1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = (2-x)\cdot(x+1)\cdot(x+2);\ x \in IR$.
Der Graph der Funktion heißt G_f.

a) Zeigen Sie, dass G_f auch durch die Funktionsgleichung $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 4$ beschrieben werden kann.

b) Geben Sie die Achsenschnittpunkte von G_f an.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von G_f und weisen Sie die Art der Extrema nach.

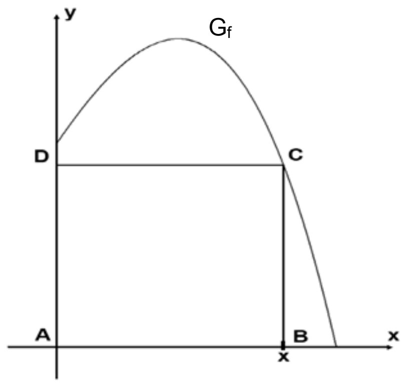
d) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Punkt P(–3|10) auf G_f liegt.
Bestimmen Sie den Anstieg von G_f im Punkt P.

e) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-2,5 \le x \le 2,5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

f) Ein Rechteck ABCD soll so in das Koordinatensystem gelegt werden, dass der Punkt A im Koordinatenursprung, B auf der x-Achse und D auf der y-Achse liegt. Der Punkt C befindet sich auf G_f im ersten Quadranten (siehe Abbildung).

Zeigen Sie, dass sich der Umfang dieses Rechtecks mit der Funktionsgleichung $u(x) = -2x^3 - 2x^2 + 10x + 8$ ermitteln lässt, wobei x die x-Koordinate der Punkte B und C ist.

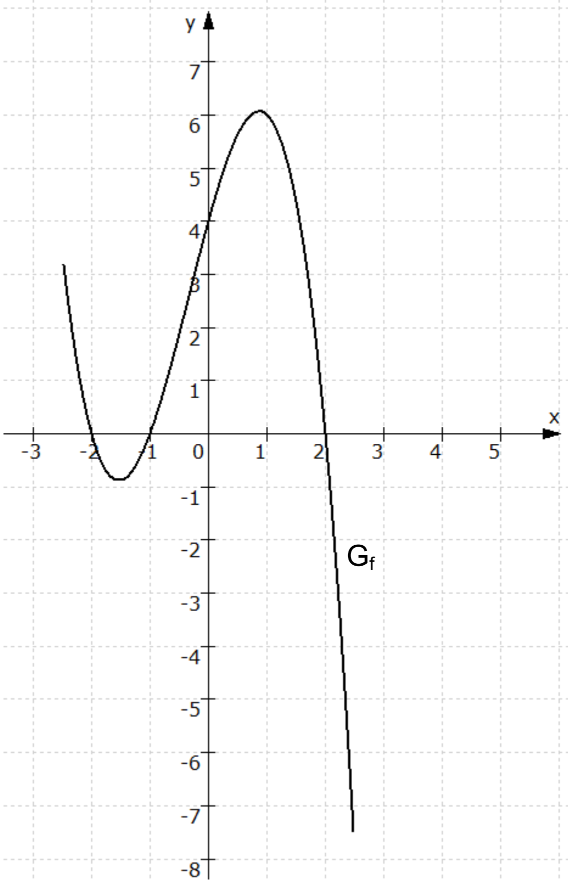
Bestimmen Sie rechnerisch die x-Koordinate der Punkte B und C, damit der Umfang maximal wird.



