1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{2}{3}x^3\ ;\ x \in IR$.

Der Graph der Funktion heißt G_f.

a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie bezüglich der y-Achse beziehungsweise zum Koordinatenursprung.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

c) Prüfen Sie für die Stelle $x_1 = 0$, ob folgende Aussagen wahr sind und begründen Sie Ihre Antworten:

(1) Die Tangente an G_f an der Stelle x_1 besitzt den Anstieg m = 5.

(2) Die Stelle x_1 ist eine Wendestelle.

(3) An der Stelle x_1 liegt eine Sattelstelle von f vor.

d) Berechnen Sie die Koordinaten und die Art aller Extrempunkte von G_f.

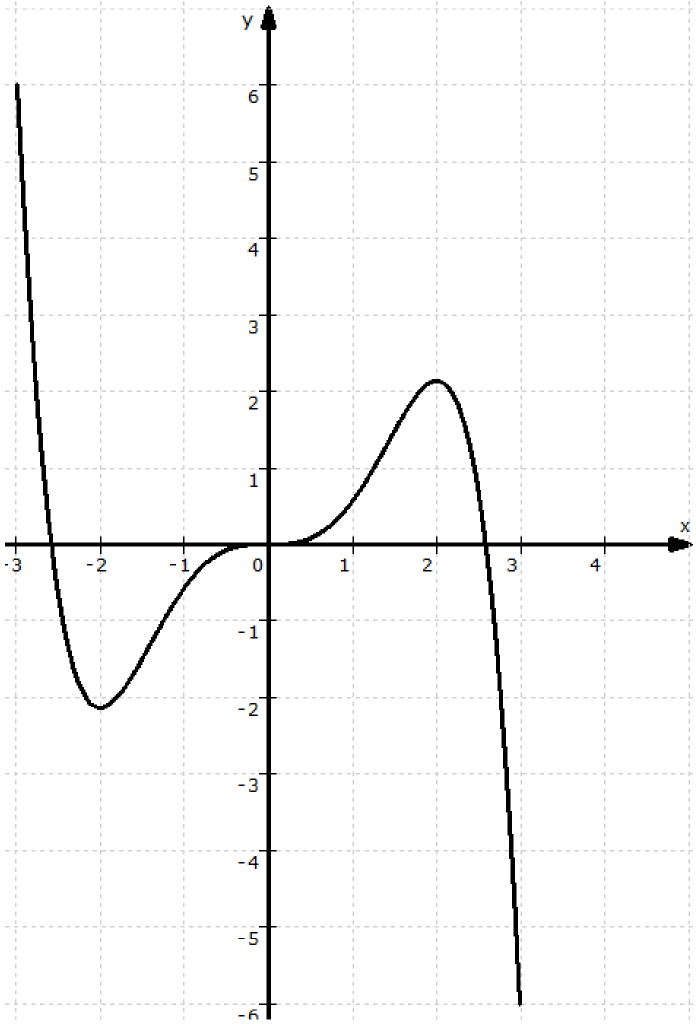
e) Bestimmen Sie anhand der Wendestellen von G_f die Krümmungsintervalle und untersuchen Sie jeweils die Art der Krümmung.

f) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-3 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

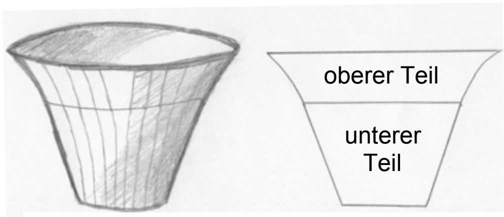
g) Ermitteln Sie alle Stellen der Funktion f, an denen G_f den Anstieg m = 2 hat.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
Punkte	2	3	7	5	7	3	3	30

