1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 4x^2 - 2;\ x \in \mathrm{IR}$.

Der Graph der Funktion heißt G_f.

a) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr sind und begründen Sie Ihre Antwort:

(1) G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

(2) S(–2|0) ist der Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse.

(3) Die beiden Grenzwerte $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ sind verschieden.

(4) Der Punkt P(–1|1,5) liegt auf G_f .

b) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f und ihre Art.

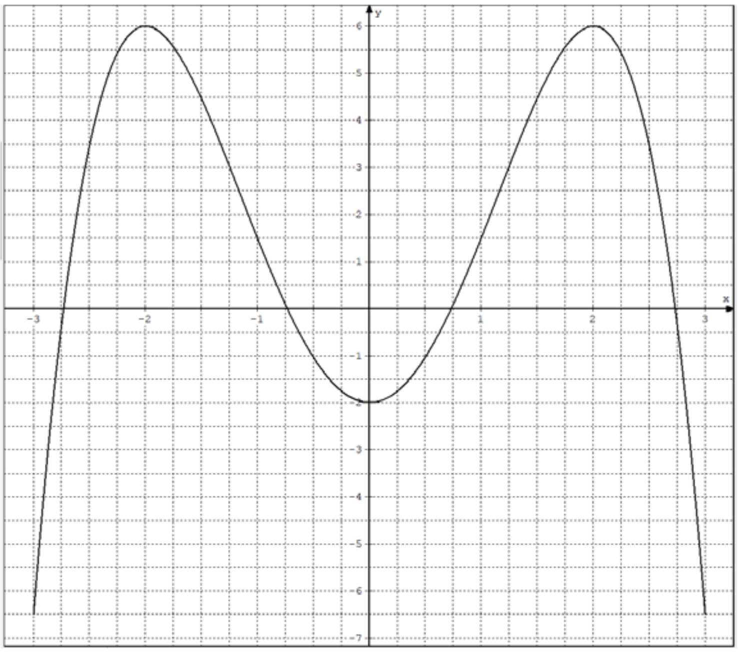
d) Ermitteln Sie die Koordinaten aller Wendepunkte von G_f.

e) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-3 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

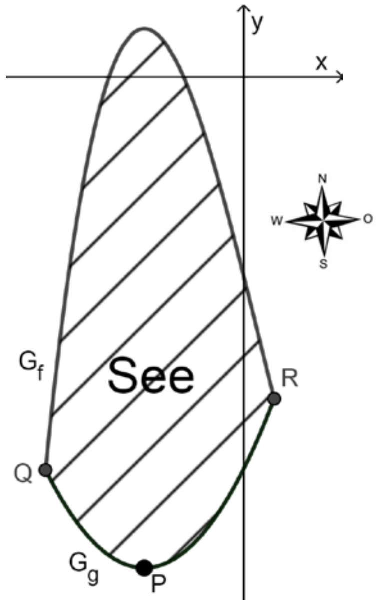
f) Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung für die Tangente t an den Graphen von f, die G_f an der Stelle $x = -1$ berührt.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	8	4	7	5	3	3	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	(1) wahr, da $f(x)=f(-x)$ bzw. nur gerade Exponenten vorhanden sind (2) falsch, da die x-Koordinate ungleich 0 ist (3) falsch, da bei Funktionen 4. Grades beide Grenzwerte gleich sein müssen (4) wahr, denn $f(-1)=1{,}5$ (Begründungen beispielhaft)	2 2 2 2
1b)	$0=f(x)=-\frac{1}{2}x^4+4x^2-2=-\frac{1}{2}(z^2-8z+4)$ mit $x^2=z$ $z_1\approx 7{,}46;\quad x_{1/2}\approx \pm 2{,}73$ $z_2\approx 0{,}54;\quad x_{3/4}\approx \pm 0{,}73$	4
1c)	$f'(x)=-2x^3+8x;\quad f''(x)=-6x^2+8$ $f'(x)=0=x(-2x^2+8)$ $x_1=0;\quad x_{2/3}=\pm 2$ $f''(-2)=-16<0;\quad f(-2)=6;\quad H_1(-2\mid 6)$ $f''(0)=8>0;\quad f(0)=-2;\quad T(0\mid -2)$ $f''(2)=-16<0;\quad f(2)=6;\quad H_2(2\mid 6)$	2 2 3
1d)	$f'''(x)=-12x$ $f''(x)=-6x^2+8=0;$ $x_1=\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 1{,}15;\quad f'''(1{,}15)=-13{,}8\neq 0;\quad f(1{,}15)=2{,}42;\quad W_1(1{,}15\mid 2{,}42)$ $x_2=-\sqrt{\frac{4}{3}}\approx -1{,}15;\quad f'''(-1{,}15)=13{,}8\neq 0;\quad f(-1{,}15)=2{,}42;\quad W_2(-1{,}15\mid 2{,}42)$	1 4

