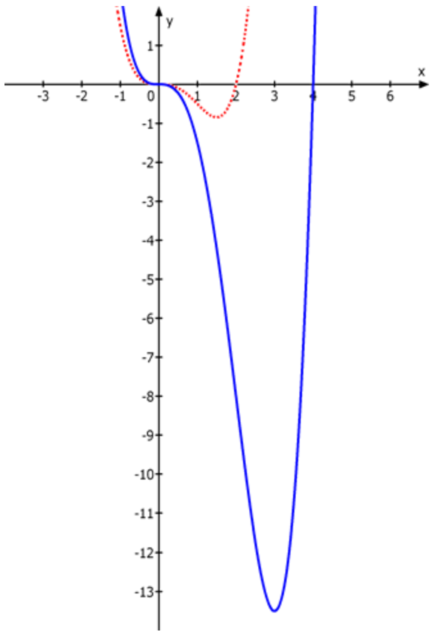
1 Kurvenuntersuchung /40

Gegeben sind zwei ganzrationale Funktionen f und g (siehe Graphik) mit den Funktionsgleichungen:

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3$ und $g(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3$

mit $x \in IR$.



1.1 Geben Sie an, welcher Graph zu welcher Funktion gehört und begründen Sie Ihre Aussage. **/4**

1.2 Berechnen Sie den Tiefpunkt des Graphen von g. **/10**

1.3 Berechnen Sie die Wendepunkte des Graphen von g. **/8**

1.4 Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten, die in den Punkten $P_1(0\,|\,g(0))$ und $P_2(2\,|\,g(2))$ den Graphen von g berühren. **/6**

1.5 Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der von den beiden Graphen und der x-Achse eingeschlossen wird. **/6**

1.6 Die Tiefpunkte $T_f(\frac{3}{2}\,|\,f(\frac{3}{2}))$ und $T_g(3\,|\,g(3))$ und der Punkt $P(2\,|\,-\frac{8}{3})$ liegen auf einem Graphen einer ganzrationalen Funktion k. Entscheiden Sie, welche der beiden folgenden Aussagen wahr ist: **/6**

a. k ist eine lineare Funktion mit einer Funktionsgleichung der Form $k(x)=mx+n$; $m,n \in IR$.

b. k ist eine ganzrationale Funktion mit einer Funktionsgleichung $k(x)=ax^4$; $a \in IR$.

Begründen Sie Ihre Entscheidung und bestimmen Sie die Funktionsgleichung von k.

2 Rekonstruktion /15

Der Graph einer Funktion dritten Grades berührt im Punkt $N(4|0)$ die x-Achse, und im Punkt $P(2|f(2))$ hat die zugehörige Tangente die Funktionsgleichung $g(x) = -2x + 8$.

2.1 Stellen Sie mit den oben genannten Bedingungen das Bedingungsgefüge zusammen und stellen Sie daraus ein Gleichungssystem auf. **/7**

2.2 Bestimmen Sie die Koeffizienten von *f*, indem Sie das Gleichungssystem mit einem Verfahren Ihrer Wahl lösen. **/7**

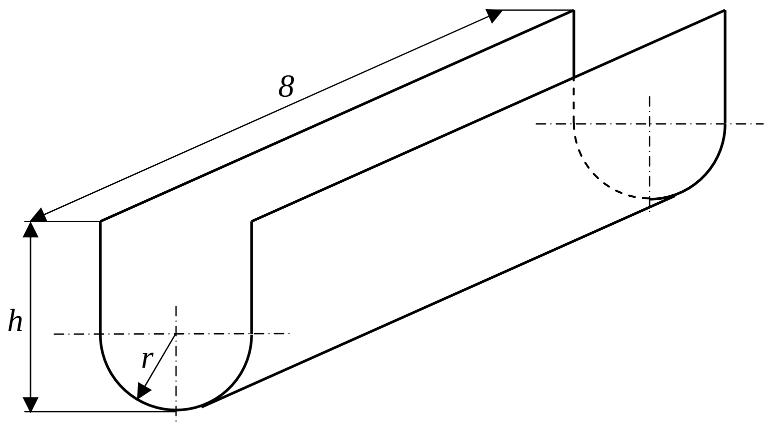
Sollten Sie unter 2.1 die Bedingungen nicht oder nur unvollständig aufgestellt haben, lösen Sie das folgende Ersatzgleichungssystem:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{I:} & 2 & = & 36a & + & 10b & + & 3c & + & d \\
\text{II:} & 10 & = & 20a & + & 8b & + & 4c & + & d \\
\text{III:} & -1 & = & 30a & + & 6b & + & c & & \\
\text{IV:} & -4 & = & 24a & + & 8b & + & 2c & &
\end{array}$$