Abbildung, nicht maßstabsgerecht

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	2	2	11	2	3	8	28

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	$(2-x)\cdot(x+1)\cdot(x+2)=(4-x^2)\cdot(x+1)=-x^3-x^2+4x+4$	2
1b)	$S_{x1}(-1\,\|\,0)$; $S_{x2}(-2\,\|\,0)$; $S_{x3}(2\,\|\,0)$; $S_y(0\,\|\,4)$	2
1c)	$f'(x)=-3x^2-2x+4$; $f''(x)=-6x-2$; $f'''(x)=-6$	3
	Extrempunkte: $f'(x)=-3x^2-2x+4=0$ $x_1\approx-1{,}54$; $x_2\approx0{,}87$	2
	$f''(-1{,}54)=7{,}24>0$; $f(-1{,}54)\approx-0{,}88$; $T(-1{,}54\,\|\,-0{,}88)$ $f''(0{,}87)=-7{,}22<0$; $f(0{,}87)\approx6{,}06$; $H(0{,}87\,\|\,6{,}06)$	3
	Wendepunkt: $f''(x)=-6x-2=0$ $x\approx-0{,}33$ $f'''(-0{,}33)=-6\neq0$; $f(-0{,}33)\approx2{,}61$; $W(-0{,}33\,\|\,2{,}61)$	3
1d)	Nachweis P liegt auf G_f: $f(-3)=10$; $\Rightarrow P(-3\,\|\,10)$ liegt auf G_f	1
	Anstieg: $m=f'(-3)=-17$	1

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1e)		3
1f)	$HB: u = 2x + 2y$ $NB: f(x) = y = -x^3 - x^2 + 4x + 4$ $ZF: u(x) = -2x^3 - 2x^2 + 10x + 8$ $u'(x) = -6x^2 - 4x + 10;\qquad u''(x) = -12x - 4$ $u'(x) = -6 \cdot \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) = 0$ $x_1 = 1$ ($x_2 = -\frac{5}{3}$ liegt nicht im Intervall) $u''(1) = -16 < 0$ Wenn die Punkte B und C an der Stelle $x = 1$ liegen, wird der Umfang des Rechtecks maximal.	3 2 2 1
	Summe	28

2. Aufgabe: Differentialrechnung und Integralrechnung

Bei der Sanierung eines Kirchenfensters (siehe Abbildung) soll der obere Fensterbereich durch eine blaue Glasscheibe und der untere durch eine rote Glasscheibe ersetzt werden. Beide Glasscheiben schließen nahtlos aneinander an.
Die blaue Glasscheibe kann als Fläche zwischen den Graphen der Funktionen f und g aufgefasst werden. Eine Längeneinheit entspricht 25 cm.

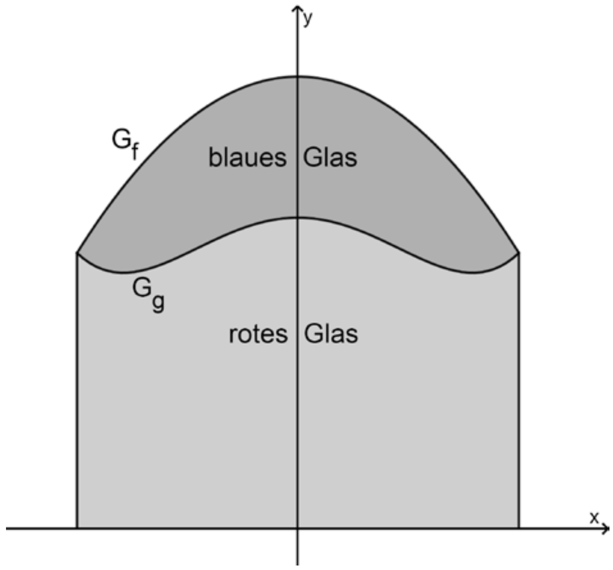
Gegeben sind die Funktionsgleichungen der Funktionen f und g mit
$f(x) = -0{,}2x^2 + 8{,}2$ und $g(x) = 0{,}01x^4 - 0{,}2x^2 + 5{,}64$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die Graphen von f und g nur an den Stellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 4$ schneiden und geben Sie die Breite beider Glasscheiben in m an.

b) Ermitteln Sie rechnerisch den Höhenunterschied (zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt) der blauen Glasscheibe in m.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der blauen Glasscheibe in m².

d) Bestimmen Sie den Anteil der Fläche aus rotem Glas an der gesamten Fensterfläche.



