**1. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung**

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2;\ x \in \mathbb{R}$.
Der Graph heißt $G_f$.

a) Geben Sie das Symmetrieverhalten von $G_f$ an und begründen Sie.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen von $G_f$.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von $G_f$.

d) Zeichnen Sie $G_f$ im Intervall $-2 \le x \le 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem (Empfehlung zur Achseneinteilung: 1 Längeneinheit entspricht 2 cm).

e) Der Graph $G_f$ schließt mit der x- Achse im IV. Quadranten ein Flächenstück vollständig ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes dieser Fläche.

f) Die Punkte A(0I0), B(xI0) und C(xIf(x)) beschreiben ein Dreieck im IV. Quadranten.

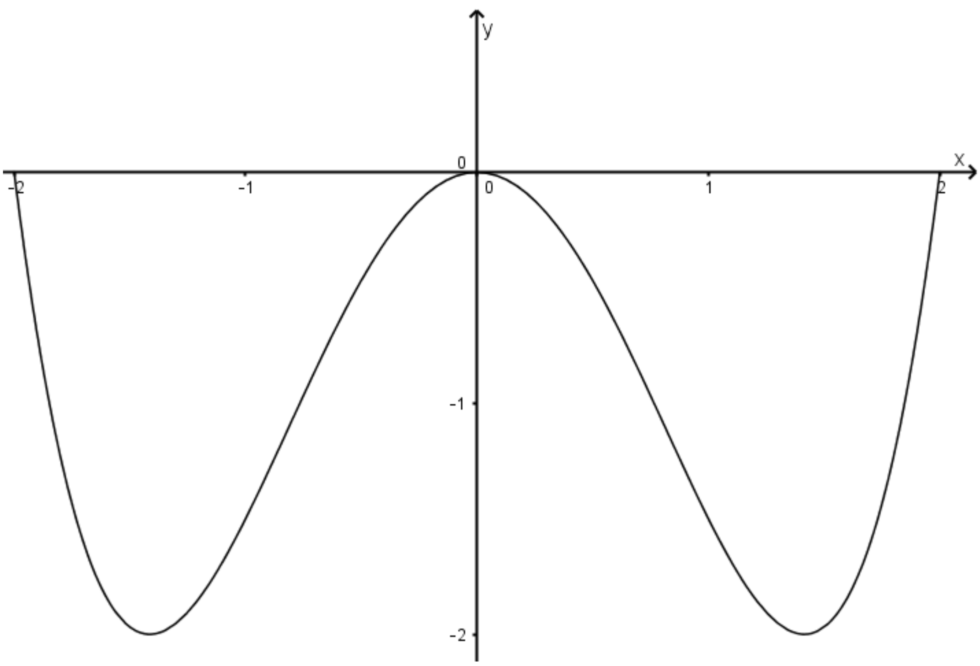
Zeichnen Sie die Punkte in das Koordinatensystem von Teilaufgabe d) für $x = 1$ ein.

Beschriften Sie die Punkte und kennzeichnen Sie die beschriebene Fläche.

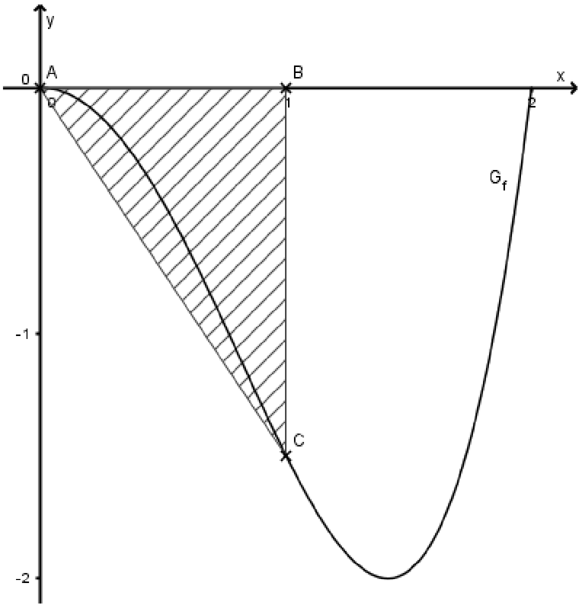
Bestimmen Sie rechnerisch die Stelle x mit $0 < x < 2$, für die das Dreieck ABC eine maximale Fläche einnimmt.