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	G_f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung, da alle Exponenten von x ungerade sind und das Absolutglied gleich Null ist.	2
1b)	$f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{2}{3}x^3 = 0$ $x^3\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{3}\right) = 0; \quad x_1 = 0$ $-\frac{1}{10}x^2 + \frac{2}{3} = 0$ $x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{20}{3}} \approx \pm 2{,}58$	3
1c)	$f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2; \quad f''(x) = -2x^3 + 4x; \quad f'''(x) = -6x^2 + 4$ $f'(0) = 0 \neq 5$ Aussage (1) ist falsch. $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 4 \neq 0$ Aussage (2) ist wahr. Da $f'(0) = f''(0) = 0$ und $f'''(0) = 4 \neq 0$ ist Aussage (3) wahr.	3 1 2 1
1d)	$f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 = 0$ $x^2\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) = 0; \quad x_1 = 0;$ siehe c): $x_1 = 0$ ist Sattelstelle $-\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0; \quad x_{2/3} = \pm 2$ $f''(2) = -8 < 0; \quad f(2) \approx 2{,}13; \quad H(2 \mid 2{,}13)$ $f''(-2) = 8 > 0; \quad f(-2) \approx -2{,}13; \quad T(-2 \mid -2{,}13)$	2 3
1e)	$f''(x) = -2x^3 + 4x = 0$ $x(-2x^2 + 4) = 0; \quad x_1 = 0;$ $-2x^2 + 4 = 0$ $x_{2/3} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$ $-\infty < x < -1{,}41$: $f''(-2) = 8 > 0$ G_f ist linksgekrümmt $-1{,}41 < x < 0$: $f''(-1) = -2 < 0$ G_f ist rechtsgekrümmt $0 < x < 1{,}41$: $f''(1) = 2 > 0$ G_f ist linksgekrümmt $1{,}41 < x < \infty$: $f''(2) = -8 < 0$ G_f ist rechtsgekrümmt Hinweis: Alternativ kann auch die dritte Ableitung zur Bestimmung der Art der Krümmung in den Intervallen herangezogen werden.	3 4

1f)	$(f(3) = -6{,}3 \text{ und } f(-3) = 6{,}3)$  	3
1g)	$f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 = 2$ $t^2 - 4t + 4 = 0$ $t = 2$ $x_{1/2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41$ An den Stellen $x_{1/2} \approx \pm 1{,}41$ beträgt der Anstieg 2.	3
	Summe	30

2. Aufgabe: Integralrechnung

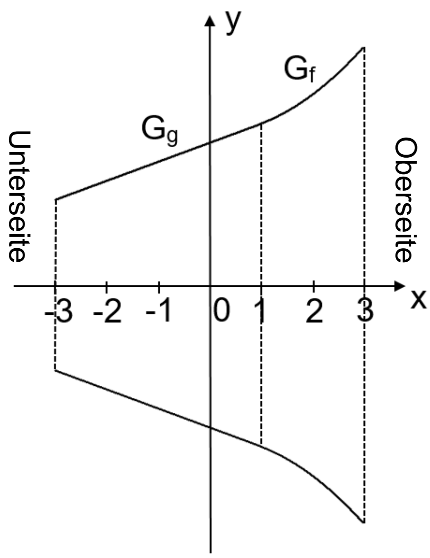


Skizzen des Kübels und der Schablone

Abbildungen nicht maßstabsgerecht!

Ein Produktdesigner fertigt für die Konstruktion eines runden Blumenkübels zunächst eine flache Schablone aus Pappe an, die den Innenquerschnitt durch die Mittelachse darstellt.

Die (um 90 Grad nach rechts gedrehte) Schablone ist im Koordinatensystem dargestellt, wobei eine Einheit im Koordinatensystem 10 cm in der Realität entspricht.



Der untere Teil des Kübels hat die Form eines geraden Kreiskegelstumpfes und entsteht durch die Rotation des Graphen G_g der linearen Funktion g mit $g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}$ im Intervall $-3 \le x \le 1$ um die x-Achse.

Der obere Teil entspricht einem Rotationskörper, der durch Rotation des Graphen G_f der quadratischen Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{4}x^2+4$ im Intervall $1 \le x \le 3$ um die x-Achse entsteht.

a) Bestimmen Sie den Innendurchmesser des Kübels an der Oberseite.

b) Weisen Sie nach, dass die Kübelwand keinen „Knick“ haben wird, indem Sie zeigen, dass die Anstiege der Funktionen f und g an ihrer Berührungsstelle gleich sind.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Pappschablone in cm².

d) Für genügend Standsicherheit muss später mindestens der untere Teil des Kübels (gerader Kegelstumpf) mit Erde gefüllt sein.
Berechnen Sie dessen Volumen in Litern.
Bestimmen Sie auch die Gesamtmasse der für die Mindestbefüllung benötigten Pflanzerde, wenn ein Kubikmeter 0,8 Tonnen wiegt.

