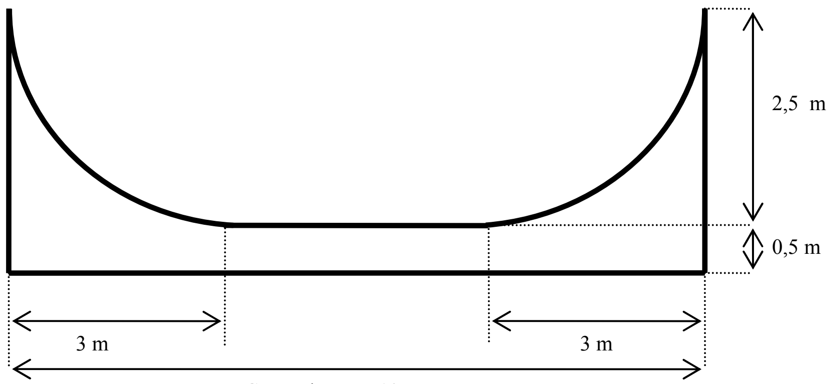
3.2 Welche Länge l, Breite b und Höhe h muss die Kiste haben, damit ihr Volumen maximal ist? Wie groß ist das maximale Volumen? **/9**

4 **/20**

Auf dem Freigelände eines Jugendclubs ist der Bau einer „Halfpipe“ (siehe Foto - aus urheberrechtlichen Gründen hier nicht verfügbar) zum Skateboard fahren geplant.



Der Querschnitt der „Halfpipe“ soll folgende Maße haben:



Die Konstrukteure haben festgelegt, dass sich die eigentliche Skaterbahn aus zwei Parabelästen und einer waagerechten Geraden zusammensetzt. Um sanfte Übergänge zwischen dem geraden und den beiden abschüssigen Abschnitten zu erreichen, befinden sich genau in den Übergängen (bei jeweils 3m) die Scheitelpunkte der Parabeln.

4.1 Stellen Sie die Funktionsgleichung einer der beiden Parabeln auf. Skizzieren Sie diese in einem geeigneten Koordinatensystem und bestimmen Sie die Funktionsgleichung. **/6**

Falls Sie die Funktionsgleichung der Funktion f nicht bestimmen konnten, arbeiten Sie im Weiteren mit der Funktionsgleichung $f(x)=\frac{5}{18}x^2$.

4.2 Berechnen Sie, wie viel m^3 Beton für den Bau der „Halfpipe“ notwendig sind, wenn diese eine Breite von 3 m hat. **/6**

4.3 Sponsoren haben für den Bau dieses Objektes 7000 € zur Verfügung gestellt. **/4**

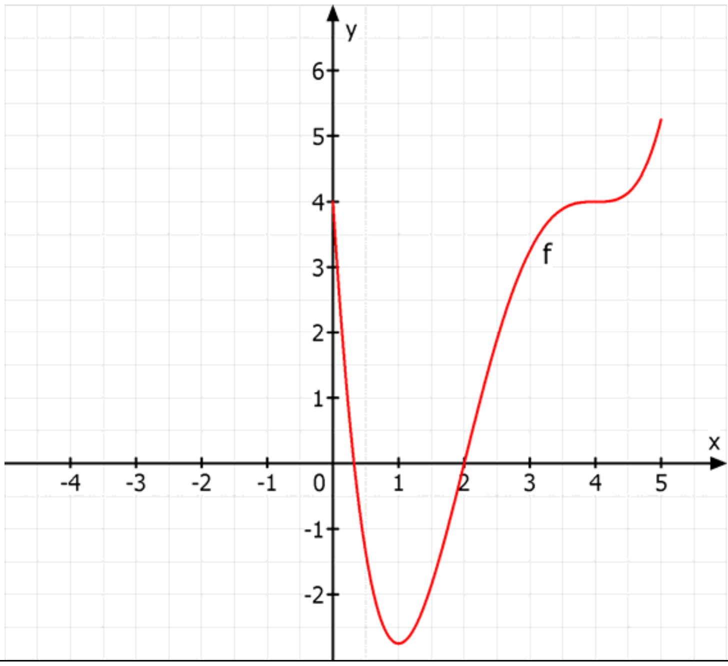
Die Jugendlichen haben recherchiert, dass 1 m^3 Beton 160 € zuzüglich 15% für die Verarbeitung kostet. Berechnen Sie, ob das Geld der Sponsoren reichen wird.