Abbildung, nicht maßstabsgerecht

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	4	7	5	5	21

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$f(x) = g(x)$ $0 = 0{,}01x^4 - 2{,}56$ $x_{1/2} = \pm 4$ $8\,LE \mathrel{\hat{=}} 2\,m$ Beide Glasscheiben sind 2 m breit.	4
2b)	Die höchste Stelle von G_f liegt am Schnittpunkt mit der y-Achse bzw. Scheitelpunkt: $y_f = 8{,}2$	1
	Die tiefste Stelle von G_g liegt an einem Tiefpunkt: $g'(x) = 0{,}04x^3 - 0{,}4x$	1
	$g'(x) = x \cdot \left(0{,}04x^2 - 0{,}4\right) = 0$ $x_1 = 0;\quad x_{2,3} = \pm\sqrt{10} \approx \pm 3{,}16$	2
	x_1 ist eine Maximalstelle und entfällt (Begründung über Skizze oder 2. Ableitung). $y_g = g\left(\pm 3{,}16\right) \approx 4{,}64$ $y_f - y_g = 3{,}56\,LE \mathrel{\hat{=}} 0{,}89\,m$ Die Höhe der blauen Glasscheibe beträgt 0,89 m.	3
2c)	$A = \int_{-4}^{4} (f(x) - g(x))dx = \int_{-4}^{4} \left(-0{,}01x^4 + 2{,}56\right)dx$ $= \left[-\frac{1}{500}x^5 + 2{,}56x\right]_{-4}^{4} = \frac{2048}{125} \approx 16{,}38\,FE$	4
	Die blaue Fensterfläche besitzt einen Flächeninhalt von rund 1,02 m².	1
2d)	$A = \int_{-4}^{4} g(x)dx = \left[\frac{1}{500}x^5 - \frac{1}{15}x^3 + 5{,}64x\right]_{-4}^{4} = \frac{15256}{375} \approx 40{,}68\,FE$	3
	Anteil des roten Glases an der Gesamtfläche: $\frac{40{,}68}{16{,}38 + 40{,}68} = \frac{226}{317} \approx 71{,}29\,\%$	2
	Summe	21

3. Aufgabe: Stochastik

Ein Modegeschäft bietet Ketten in sieben Varianten an, die sich nur in der Farbe unterscheiden. Die durchschnittlichen Verkaufszahlen pro Woche sind in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

Farbe	weiß	grün	pink	rot	blau	lila	schwarz
Anzahl	27	4	3	6	17	16	27

a) Bestimmen Sie rechnerisch die relativen Häufigkeiten der verkauften Ketten für jede Farbe und veranschaulichen Sie diese in einem geeigneten Diagramm.

b) Auf Grund der unterschiedlichen Nachfrage wurde der Preis der weißen und schwarzen Ketten auf fünf Euro und der Preis aller weiteren Ketten jeweils auf drei Euro gesetzt. Bestimmen Sie die durchschnittlichen Einnahmen pro Woche durch den Kettenverkauf.

c) Die Restbestände von 100 grünen und 50 pinken Ketten werden in einer gemeinsamen Kiste aufbewahrt. Ein Stammkunde darf sich mit verdeckten Augen drei Ketten nacheinander herausgreifen.

Veranschaulichen Sie dieses Zufallsexperiment in einem vollständigen Baumdiagramm. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Alle drei gezogenen Ketten sind pink.
B: Es wird mindestens eine grüne Kette gezogen.
C: Genau zwei der drei gezogenen Ketten sind gleichfarbig.

Um einen gleichmäßigen Verkauf der Ketten zu ermöglichen, werden diese nur noch in 7er-Sets mit je einer Kette pro Farbe angeboten.

d) Eine Frau trägt gerne mehrere Ketten gleichzeitig. Vergleichen Sie die Anzahl an Möglichkeiten, zwei oder fünf Ketten aus einem Set auszuwählen.