1e)		3
1f)	$t: y = mx + n$ mit $x = -1$ $m = f'(-1) = -6$ $y = f(-1) = 1{,}5$ $n = y - mx = 1{,}5 - (-6)\cdot(-1) = -4{,}5$ $t: y = -6x - 4{,}5$	3
	Summe	30

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung



Die Uferlinie eines Sees lässt sich modellhaft mit Hilfe der Graphen zweier ganzrationaler Funktionen beschreiben (siehe Abbildung).
Eine Längeneinheit entspricht dabei 2 km in der Wirklichkeit.

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x - 2\,;\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Auf dem Graphen G_f der Funktion f liegt modellhaft der nördliche Bereich der Uferlinie.

Der südliche Bereich liegt auf dem Graphen G_g der Funktion g.

a) Von der quadratischen Funktion g ist bekannt, dass der Graph die y-Achse bei y = –4 schneidet und die Punkte P(–1|–5) und Q(–2|–4) auf G_g liegen.
Bestimmen Sie rechnerisch eine Funktionsgleichung von g.
(Kontrollergebnis: $g(x) = x^2 + 2x - 4$)

b) Ermitteln Sie den Abstand des nördlichsten Punktes vom Punkt P des Sees.

c) Die beiden Graphen schneiden sich unter anderem im gegebenen Punkt Q und im Punkt R (siehe Abbildung).
Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes R und bestimmen Sie den Inhalt der Seeoberfläche in km².

Aufgabenteil	a)	b)	c)	Summe
Punkte	6	6	8	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$g(x) = ax^2 + bx + c$ $g(0) = -4;\quad c = -4$ $g(-1) = -5;\quad a - b + c = -5$ $g(-2) = -4;\quad 4a - 2b + c = -4$	4
	Lösung des LGS: $a = 1;\ b = 2;\ c = -4$ Die Funktion lässt sich mit Hilfe der Gleichung $g(x) = x^2 + 2x - 4$ darstellen.	2
2b)	$f'(x) = 3x^2 - x - 4;\quad f''(x) = 6x - 1$	2
	$f'(x) = 0$ $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3} = 0$ $x_1 = \frac{4}{3};\quad x_2 = -1$ $f''\left(\frac{4}{3}\right) = 7 > 0$ Minimum; Dort kann somit nicht der nördlichste Punkt liegen. $f''(-1) = -7 < 0$ Maximum; $f(-1) = 0,5$ $H(-1 \mid 0,5)$ liegt am nördlichsten. $H(-1 \mid 0,5)$ und $P(-1 \mid -5)$ haben die gleiche x-Koordinate. Abstand der beiden Punkte: $y_H - y_P = 0,5 - (-5) = 5,5\,\text{LE}$ $5,5 \cdot 2\,\text{km} = 11\,\text{km}$ Der Abstand der beiden Punkte beträgt 11 km.	4
2c)	$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x - 2 - (x^2 + 2x - 4) = x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2$ Schnittstellenberechnung ($x_1 = -2$ gegeben): $(x^3 - 1{,}5x^2 - 6x + 2) : (x + 2) = x^2 - 3{,}5x + 1$ $x^2 - 3{,}5x + 1 = 0$ $\underline{x_2 \approx 0{,}31}$; $x_3 \approx 3{,}19$ kann nicht die x-Koordinate von R sein, da $x_2 \approx 0{,}31$ dichter am Hochpunkt von G_f liegt.	4
	Inhalt der Seefläche: $A = \int_{-2}^{0{,}31} h(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 2x\right]_{-2}^{0{,}31} \approx 0{,}32 - (-8) = 8{,}32\,\text{FE}$	3
	$8{,}32 \cdot 4\,\text{km}^2 = 33{,}28\,\text{km}^2$ Die Seeoberfläche besitzt einen Flächeninhalt von 33,28 km².	1
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

