## 1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^4 - \frac{82}{9}x^2 + 1$ ; $x \in \mathbb{R}$ .
Der Graph der Funktion heißt $G_f$.

a) Begründen Sie, dass $G_f$ achsensymmetrisch zur y-Achse verläuft und geben Sie das Verhalten der Funktion f im Unendlichen an.

b) Ermitteln Sie rechnerisch die Nullstellen von f und geben Sie den Schnittpunkt von $G_f$ mit der y-Achse an.

c) Von einer beliebigen ganzrationalen Funktion 4. Grades seien zwei Stellen $x_1$ und $x_2$ bekannt, an denen der Anstieg des zugehörigen Graphen Null beträgt.
Begründen Sie zu jeder der folgenden drei Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist:

   *I. Die beiden Tangenten an den Graphen der Funktion f an den Stellen $x_1$ und $x_2$ verlaufen parallel.*

   *II. Beide Stellen $x_1$ und $x_2$ müssen Extremstellen der Funktion sein.*

   *III. Wenn sich bei $x_1$ und bei $x_2$ Hochpunkte befinden, dann muss der Graph auch einen weiteren Extrempunkt besitzen.*

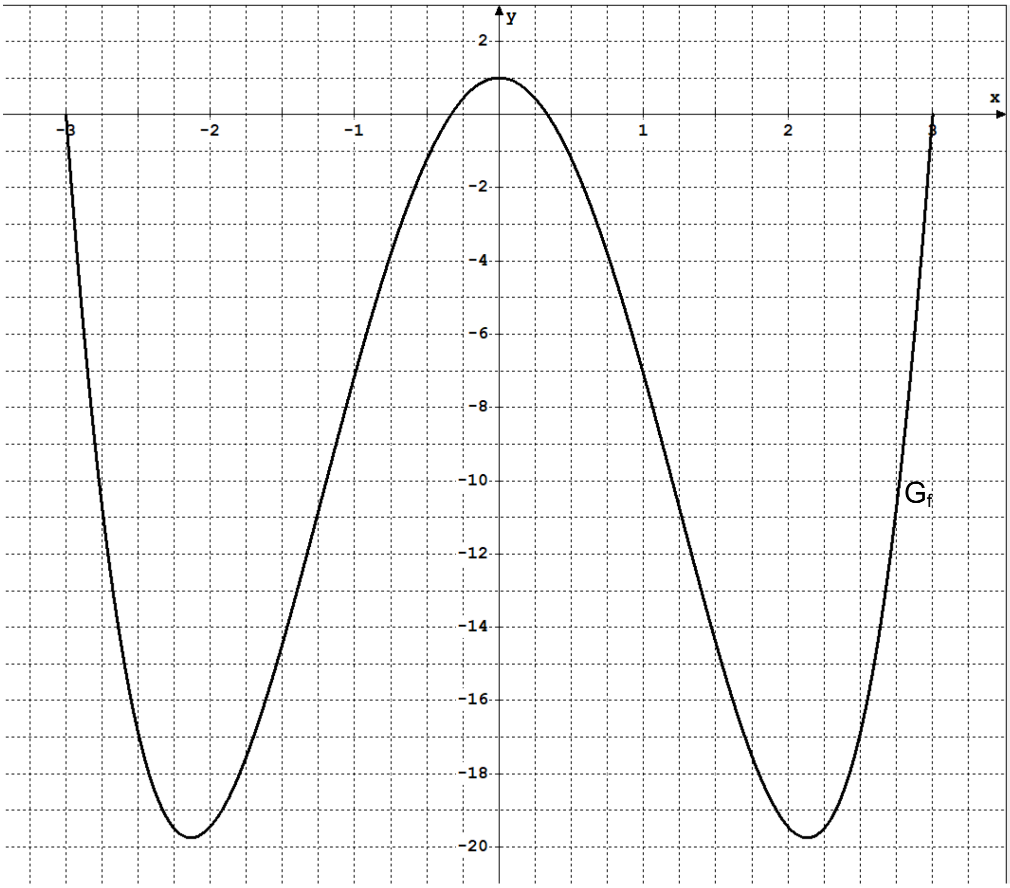
   Berechnen Sie nun konkret von der Funktion f die Koordinaten aller Punkte, in denen der Anstieg von $G_f$ Null beträgt.

d) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten aller Wendepunkte von $G_f$.
Geben Sie die Krümmungsintervalle des Graphen an und begründen Sie jeweils die Art der Krümmung.