4.4 Um wie viele Meter müsste die Breite der „Halfpipe“ verändert werden, damit das zur Verfügung stehende Geld voll ausgenutzt wird? **/4**

Abschlussprüfung Fachoberschule
2010 (Mathematik)
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
1.1	$f(x) \neq -f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ oder die Exponenten von x sind gerade und ungerade, der Graph ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punksymmetrisch zum Ursprung.		2			
1.2	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$		2			
1.3	$S_y(0/4)$ da $f(0) = 4$ ist.	1				
1.4	Es gibt eine Nullstelle im Intervall $[0;1]$, da ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte im Intervall auftritt, denn $f(0) = 4$ und $f(1) = -\frac{11}{4}$ Newtonsches Näherungsverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 16x + 4$ $f'(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$ x_n / $f(x_n)$ / $f'(x_n)$ / x_{n+1} 0 / 4 / -16 / 0,25 0,25 / 0,7041 / -10,5469 / 0,3168 0,3168 / 0,0431 / -9,2690 / 0,3214 0,3214 / 0,0002 $f(0{,}3214) \leq 0{,}01$ Die Nullstelle liegt bei $x_n \approx 0{,}3214$	1 1 1 1	4	1		
1.5	Die Bedingung für eine Nullstelle ist erfüllt, denn es gilt $f(2) = 0$.	1				

1.6	a)Extrempunkte, notw. und hinr. Bedingung:					
	Hochpunkt: $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)>0$					
	Tiefpunkt: $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)<0$	1				
	$f'(x_E)=0 \Rightarrow$	1				
	$x^3-9x^2+24x-16=0$					
	$x_{E1}=1$; Linearfaktor (x-1)					
	$(x^3-9x^2+24x-16):(x-1)=x^2-8x+16$		2			
	$x^2-8x+16=0$					
	$x_{E_{2,3}}=4\pm\sqrt{16-16}=4$	1				
	$f''(x)=3x^2-18x+24$	1				
	$f''(4)=0$					
	$f''(1)=9>0 \Rightarrow Tiefpunkt$		1			
	$f(1)=-\frac{11}{4}$; $TP(1/-\frac{11}{4})$;		1			
	an der Stelle $x_{E_{2,3}}$ liegt vermutlich ein Sattelpunkt.					
	b)Wendepunkte, notw. und hinr. Bedingung:					
	$f''(x_W)=0$ und $f'''(x_W)\neq 0$					
	$f''(x_w)=0 \Rightarrow 3x^2-18x+24=0$	1				
	$x_{W_{1,2}}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1$					
	$x_{W_1}=4; x_{W_2}=2$		2			
	$f'''(x)=6x-18$	1				
	$f'''(4)=6>0 \Rightarrow$ rechts-links-Krümmung					
	$f'''(2)=-6<0 \Rightarrow$ links-rechts-Krümmung		1			
	$f(2)=0$; $WP_2(2/0)$					
	$f(4)=4$; $WP_1(4/4)$ ist ein Sattelpunkt,	1				
	da $f'(4)=f''(4)=0$ und $f'''(4)\neq 0$	1				

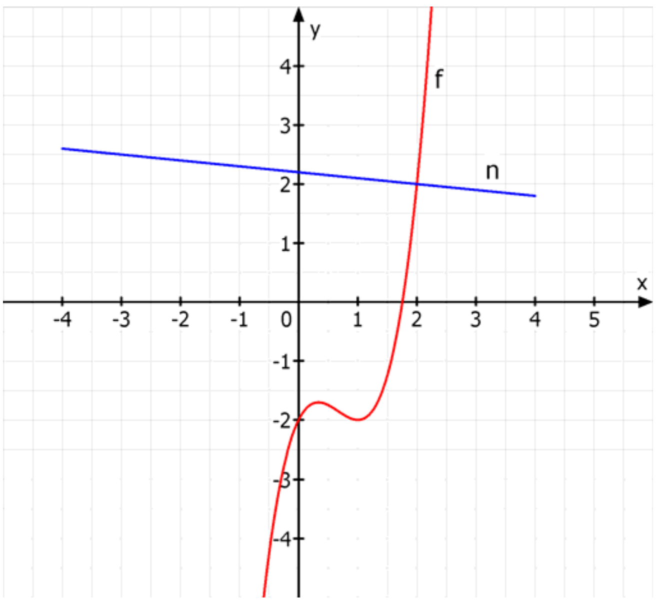
<table>
<tr><td>1.7</td><td>Intervallgrenzen: $f(0)=4;\ f(5)=5,25$