2.3 Stellen Sie die Funktionsgleichung von f auf, indem Sie die berechneten Koeffizienten in Ihren Ansatz einsetzen. **/1**

3 Extremwertaufgabe /15

Aus einer Blechtafel (2m × 8m × 1,5mm) soll durch Biegen eine 8m lange nach oben offene Rinne gefertigt werden. Die Fläche des Querschnitts soll hierbei aus einem Halbkreis und einem Rechteck zusammengesetzt sein.



Rechnen Sie ohne Einheiten

3.1 Zeigen Sie, dass V eine (Ziel)Funktion ist, mit der die Rauminhalte der Rinnen in Abhängigkeit vom Radius des jeweilig gewählten Halbkreises berechnet werden können. Es gilt: **/7**

$$V(r) = 16r - 4\pi r^2 \qquad \text{mit} \qquad D_V = \{r \in IR \mid 0 \le r \le \frac{2}{\pi}\}$$

1 Längeneinheit $\hat{=}$ 1 m bzw. 1 Volumeneinheit $\hat{=}$ 1 m^3

3.2 Ermitteln Sie, welche Abmessungen zu wählen sind, damit die Rinne möglichst viel Flüssigkeit aufnehmen kann. **/6**

Beschreiben Sie, wie die Rinne in diesem Fall aussieht.

3.3 Erläutern Sie, warum $D_V = \{r \in IR \mid 0 \le r \le \frac{2}{\pi}\}$ der Definitionsbereich der (Ziel)Funktion V ist. **/2**

4 Integralrechnung **/30**

Gegeben sind die reell definierten Funktionen f und g durch ihre Funktionsgleichungen

$$f(x) = 2x^3 \text{ und } g(x) = 3x^2 - 1$$

4.1 Weisen Sie nach, dass beide Funktionen außer dem Berührpunkt $P_1(1|2)$ nur noch einen Schnittpunkt haben, nämlich $P_2(-\frac{1}{2}|-\frac{1}{4})$. **/7**

4.2. Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/7**

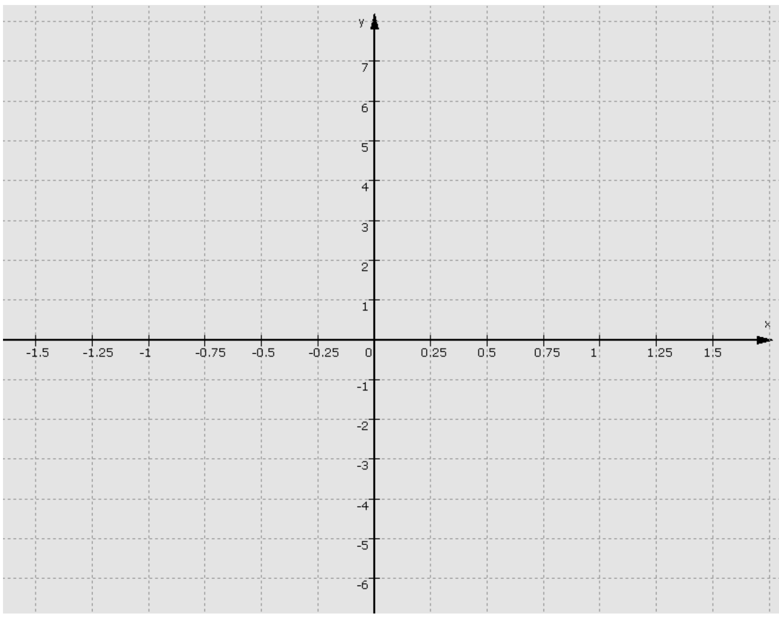
x	- 1,5	- 1	- 0,5	0	0,5	1	1,5
$f(x)$							
$g(x)$							

Zeichnen Sie die Graphen beider Funktionen f und g in <u>einem</u> Koordinatensystem im Intervall $[-1,5;1,5]$. Nutzen Sie das Koordinatensystem am Ende der Aufgabenstellung.