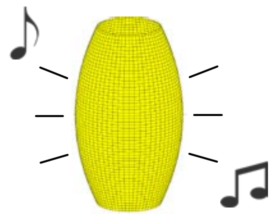
e) Zeichnen Sie $G_f$ im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | e) | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 5 | 9 | 9 | 3 | 29 |

| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|---|---|---|
| 1a) | Begründung der Achsensymmetrie durch Nachweis von $f(-x) = f(x)$ oder über die Existenz lediglich gerader Exponenten | 1 |
| | $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$<br>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ | 2 |
| 1b) | $f(x) = 0 = x^4 - \frac{82}{9}x^2 + 1 \quad \vert \text{Subst. } x^2 = z$<br>$0 = z^2 - \frac{82}{9}z + 1$<br>$z_{1/2} = \frac{41}{9} \pm \sqrt{\left(\frac{41}{9}\right)^2 - 1}$<br>$z_1 = 9; \quad x_{1/2} = \pm 3$<br>$z_2 = \frac{1}{9}; \quad x_{3/4} = \pm\frac{1}{3} \approx \pm 0{,}33$ | 4 |
| | $S_y(0\vert 1)$ | 1 |
| 1c) | I. Richtig, denn beide Tangenten haben den gleichen Anstieg bzw. verlaufen parallel zur x-Achse. | 1 |
| | II. Falsch, denn eine Stelle könnte auch eine Sattelstelle sein. | 1 |
| | III. Richtig, denn zwischen zwei Hochpunkten muss es einen Tiefpunkt geben. | 1 |
| | $f'(x) = 4x^3 - \frac{164}{9}x$ | 1 |
| | $f'(x) = 0 = x\left(4x^2 - \frac{164}{9}\right)$<br>$x_1 = 0; \quad x_{2/3} \approx \pm 2{,}13$ | 3 |
| | $f(0) = 1; \qquad P_1(0\vert 1)$ (siehe 1b))<br>$f(\pm 2{,}13) \approx -19{,}75; \qquad P_{2,3}(\pm 2{,}13\vert -19{,}75)$ | 2 |
| 1d) | $f''(x) = 12x^2 - \frac{164}{9}$<br>$f'''(x) = 24x$ | 2 |
| | $f''(x) = 0$<br>$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{41}{27}} \approx \pm 1{,}23$ | 2 |
| | $f'''(-1{,}23) = -29{,}52 \neq 0; \quad f(-1{,}23) \approx -10{,}5; \quad W_1(-1{,}23 \vert -10{,}5)$<br>$f'''(\;1{,}23) = \;29{,}52 \neq 0; \quad f(\;1{,}23) \approx -10{,}5; \quad W_2(\;1{,}23 \vert -10{,}5)$ | 2 |

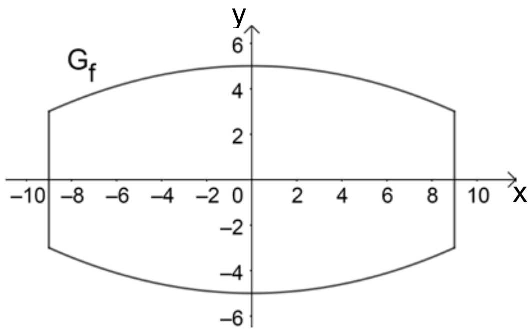
| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|---|---|---|
| zu 1d) | Krümmungsverhalten:<br>$I_1$: $(-\infty; -1{,}23)$ ; $f''(-2) = \frac{268}{9} > 0$ $\Rightarrow$ konvex bzw. linksgekrümmt<br>$I_2$: $(-1{,}23\ ;\ 1{,}23)$ ; $f''(0) = -\frac{164}{9} < 0$ $\Rightarrow$ konkav bzw. rechtsgekrümmt<br>$I_3$: $(\ 1{,}23\ ;\ \infty)$ ; $f''(2) = \frac{268}{9} > 0$ $\Rightarrow$ konvex bzw. linksgekrümmt | 3 |
| 1e) |  | 3 |
| | Summe | 29 |

## 2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung



Ein gewölbter Lautsprecher besitzt eine Höhe von 18 cm und einen maximalen Durchmesser von 10 cm. An der Ober- und Unterseite beträgt der Durchmesser jeweils 6 cm.