</td><td>1

5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.8</td><td>$f'(x)=x^3-9x^2+2ax-16=0$
$f''(x)=3x^2-18x+2a$
$f'''(x)=6x-18\neq 0$
$f''(x)=0 \Rightarrow 3x^2-18x+2a=0$
$\Rightarrow x_{1,2}=3\pm\sqrt{9-\frac{2a}{3}}$
1.Fall: Aus $9-\frac{2a}{3}<0$ folgt, dass es für $\frac{27}{2}<a$ keine Lösung, somit keine Wendestelle gibt.
2.Fall: Aus $9-\frac{2a}{3}=0$ folgt $a=\frac{27}{2}$ und $x_{1,2}=3$.
$f'''(3)=0$ somit keine Entscheidung zur Existenz der Wendestelle

Es gibt keine Wendestelle.
Der Nachweis $f_{\frac{27}{2}}''(x)\geq 0$ für alle x wird nicht gefordert.</td><td></td><td>2

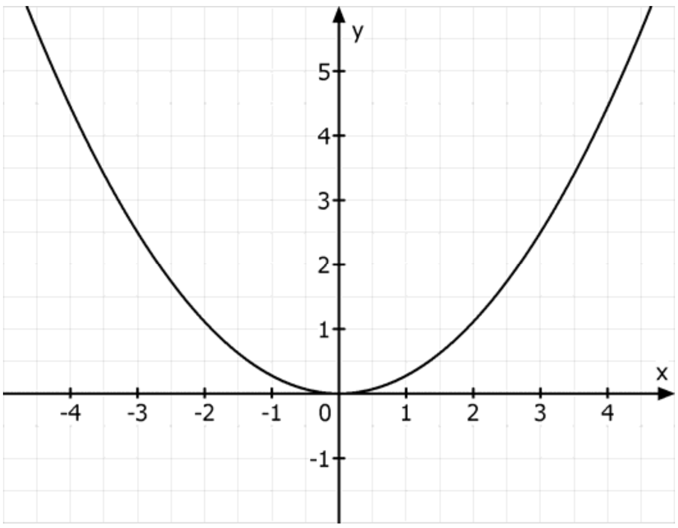
2</td><td>

1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>20</td><td>19</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>mögliche BE</td><td colspan="3">41</td><td colspan="2">erreichte BE</td></tr>
</table>

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB			Erbrachte Teilleistung	
		I	II	III	BE	Begutachtung
2.1	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f''(x) = 6ax + 2b$		1			
	Bedingungsgefüge: 1. $f(1) = -2$ Punkt $P(1 \mid -2)$	1				
	2. $f'(1) = 0$ Extremum bei $x = 1$	1				
	3. $f(2) = 2$ $f(2) = n(2) = 2$		1			
	4. $f'(2) = 10$ $m_n m_t = -1 \Rightarrow f'(2) = m_t = 10$		1	1		
	Gleichungssystem: I: $a + b + c + d = -2$ II: $3a + 2b + c = 0$ III: $8a + 4b + 2c + d = 2$ IV: $12a + 4b + c = 10$		1			
	Lösen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS)		3			
	Lösungen des Gleichungssystems (auch Ersatz-LGS) $a = 2;\quad b = -4;\quad c = 2;\quad d = -2$		1			
	Funktionsgleichung: $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 2$	1				
2.2	Graphen von f und n:  Die genaue Lage des lokalen Maximum $H(\frac{1}{3} \mid -\frac{46}{27})$ bleibt unberücksichtigt, seine Existenz ergibt sich aus den bekannten Eigenschaften von f.	1	3	1		