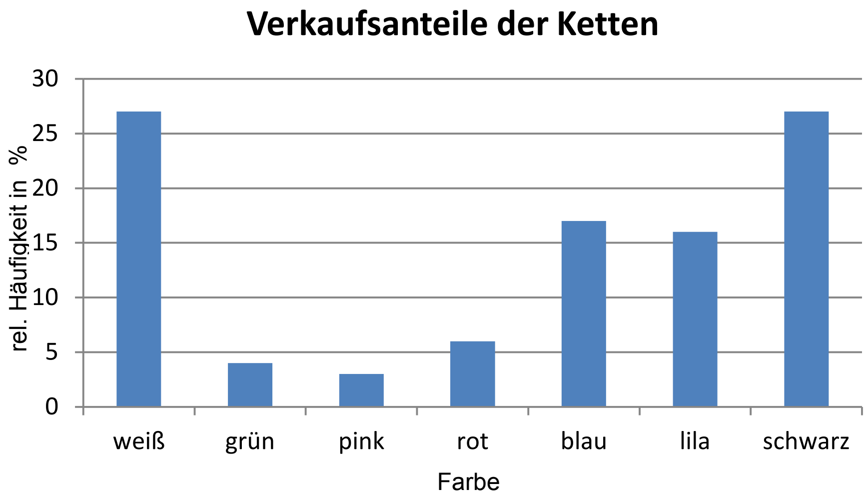
e) Eine Frau möchte die sieben Ketten eines Sets unter Berücksichtigung der Farbe auf Freundinnen verteilen. Ermitteln Sie die Anzahl an Möglichkeiten jeweils unter der folgenden Bedingung:

I: Jede von sieben Freundinnen bekommt genau eine Kette.
II: Jede von sieben Freundinnen kann mehrere Ketten oder auch gar keine Kette bekommen.
III: Jede von 10 Freundinnen bekommt höchstens eine Kette.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	3	2	7	3	6	21

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>

<table>
<tr><td>Farbe</td><td>weiß</td><td>grün</td><td>pink</td><td>rot</td><td>blau</td><td>lila</td><td>schwarz</td></tr>
<tr><td>Rel. Häufigkeit</td><td>0,27</td><td>0,04</td><td>0,03</td><td>0,06</td><td>0,17</td><td>0,16</td><td>0,27</td></tr>
</table>



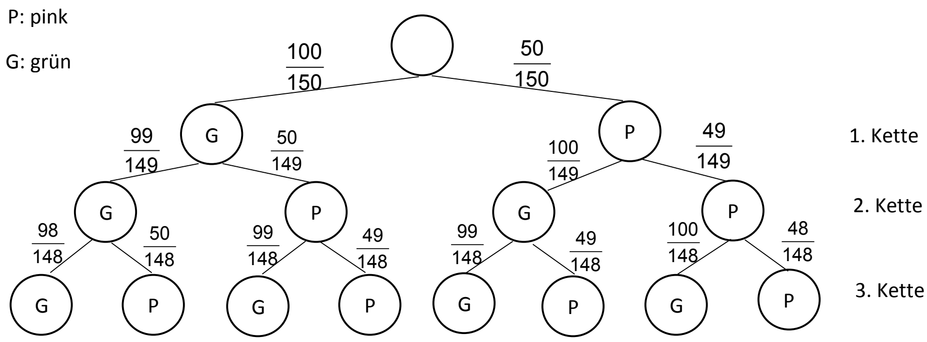
</td><td>1

2</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>

$5 \cdot (27 + 27) + 3 \cdot (4 + 3 + 6 + 17 + 16) = 408\,€$

Die Einnahme pro Woche entspricht 408 €.

</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3c)</td><td>



$$P(A) = \frac{50}{150} \cdot \frac{49}{149} \cdot \frac{48}{148} = \frac{196}{5513} \approx 3{,}56\%$$

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{196}{5513} \approx 96{,}44\%$$

$$P(C) = 3 \cdot \left(\frac{100}{150} \cdot \frac{99}{149} \cdot \frac{50}{148}\right) + 3 \cdot \left(\frac{100}{150} \cdot \frac{50}{149} \cdot \frac{49}{148}\right) = \frac{100}{149} \approx 67{,}11\%$$

</td><td>3

1

1

2</td></tr>
<tr><td>3d)</td><td>

$C_7^5 = \binom{7}{5} = 21;$ $\quad C_7^2 = \binom{7}{2} = 21$

Die Anzahl der Möglichkeiten ist gleich.

</td><td>3</td></tr>
</table>

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3e)	$\mathrm{I:}\quad P_7 = 7! = 5040$ Möglichkeiten der Kettenverteilung	2
	$\mathrm{II:}\quad \overline{V}_7^7 = 7^7 = 823.543$ Möglichkeiten der Kettenverteilung	2
	$\mathrm{III:}\quad V_{10}^7 = \frac{10!}{3!} = 604.800$ Möglichkeiten der Kettenverteilung	2
	Summe	21