Die Mantelfläche des Lautsprechers kann mit Hilfe des Graphen $G_f$ einer Funktion f beschrieben werden, der um die x-Achse rotiert. Dabei entspricht eine Einheit im Koordinatensystem auch einem Zentimeter in der Wirklichkeit. Der Querschnitt des liegenden Lautsprechers ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.




a) $G_f$ ist der zur y-Achse symmetrische Graph einer quadratischen Funktion.
Ermitteln Sie mit Hilfe der genannten Daten eine zugehörige Funktionsgleichung von f.
(zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{2}{81}x^2 + 5$ )

b) Berechnen Sie das Volumen des Lautsprechers in Litern.

Diese Lautsprechermodelle besitzen im Inneren eine rechteckige Platine für die Elektronik, deren Eckpunkte P(–x| –f(x)), Q(x| –f(x)), R(x| f(x)) und S(–x| f(x)) an der Außenwand liegen und sich für eine vorgegebene reelle Zahl x zwischen 0 und 9 konkret berechnen lassen.

c) Für die Platine des aktuellen Modells gilt x = 6 und somit z. B. $P\left(-6 \mid -\frac{37}{9}\right)$.

Skizzieren Sie diese Platine PQRS in die obige Abbildung 2 und bestimmen Sie ihren Flächeninhalt.

d) Für eine Weiterentwicklung des Produkts soll die äußere Form des Lautsprechers unverändert bleiben, jedoch muss die rechteckige Platine für die Ergänzung weiterer Funktionen vergrößert werden. Zeigen Sie rechnerisch, dass mit Hilfe der Zielfunktion $A(x) = -\frac{8}{81}x^3 + 20x$ der Flächeninhalt für ein beliebiges x berechnet werden kann.

e) Ermitteln Sie anhand der Funktion A(x) den größtmöglichen Flächeninhalt der Platine.

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | e) | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 4 | 5 | 4 | 3 | 5 | 21 |

| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|---|---|---|
| 2a) | $f(x) = ax^2 + b$<br>$f(0) = 5: \quad b = 5$<br>$f(9) = 3: \quad 81a + b = 3$<br>$f(x) = -\frac{2}{81}x^2 + 5$ | 4 |
| 2b) | $[f(x)]^2 = \left(-\frac{2}{81}x^2 + 5\right)^2 = \frac{4}{6561}x^4 - \frac{20}{81}x^2 + 25$<br>$V = \pi \cdot \int_{-9}^{9} [f(x)]^2\,dx = \pi \cdot \left[\frac{4}{32805}x^5 - \frac{20}{243}x^3 + 25x\right]_{-9}^{9}$<br>$= \pi \cdot \left(\frac{861}{5} - \left(-\frac{861}{5}\right)\right) = \pi \cdot \frac{1722}{5} \approx 1081{,}96\,\text{VE}$<br>Das Volumen beträgt 1081,96 cm³ und entspricht somit etwa 1,08 l. | 5 |
| 2c) | Skizzieren des Rechtecks in die Abbildung 2<br>$A = a \cdot b$ mit $a = 2 \cdot 6\,\text{cm}$ und $b = 2 \cdot f(6) = \frac{74}{9}$<br>$A = 12 \cdot \frac{74}{9} = \frac{296}{3} \approx 98{,}67\,\text{FE}$<br>Die Platine besitzt einen Flächeninhalt von 98,67 cm². | 1<br><br>3 |
| 2d) | HB: $A(x) = a \cdot b$<br>NB: $a = 2x$ und $b = 2 \cdot f(x)$<br>ZF: $A(x) = 4x \cdot \left(-\frac{2}{81}x^2 + 5\right) = -\frac{8}{81}x^3 + 20x$ | 3 |
| 2e) | $A'(x) = -\frac{24}{81}x^2 + 20; \qquad A''(x) = -\frac{48}{81}x$<br>$A'(x) = -\frac{24}{81}x^2 + 20 = 0$<br>$x_{1/2} \approx \pm 8{,}22$<br>$A''(8{,}22) \approx -4{,}87 < 0$ Maximum<br>$A(8{,}22) \approx 109{,}54\,\text{FE}$<br>Die Platine kann einen maximalen Flächeninhalt von 109,54 cm² besitzen. | 2<br><br>3 |
| | Summe | 21 |