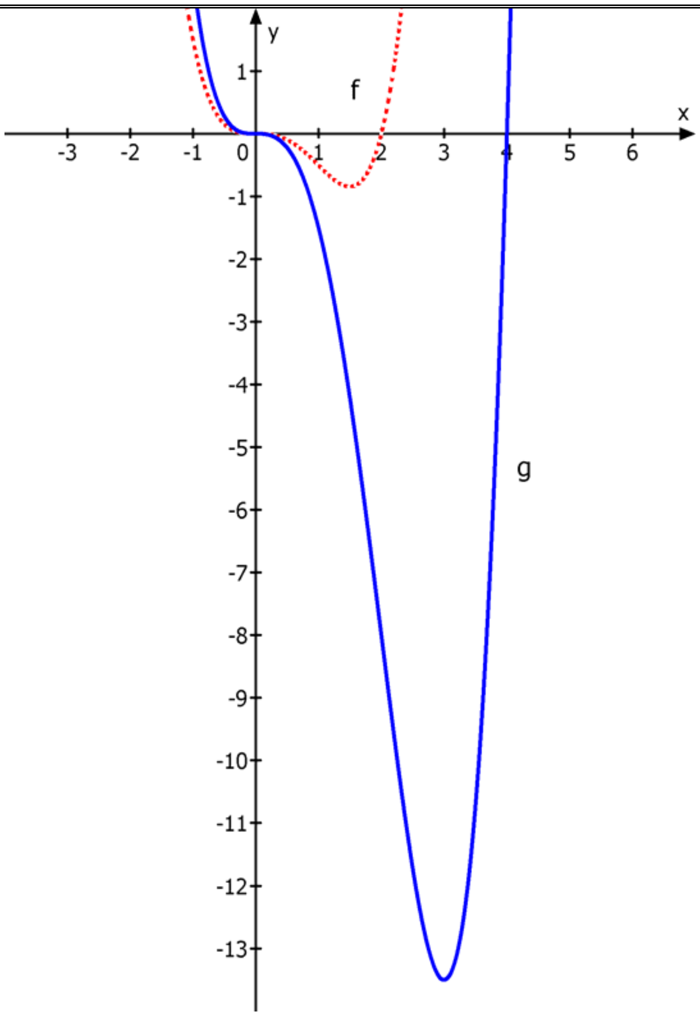
4.3. Beide Funktionsgraphen schließen eine Fläche A_1 ein. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche A_1 **/5**

4.4. Die Funktionsgraphen und die Gerade $y = 2$ schließen die Fläche A_2 ein. **/11**

Skizzieren Sie die Fläche A_2 in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie deren Inhalt.



Abschlussprüfung Fachoberschule
2010 Herbst (Mathematik)
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teil- auf- gaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	 II	 III
1.1	 Eine von mehreren Begründungen: Die Stelle 2 ist Nullstelle von f.	4		
1.2	Bestimmung des Tiefpunktes: $g'(x) = 2x^3 - 6x^2$ $g''(x) = 6x^2 - 12x$ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0$ $x = 0$; keine Extremstelle, mögliche Begründung durch Einsetzen $x = 3$; $g''(3) > 0$; $g(3) = -13{,}5 \Rightarrow T(3 \mid -13{,}5)$ ist Tiefpunkt		 1 1 3 1 2 2	