An einem Jahrmarktstand wird folgendes Glücksspiel angeboten: In einer Wanne schwimmen 1000 gleichartige Badeenten, die an der Unterseite versteckt mit den Zahlen von 1 bis 1000 nummeriert sind. Für einen bestimmten Einsatz darf eine Ente geangelt werden. Nach Feststellen der Nummer wird sie sofort wieder ins Wasser gesetzt. Gewinne werden nach dem folgenden Plan ausgezahlt:

Nummer der Ente	Gewinn
1,1000	100 €
2,3,4,5,6,7,8,9	20 €
10 bis 99	10 €
111,222,333,444,555,666,777,888,999	5 €

a) Begründen Sie, warum es sich beim Angeln einer Ente um ein Laplace-Experiment handelt. Nennen Sie zwei weitere Beispiele für Laplace-Experimente.

b) Ermitteln Sie für jede der vier Gewinnkategorien die Wahrscheinlichkeit, dass beim einmaligen Angeln eine zugehörige Ente gezogen wird.

c) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Eine Ente mit Gewinn wird gezogen.
B: Mit einer gezogenen Ente wird kein Gewinn erzielt.
C: Viermal direkt nacheinander wird eine Ente mit einer Nummer von 1 bis 500 geangelt.

d) Ermitteln Sie den durchschnittlichen Gewinnbetrag für eine zufällig geangelte Ente. Mit welchem Überschuss in € darf der Standbetreiber bei 500 geangelten Enten an einem Abend rechnen, wenn er für das Angeln einer Ente einen Einsatz von 2 Euro verlangt?

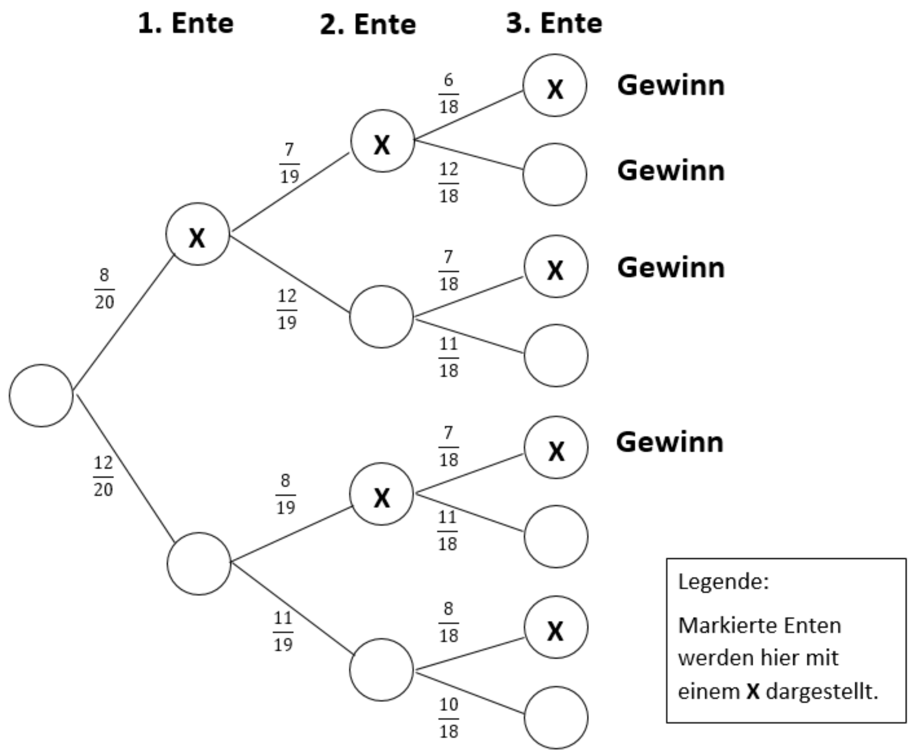
e) Bei einer anderen Variante des Entenangelns gibt es insgesamt 20 Enten, von denen 8 eine versteckte Markierung tragen. Es werden pro Spiel 3 Enten entnommen und nicht zurückgelegt. Wenn mindestens zwei markierte Enten dabei sind, hat der Spieler gewonnen und erhält 10 €.