## 3. Aufgabe: Stochastik

Im Rahmen eines Treffens von sechs Schüler/innen wurde über den wöchentlichen Zeitaufwand für Hausaufgaben diskutiert. Sie gaben ihren Zeitaufwand folgendermaßen an: 30 min, 140 min, 90 min, 80 min, 120 min und 200 min.

a) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung des wöchentlichen Zeitaufwands für Hausaufgaben der sechs Schüler/innen.

Aufgrund der großen individuellen Unterschiede wurden nun alle Schüler/innen des 12. Jahrgangs befragt. Die in vier Klassen eingeteilten Zeitangaben sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen:

| Zeitaufwand in min | $0 \le x < 60$ | $60 \le x < 120$ | $120 \le x < 180$ | $180 \le x < 240$ |
|---|---|---|---|---|
| Anzahl Personen | 10 | 21 | 38 | 31 |

b) Geben Sie zu jeder Klasse die zugehörige relative Häufigkeit an.
Ermitteln Sie die Klasse, in der sich der Median der erfassten Daten befindet.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass der durchschnittliche Zeitaufwand aller Schüler/innen für Hausaufgaben bei 144 min pro Woche liegt und berechnen Sie die dazugehörige Standardabweichung mit Hilfe der vorgegebenen Klasseneinteilung.
Im Jahrgang zuvor wurde zufälligerweise der gleiche durchschnittliche Zeitaufwand pro Woche festgestellt, jedoch mit einer deutlich höheren Standardabweichung.
Vergleichen Sie die beiden Jahrgänge hinsichtlich des häuslichen Fleißes.

Die 31 Schüler/innen, die wöchentlich mindestens drei Stunden für Hausaufgaben aufwenden, fühlen sich überlastet. Die anderen Befragten fühlen sich nicht überlastet.

d) Die Schulleitung wählt zufällig drei Personen des Jahrgangs aus und befragt diese, ob sie sich überlastet fühlen. Stellen Sie diesen Zufallsversuch in einem Baumdiagramm dar und ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

A: Es werden drei Personen ausgewählt, die sich nicht überlastet fühlen.
B: Es werden mindestens zwei Personen ausgewählt, die sich überlastet fühlen.

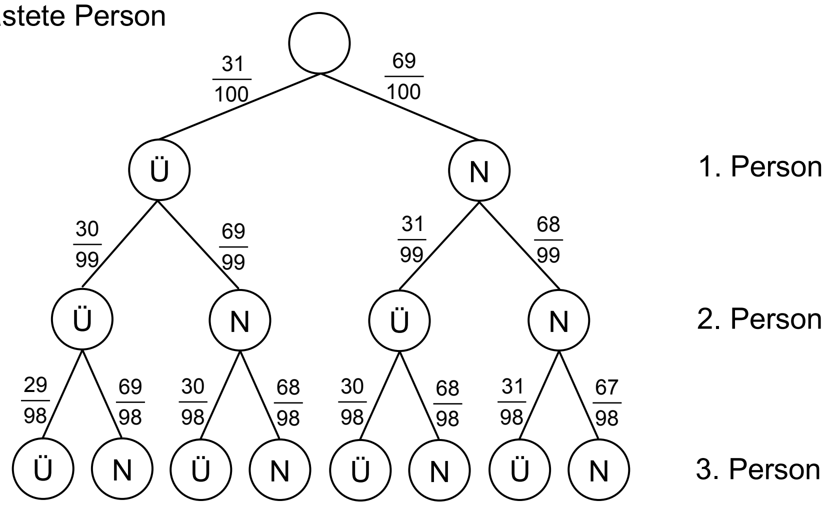
e) Nach Abschluss der Prüfungen stellt sich heraus, dass überlastete Schüler/innen einen Notendurchschnitt von 2,20 erreichten. Der Notenschnitt des gesamten 12. Jahrgangs beträgt 2,40. Bestimmen Sie den Notendurchschnitt der Prüflinge, die zuvor nicht über eine Überlastung geklagt hatten.