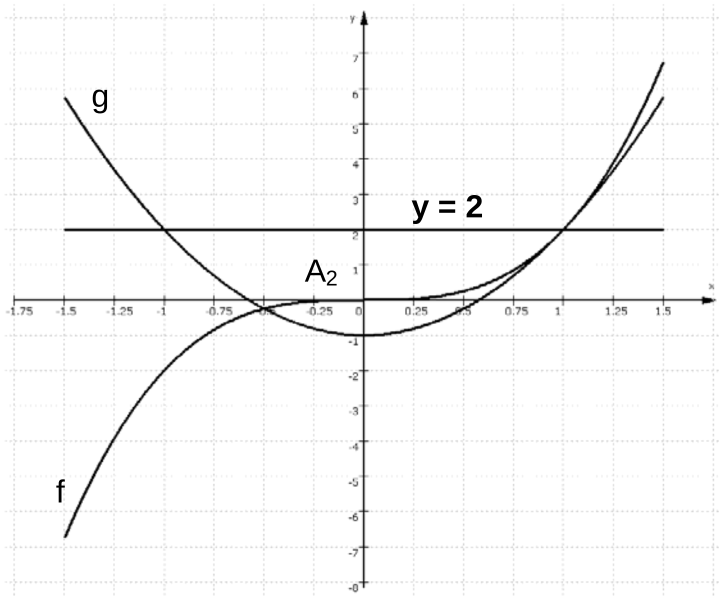
Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.3	$g''(x)=6x^2-12x$ $g'''(x)=12x-12$ $g''(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-12x=0$ $x_{W1}=0$; $g'''(0)\neq 0$; $g(0)=0 \Rightarrow W_1(0\mid 0)$ ist Wendepunkt $x_{W2}=2$; $g'''(2)\neq 0$; $g(2)=-8 \Rightarrow W_2(2\mid -8)$ ist Wendepunkt Überprüfung auf Sattelpunkt wird nicht gefordert.		1 1 2 2 2	
1.4	Bestimmung der Gleichungen der Wendetangenten: Die Wendetangente in $W_1(0\mid 0)$ ist die x-Achse, da die Kurvensteigung in W_1 gleich Null ist (also Sattelpunkt). Sie hat die Gleichung $t_1(x)=0$ oder $y=0$. Die Tangente in W_2 geht durch den Punkt $(2\mid -8)$ und hat die Steigung $g'(2)=16-24=-8$. Sie hat also die Gleichung $t_2(x)=-8x+8$ oder $y=-8x+8$.		3 3	
1.5	$A=\left\lvert\int_0^4 g(x)dx\right\rvert-\left\lvert\int_0^2 f(x)dx\right\rvert$ $=\left\lvert\left[\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{2}x^4\right]_0^4\right\rvert-\left\lvert\left[\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2\right\rvert$ $=\lvert 102,4-128-0\rvert-\lvert 3,2-4-0\rvert$ $=24,8FE$		2 2 2	
1.6	<u>Aussage a.</u> k ist keine lineare Funktion. Dieser Sachverhalt kann aus der Skizze entnommen werden. Ein rechnerischer Nachweis ist möglich, wird aber nicht verlangt. <u>Aussage b.</u> Bestimmung von a für den Fall, dass $P\in k$ $k(x)=ax^4$; $k(2)=-\frac{8}{3}\Rightarrow 16a=-\frac{8}{3}\Leftrightarrow a=-\frac{1}{6}$.		1	2

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	Prüfen, ob: $T_f \in k: -\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^4 = -\frac{81}{96} = -\frac{27}{32} \Rightarrow T_f \in k$ $T_g \in k: -\frac{1}{6}\cdot 3^4 = -\frac{81}{6} = -\frac{27}{2} \Rightarrow T_g \in k$ Die Aussage b ist wahr. Die gesuchte Funktion k hat die Funktionsgleichung: $k(x) = -\frac{1}{6}x^4$.			3
	Summe	4	31	5
	mögliche BE		40	

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.1	Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ Bedingungsgefüge: 1. $f(4) = 0$ ($x_N = 4$ ist Nullstelle) 2. $f'(4) = 0$ ($x_E = 4$ ist Extremstelle) 3. $f(2) = g(2) = -2 \cdot (2) + 8 = 4$ ($P(2 \mid f(2))$ ist gemeinsamer Punkt von g und f) 4. $f'(2) = -2$ (g ist Tangente an den Graphen von f bei $x = 2$)	1 1	1 2 1	1
2.2	Gleichungssystem: I: 0 = 64a + 16b + 4c + d II: 4 = 8a + 4b + 2c + d III: 0 = 48a + 8b + c IV: -2 = 12a + 4b + c Lösen des Gleichungssystems (ebenso Ersatz-LGS) Daraus ergibt sich (auch Ersatz-LGS): $a = \frac{1}{2}, \quad b = -4, \quad c = 8, \quad d = 0$	2	5	
2.3	Für den Funktionsterm gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$	1		
	Summe	5	9	1
	mögliche BE	15		