(zur Kontrolle: $A(x) = -\frac{1}{4}x^5 + x^3$)

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | e) | f) | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 2 | 4 | 7 | 3 | 3 | 9 | 28 |

| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|---|---|---|
| 1a) | Achsensymmetrie zur y-Achse, nur gerade Potenzen | 2 |
| 1b) | $0 = 0{,}5x^4 - 2x^2$<br>$0 = x^2(0{,}5x^2 - 2)$<br>$x_1 = 0$ (doppelte Nullstelle); $x_2 = 2$; $x_3 = -2$ | 4 |
| 1c) | $f'(x) = 2x^3 - 4x$; $f''(x) = 6x^2 - 4$; | 2 |
| | $f'(x) = 0 = 2x^3 - 4x = x(2x^2 - 4)$<br>$x_{E1} = 0$; $f''(0) = -4 < 0$; $f(0) = 0$; $H(0 \mid 0)$<br>$x_{E2} = \sqrt{2}$; $f''(\sqrt{2}) = 8 > 0$; $f(\sqrt{2}) = -2$; $T_1(1{,}41 \mid -2)$<br>$x_{E3} = -\sqrt{2}$; $f''(-\sqrt{2}) = 8 > 0$; $f(-\sqrt{2}) = -2$; $T_2(-1{,}41 \mid -2)$ | 5 |
| 1d) |  | 3 |
| 1e) | $A = \left\lvert \int_0^2 (0{,}5x^4 - 2x^2)\,dx \right\rvert$<br>$A = \left\lvert \left[ \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 \right\rvert$<br>$A = \frac{32}{15} \approx 2{,}13\,\text{FE}$ | 3 |

1f)




$$HB: A = -\frac{1}{2}\left(f(x)\cdot x\right)$$

$$NB: f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2$$

$$ZF: A(x) = -\frac{1}{4}x^5 + x^3$$

$$A'(x) = -\frac{5}{4}x^4 + 3x^2$$

$$0 = x^2\left(-\frac{5}{4}x^2 + 3\right)$$

$x_2 \approx 1{,}55 \quad (x_1 = 0 \quad \text{und } x_3 \approx -1{,}55$ liegen nicht im Intervall)

$$A''(x) = -5x^3 + 6x$$

$$A''(1{,}55) \approx -9{,}32 < 0 \ \text{ max}.$$

Für x ≈ 1,55 wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal.

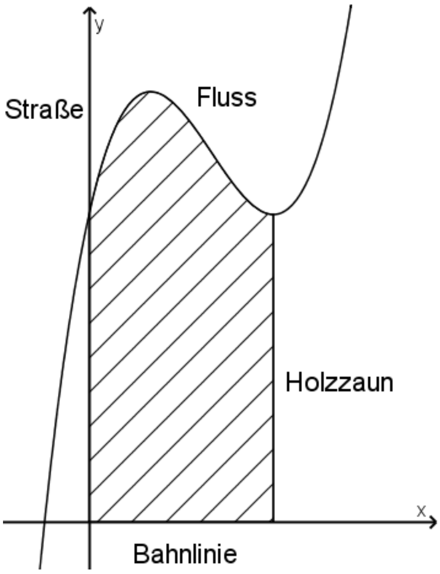
3

6

Summe 28

**2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung**

Ein Grundstück wird im Süden durch eine Bahnlinie, im Norden durch einen Fluss, im Westen durch eine Straße sowie im Osten durch einen im Abstand von 300 m parallel zur Straße verlaufenden Holzzaun begrenzt (siehe Skizze). Die Straße und die Bahnlinie liegen auf den Achsen eines Koordinatensystems, wobei eine Einheit 100 m entspricht.




a) Der Verlauf des Flusses kann durch den Graphen $G_f$ einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades beschrieben werden. Ermitteln Sie rechnerisch eine Funktionsgleichung für f so, dass die Punkte $A(-1\,|\,-3), B(0\,|\,5), C(2\,|\,6)$ und $D(4\,|\,7)$ auf $G_f$ liegen.