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | e) | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 3 | 3 | 6 | 6 | 2 | 20 |

| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|---|---|---|
| 3a) | $\bar{x} = \frac{1}{6}(30+140+90+80+120+200) = \frac{660}{6} = 110$<br>$\left(s^2 = \frac{1}{6}\left[(30-110)^2 + (140-110)^2 + ... + (200-110)^2\right] = 2800\right)$<br>$s = \sqrt{2800} \approx 52{,}92$<br>(Alternativergebnis bei Verwendung der „n-1"-Formel: $s \approx 57{,}97$)<br><br>Das arithmetische Mittel beträgt 110 min und die Standardabweichung etwa 52,92 min. | 3 |
| 3b) | (Tabelle siehe unten) | 1 |
| | Da genau 100 Werte erfasst wurden, liegt der Median zwischen dem 50. und 51. Wert. Es befinden sich insgesamt 31 Werte in den ersten beiden Klassen und auch 31 Werte in der letzten der vier Klassen. Somit liegt der Median in der Klasse von 120 bis 180 min. | 2 |
| 3c) | Verwendung der Klassenmitten zur Berechnung<br>$\bar{x} = \frac{1}{100}(10\cdot 30 + 21\cdot 90 + 38\cdot 150 + 31\cdot 210) = 144$<br>$\left(s^2 = \frac{1}{100}\left[10\cdot(30-144)^2 + 21\cdot(90-144)^2 + 38\cdot(150-144)^2 + 31\cdot(210-144)^2\right] = 3276\right)$<br>$s = \sqrt{3276} \approx 57{,}24$<br>(Alternativergebnis bei Verwendung der „n-1"-Formel: $s \approx 57{,}52$)<br><br>Der durchschnittliche Zeitaufwand pro Woche liegt bei 144 min und die Standardabweichung bei 57,24 min. | 4 |
| | Eine deutlich höhere Standardabweichung bei gleichem arithmetischen Mittel im Jahrgang zuvor bedeutet, dass es dort tendenziell deutlich mehr Schüler/innen gab, die zu Hause besonders fleißig bzw. sehr faul waren im Vergleich zum aktuellen Jahrgang. | 2 |

Tabelle zu 3b):

| Zeitaufwand in min | 0 ≤ x < 60 | 60 ≤ x < 120 | 120 ≤ x < 180 | 180 ≤ x < 240 |
|---|---|---|---|---|
| Anzahl Personen | 10 | 21 | 38 | 31 |
| relative Häuf. | 0,1 | 0,21 | 0,38 | 0,31 |

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3d)</td><td>Ü: Überlastete Person<br>N: Nicht überlastete Person<br>
<br>$P(A)=\frac{69}{100}\cdot\frac{68}{99}\cdot\frac{67}{98}\approx 32{,}40\,\%$<br>$P(B)=\frac{31}{100}\cdot\frac{30}{99}\cdot\frac{29}{98}+\frac{31}{100}\cdot\frac{30}{99}\cdot\frac{69}{98}+\frac{31}{100}\cdot\frac{69}{99}\cdot\frac{30}{98}+\frac{69}{100}\cdot\frac{31}{99}\cdot\frac{30}{98}\approx 22{,}62\,\%$</td><td>3<br><br>3</td></tr>
<tr><td>3e)</td><td>$0{,}31\cdot 2{,}20+0{,}69\cdot x=2{,}40$<br>$x=\frac{859}{345}\approx 2{,}49$<br><br>Der Notendurchschnitt der nicht überlasteten Schüler/innen beträgt etwa 2,49.</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>20</td></tr>
</table>