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
3.1	Erstellung der Zielfunktion			
	$A(r,h)=2r\cdot(h-r)+\frac{1}{2}\ \pi\cdot r^2$ als Hauptbedingung		1	
	$2=2\cdot(h-r)+\frac{1}{2}\ \pi\cdot 2r$ als Nebenbedingung $=2h-2r+\pi r$ $=2h+(\pi-2)r$			2
	Es folgt: $2h=2-(\pi-2)r$ $h=1-\frac{1}{2}\pi r+r$	1		
	Eingesetzt in die Hauptbedingung: $A(r)=2r\cdot(1-\frac{1}{2}\pi r+r-r)+\frac{1}{2}\ \pi\cdot r^2$		1	
	$=2r\cdot(1-\frac{1}{2}\pi r)+\frac{1}{2}\ \pi\cdot r^2$ $=2r-\pi r^2+\frac{1}{2}\pi r^2$ $=2r-\frac{1}{2}\pi r^2$	1		
	$V(r)=8\cdot A(r)$ $V(r)=16r-4\pi r^2$		1	
3.2	Berechnung der Abmessungen:			
	$V(r)=16r-4\pi r^2,\quad V'(r)=16-8\pi r,\quad V''(r)=-8\pi$		1	
	$V'(r)=0$ und $V''(r)\neq 0$ ist hinreichend für Extremstellen		1	
	$16-8\pi r=0\ \mid +8\pi r$ $\pi r=2\ \mid \div\pi$ $r_1=\frac{2}{\pi}\in D_V$	1		
	$\approx 0{,}64$ ist Extremstellenkandidat. Mit $V''(\frac{2}{\pi})=-8\pi$ <0 folgt,		1	
	dass $r_H=\frac{2}{\pi}$ Hochstelle von V ist. Einsetzen von r_H in die nach h umgestellte Nebenbedingung: $h_H=1-\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}$ $=\frac{2}{\pi}$	1		
	$\approx 0{,}64$ Damit die Rinne maximal viel Flüssigkeit aufnehmen			

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	kann, muss die Fläche des Querschnitts ausschließlich aus einem Halbkreis bestehen. Wegen 1 Einheit entspricht 1 *m*, ist als Radius ein Wert von ca. 0,64 m zu wählen.			1
3.3	$D_V = \left\{ r \in IR \mid 0 \le r \le \frac{2}{\pi} \right\}$ ist der Definitionsbereich. Ist der Radius $r = 0$, dann ist die Höhe 1*m*, das Blech wird nur in der Mitte um 180° gebogen – der Flächeninhalt ist dann Null. Aufgrund der Bemaßung muss die Höhe mindesten so groß sein wie der Radius. In diesem Fall (also $h = r$) ergibt sich aus Formel für die Nebenbedingung $r = \frac{2}{\pi}$		1	1
	Summe	4	7	4
	mögliche BE	15		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
auf-
gaben</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Die Gleichungen gleichsetzen und Polynomdivision des Termes ($2x^3 - 3x^2 + 1$) durch $(x – 1)$ liefert
$2x^2 - x – 1 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -\frac{1}{2}$.
Damit ist $x_1 = 1$ Doppellösung, also ist B(1/ 2) Berühr-punkt und $x_2 = -\frac{1}{2}$ liefert den Schnittpunkt
S ($-\frac{1}{2}$/$-\frac{1}{4}$).</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>f(x)</th><th>g(x)</th></tr>
<tr><td>-1,5</td><td>-6,75</td><td>5,75</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>-0,5</td><td>-0,25</td><td>-0,25</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>0,25</td><td>-0,25</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1,5</td><td>6,25</td><td>5,75</td></tr>
</table>


</td><td>3</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>$A_1 = \int_{-0,5}^{1} (2x^3 - 3x^2 + 1)dx$
$A_1 = [\,0,5\,x^4 - x^3 + x\,]_{-0,5}^{1} = \frac{27}{32}$ FE</td><td>3</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgaben	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
4.4	Skizze siehe 4.2		2	
	$A_2 = \int_{-1}^{-0,5}(2-(3x^2-1))dx + \int_{-0,5}^{1}(2-2x^3)dx$			3
	$A_2 = [\,3x - x^3\,]_{-1}^{-0,5} + [\,2x - 0,5\,x^4\,]_{-0,5}^{1}$		3	
	$A_2 = \frac{5}{8}\text{FE} + \frac{81}{32}\text{FE} = \frac{101}{32}\text{FE} = 3\frac{5}{32}\text{FE}$	3		
	Summe	9	18	3
	mögliche BE	30		