		I	II	III	BE	Begutachtung
2.3	$A=\left\|\int\limits_0^{1,75} f(x)dx\right\|+\left\|\int\limits_0^{2} n(x)dx\right\|-\left\|\int\limits_{1,75}^{2} f(x)dx\right\|$ $A=\left\|\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3+x^2-2x\right]_0^{1,75}\right\|+\left\|\left[-0,05x^2+2,2x\right]_0^2\right\|$ $-\left\|\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{4}{3}x^3+x^2-2x\right]_{1,75}^{2}\right\|$ $A=\|-2,89-0\|+\|4,2-0\|-\|-2,67+2,89\|$ $A=6,87$	2 1	2	2		
	Summe	7	13	4		
	mögliche BE		24		erreichte BE	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
3.1	Hauptbedingung: $V(b,h,l)=b\cdot h\cdot l$ soll maximal sein Nebenbedingungen: (NB1) $l=2b$ (NB2) $4l+4b+4h=540$ (NB1) in (NB2) einsetzen: $8b+4b+4h=540 \Leftrightarrow h=135-3b$ Nebenbedingungen in Hauptbedingung einsetzen: Zielfunktion: $V(b)=b\cdot(135-3b)\cdot 2b=270b^2-6b^3$		1 2 2	1		
3.2	Ableitungen: $V'(b)=540b-18b^2;\quad V''(b)=540-36b$ Notw. Bed.: $V'(b)=0 \Leftrightarrow 540b-18b^2=0 \Leftrightarrow$ $b(540-18b)=0$ Lösungen: $b_1=0$ ist nicht sinnvoll $b_2=30$ ist sinnvoll Hinreichende Bedingung $V''(b_2)<0$ prüfen: $V''(30)=-540<0 \Rightarrow$ Maximum Optimale Höhe und Länge berechnen: $h_{\max}=135-3\cdot 30=45$ $l_{\max}=2\cdot 30=60$ Maximales Volumen berechnen: $V_{\max}=30\cdot 45\cdot 60=81000$ Antwortsatz mit Maßeinheiten	1 1 1	1 2 2 1			
	Summe	3	11	1		
	mögliche BE		15		erreichte BE	

Teil-auf-gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III	Erbrachte Teilleistung BE	Begutachtung
4.1	Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Parabel in ein Koordinatensystem zu zeichnen, exemplarisch sei hier nur die effektivste Variante aufgezeigt. Beide Parabeläste werden zu einer Parabel verbunden, so dass der Scheitelpunkt bei $S(0\|0)$ liegt und ein weiterer relevanter Punkt bei $P(3\|\frac{5}{2})$.			1		
			1			
	<u>Funktionsgleichung:</u> $f(x)=ax^2 \qquad P(3/\frac{5}{2})$		2			
	$\frac{5}{2}=9a$ $a=\frac{5}{18}$		1			
	$f(x)=\frac{5}{18}x^2$		1			

4.2	Ansatz für Flächeninhalt: $A=2\int_0^3 f(x)dx=2\int_0^3(\frac{5}{18}x^2)dx$ *Stammfunktion*: $F(x)=\frac{5}{54}x^3$ $A=2\cdot\frac{5}{2}=5m^2$ Volumen: $V=(A+0,5\cdot 10)\cdot Breite=30m^3$ $30m^3$ Beton werden für den Bau der Halfpipe benötigt.	1 1 1	1 2			
4.3	$1m^3 \triangleq 160 Euro+15\%$ $1m^3 \triangleq 160 Euro+24 Euro$ $1m^3 \triangleq 184 Euro$ $30m^3 \triangleq 5520 Euro$ Das Geld der Sponsoren ist ausreichend.	1 1 1	1			
4.4	$\frac{30m^3}{5520€}=\frac{x}{7000€}$ $\quad x=38,04m^3$ Bei $38,04m^3$ Beton wäre das Geld voll ausgenutzt. $38,04m^3=(A+0,5\cdot 10)\cdot Breite$ $38,04m^3=10m^2\cdot Breite$ $3,804m=Breite$ Die Halfpipe müsste um ca. 0,804 m verbreitert werden, damit dass Geld voll ausgenutzt wird.		1 1 1	1		
	Summe	6	12	2		
	mögliche BE		20		erreichte BE	