e) Ermitteln Sie in Litern das Gesamtvolumen des Blumenkübels.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	2	2	6	5	5	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$d_o = 2 \cdot f(3) = \frac{25}{2}$ Der Innendurchmesser des Kübels beträgt oben 125 cm.	2
2b)	$f'(x) = \frac{1}{2}x;\quad f'(1) = \frac{1}{2}$ $g'(x) = \frac{1}{2};\quad g'(1) = \frac{1}{2}$ Beide Funktionen haben an der Berührungsstelle den gleichen Anstieg.	2
2c)	$A_u = \int_{-3}^{1} g(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x\right]_{-3}^{1} = 4-(-9) = 13\,FE$ $A_o = \int_{1}^{3} f(x)dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + 4x\right]_{1}^{3} = \frac{57}{4} - \frac{49}{12} = \frac{61}{6} \approx 10{,}17\,FE$ $A_{ges} = 2(A_u + A_o) = \frac{139}{3} \approx 46{,}33\,FE$ Der Flächeninhalt der Schablone beträgt 4633 cm².	2 2 2
2d)	$V_u = \pi \cdot \int_{-3}^{1} [g(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_{-3}^{1} \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{225}{16}\right)dx$ $= \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{15}{8}x^2 + \frac{225}{16}x\right]_{-3}^{1} = \pi \cdot \left[\frac{769}{48} - \left(-\frac{441}{16}\right)\right]$ $= \pi \cdot \frac{523}{12} \approx 136{,}92\,VE$ Alternativrechnung über Volumenformel des Kegelstumpfes möglich: $V_u = \frac{\pi}{3}h(r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)$ mit $r_2 = g(-3)$ und $r_1 = f(3)$ Das Volumen des unteren Teils beträgt 136,92 Liter. $0{,}13692\,m^3 \cdot 800\frac{kg}{m^3} = 109{,}54\,kg$ Die Pflanzerde für die Mindestbefüllung wiegt 109,54 kg.	 4 1

2e)	$V_O = \pi \cdot \int_1^3 [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_1^3 \left(\frac{1}{16} x^4 + 2x^2 + 16 \right) dx$ $= \pi \cdot \left[\frac{1}{80} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + 16x \right]_1^3 = \pi \cdot \left[\frac{5523}{80} - \frac{4003}{240} \right]$ $= \pi \cdot \frac{6283}{120} \approx 164{,}49\,\mathrm{VE}$	4
	Gesamtvolumen: $V_{ges} = V_u + V_o = 301{,}41\,\mathrm{VE}$ Das Gesamtvolumen des Blumenkübels beträgt 301,41 Liter.	1
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

In einer Speiseeisfabrik werden zwei neue Abfüllmaschinen für die 500-Gramm-Packungen installiert.

a) Beim Testlauf von Maschine A wurden die Füllmengen der ersten sechs Packungen gemessen: 599 g, 510 g, 498 g, 505 g, 497 g und 511 g.
Bestimmen Sie den Median, den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Messwerte.
Erklären Sie, warum Median und Mittelwert so stark voneinander abweichen und welcher der beiden Werte die Arbeit der Maschine am besten charakterisiert.

b) Die Füllmengen der Maschine B wurden im Testlauf in einer umfangreicheren Stichprobe ermittelt und in einer Klasseneinteilung zusammengefasst:

Füllmenge in g	$475<x\leq485$	$485<x\leq495$	$495<x\leq505$	$505<x\leq515$	$515<x\leq525$
Anzahl	16	48	40	10	6
relative Häufigkeit					

Ergänzen Sie in der Tabelle die relativen Häufigkeiten und stellen Sie diese in einem geeigneten Diagramm dar.
Ermitteln Sie den Median und den arithmetischen Mittelwert der Füllmengen.

c) Beide Maschinen arbeiten gleichzeitig, wobei die Maschine B aber doppelt so schnell abfüllt wie Maschine A. Die von Maschine B abgefüllten Eispackungen sind zu 5 % fehlerhaft. Bei Maschine A sind es nur 2 %.
Stellen Sie den Durchlauf der Eispackungen durch die beiden Maschinen und die anschließende Fehlerprüfung in einem geeigneten Baumdiagramm dar.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine beliebig ausgewählte Packung von Maschine A abgefüllt wurde und fehlerhaft ist.
Berechnen Sie, wie viele von 1000 insgesamt abgefüllten Packungen fehlerfrei sind.

d) Im Fabrikverkauf werden 10 Sorten Eis angeboten. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, davon 5 verschiedene Sorten für die Wochenwerbung zusammenzustellen.
Pro Tag soll eine der 5 ausgewählten Sorten besonders präsentiert werden. Ermitteln Sie, wie viele Möglichkeiten es für die Verteilung der 5 Sorten auf 5 Arbeitstage gibt.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	6	5	6	3	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>
Sortierte Werte: 497; 498; 505; 510; 511; 599