Verdeutlichen Sie dieses Spiel in einem Baumdiagramm und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen.

Der Spielbetreiber möchte nach 100 Spielen durchschnittlich 150 € Überschuss erwirtschaften. Wie hoch ist der Spieleinsatz mindestens zu wählen?

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	3	4	3	3	7	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	Es handelt sich um ein Laplace-Experiment, da alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Jede Ente kann mit einer „Trefferwahrscheinlichkeit“ von 0,1 % geangelt werden. Zwei weitere Beispiele: Werfen einer Münze, Lotto „6 aus 49“, …	1 2
3b)	Gewinnkategorie 100 Euro: $P(E_{100}) = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$ Gewinnkategorie 20 Euro: $P(E_{20}) = \frac{8}{1000} = \frac{1}{125}$ Gewinnkategorie 10 Euro: $P(E_{10}) = \frac{90}{1000} = \frac{9}{100}$ Gewinnkategorie 5 Euro: $P(E_5) = \frac{9}{1000}$	4
3c)	$P(A) = \frac{109}{1000} = 0{,}109$ Die Wahrscheinlichkeit, eine Ente mit Gewinn zu angeln, beträgt 10,9 %. $P(B) = 1 - \frac{109}{1000} = \frac{891}{1000} = 0{,}891$ Die Wahrscheinlichkeit, eine Ente ohne Gewinn zu angeln, beträgt 89,1 %. $P(C) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$ Die Wahrscheinlichkeit, viermal hintereinander eine Ente mit einer Nummer von 1 bis 500 zu angeln, beträgt 6,25 %.	3
3d)	$\frac{2}{1000} \cdot 100\text{ €} + \frac{8}{1000} \cdot 20\text{ €} + \frac{90}{1000} \cdot 10\text{ €} + \frac{9}{1000} \cdot 5\text{ €} \approx 1{,}30\text{ €}$ (mathematisch gerundet) Der durchschnittliche Gewinn pro Ente beträgt 1,30 €. $500 \cdot 2\text{ €} - 500 \cdot 1{,}30\text{ €} = 350\text{ €}$ Bei 500 Spielen darf der Betreiber mit einem durchschnittlichen Überschuss von 350 € rechnen. (Alternativergebnisse bei kaufmännischer Rundung: 1,31 € bzw. 345 €)	3

3e)		3
	$P(E_G) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18} + 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 12}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{98}{285} \approx 0{,}34$ Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt rund 34 %.	2
	Gewinnauszahlung bei 100 Spielen: $0{,}34 \cdot 10\ € \cdot 100 \approx 340\ €$ Notwendige Einnahmen bei 100 Spielen: $340\ € + 150\ € = 490\ €$ Der Spieleinsatz muss mindestens 4,90 € betragen.	2
	Summe	20