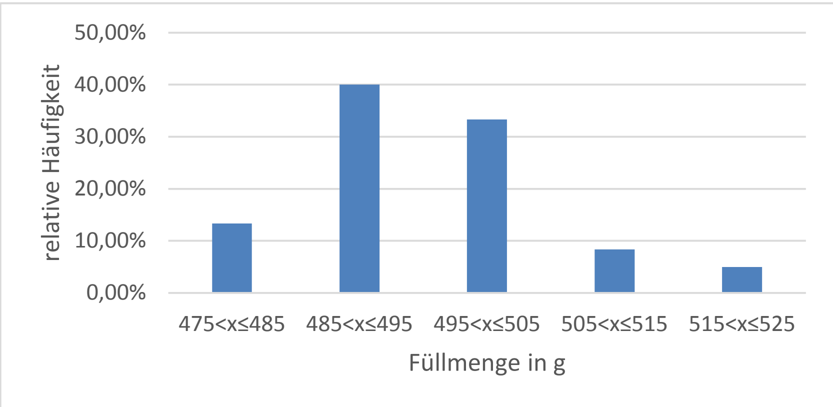
Median: $m=\frac{505+510}{2}=507{,}5\,\text{g}$

Mittelwert: $\bar{x}=\frac{497+498+505+510+511+599}{6}=\frac{3120}{6}=520\,\text{g}$

$s^2=\frac{1}{5}\left[(497-520)^2+(498-520)^2+\ldots+(599-520)^2\right]=\frac{7660}{5}$

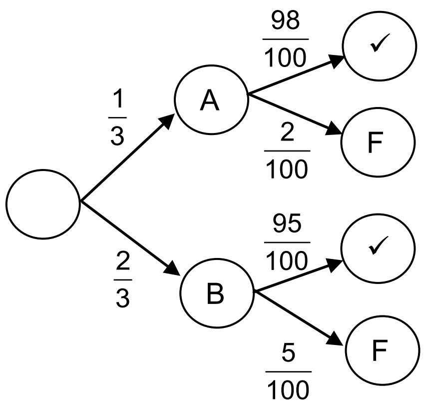
$s=\sqrt{\frac{7660}{5}}\approx 39{,}14\,\text{g}$ (Bei Nutzung der $\frac{1}{n}$ - Formel gilt $s\approx 35{,}73\,\text{g}$.)

Der Median ignoriert den anfänglichen „Ausreißer“ von 599 g, weshalb er vom arithmetischen Mittelwert abweicht, aber die Arbeit der Maschine auch besser charakterisiert. Fehler bei der Erstbefüllung sind denkbar.
</td><td>1
1
2
2</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>
<table>
<tr><td>Füllmenge in g</td><td>475<x≤485</td><td>485<x≤495</td><td>495<x≤505</td><td>505<x≤515</td><td>515<x≤525</td></tr>
<tr><td>Anzahl</td><td>16</td><td>48</td><td>40</td><td>10</td><td>6</td></tr>
<tr><td>relative Häufigkeit</td><td>$\frac{2}{15}$
13,33 %</td><td>$\frac{2}{5}$
40 %</td><td>$\frac{1}{3}$
33,33 %</td><td>$\frac{1}{12}$
8,33 %</td><td>$\frac{1}{20}$
5 %</td></tr>
</table>

Diagrammbeispiel:


Median: der sortierte 60. und 61. Wert liegt in Klasse 2, also
$m=\frac{485+495}{2}=490\,\text{g}$

Mittelwert: $\bar{x}=\frac{16\cdot 480+48\cdot 490+40\cdot 500+10\cdot 510+6\cdot 520}{120}=\frac{59420}{120}\approx 495{,}17\,\text{g}$
</td><td>1
2
1
1</td></tr>
</table>

3c)	Maschine Prüfergebnis (F = fehlerhaft) 	3
	E_1: Eine von Maschine A abgefüllte Packung ist fehlerhaft. $P(E_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{100} = \frac{1}{150} \approx 0{,}67\,\%$ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Packung von Maschine A stammt und fehlerhaft ist, liegt bei 0,67 %.	1
	E_2: Eine Packung ist fehlerfrei. $P(E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{98}{100} + \frac{2}{3} \cdot \frac{95}{100} = \frac{24}{25} = 96\,\%$; $96\,\% \cdot 1000 = 960$ Von 1000 abgefüllten Packungen sind 960 fehlerfrei.	2
3d)	$C_{10}^{5} = \binom{10}{5} = \frac{5!}{5! \cdot (10-5)!} = 252$ Es gibt 252 Möglichkeiten für die Auswahl von 5 aus 10 Eissorten.	2
	$P_5 = 5! = 120$ Es gibt 120 Möglichkeiten der Verteilung von 5 Eissorten auf 5 Tage.	1
	Summe	20