(zur Kontrolle: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+5$ )

b) Bestimmen Sie rechnerisch die maximale Nord-Süd-Ausdehnung des Grundstückes. Weisen Sie nach, dass es auf dem Grundstück keine kürzere Verbindung zwischen Fluss und Bahnlinie gibt als den 500 m langen Holzzaun.
Berechnen Sie die Materialkosten für die Erneuerung des 1,50 m hohen Zauns, wenn 1 m² Holzzaun 7,50 € kostet.

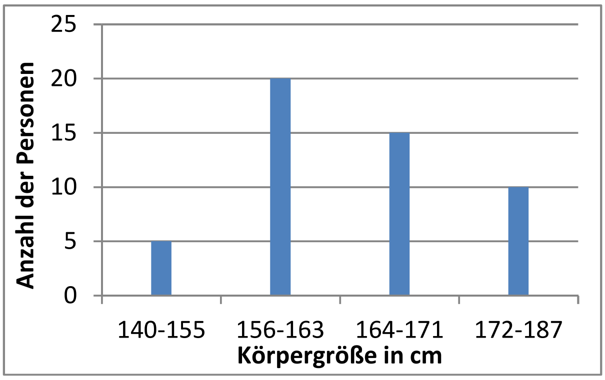
c) Berechnen Sie den Grundstückspreis, wenn pro Quadratmeter 4,00 € zu zahlen sind.

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | Summe |
|---|---|---|---|---|
| Punkte | 7 | 10 | 5 | 22 |

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>2a)</td><td>$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$<br><br>$f(0) = 5$: $d = 5$<br>$f(-1) = -3$: $-a + b - c + d = -3$<br>$f(2) = 6$: $8a + 4b + 2c + d = 6$<br>$f(4) = 7$: $64a + 16b + 4c + d = 7$<br><br>Ermitteln der Koeffizienten: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x + 5$</td><td>1<br><br>2<br><br>4</td></tr>
<tr><td>2b)</td><td>$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$ $f''(x) = 3x - 6$<br>$x^2 - 4x + 3 = 0$<br>$x_{E1} = 3$; $f''(3) = 3 > 0$; $f(3) = 5$; $T(3 \mid 5)$<br>$x_{E2} = 1$; $f''(1) = -3 < 0$; $f(1) = 7$; $H(1 \mid 7)$<br><br>Die maximale Nord-Süd-Ausdehnung beträgt 700 m.<br><br>Die minimale Ausdehnung von 500 m entspricht genau der Länge des Holzzauns.<br><br>(Hinweis für Lehrkräfte: Die Grundstücksgrenze an der Straße ist genauso lang.)<br><br>Materialkosten: $K = 500 \cdot 1{,}5 \cdot 7{,}5 = 5625$<br>Die Materialkosten für den Zaun betragen 5625 €.</td><td>2<br><br>4<br><br>1<br><br>1<br><br>2</td></tr>
<tr><td>2c)</td><td>$A = \int_0^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2 + 5x\right]_0^3 = 18\frac{3}{8}\,FE$<br><br>$18\frac{3}{8}\,FE$ entsprechen $183750\ m^2$<br>$183750 \cdot 4 = 735000$<br><br>Das Grundstück kostet 735000 €.</td><td>3<br><br>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>22</td></tr>
</table>

## 3. Aufgabe: Stochastik

Bei einer Gruppe von Jugendlichen wurde die Körpergröße **(in ganzen cm)** gemessen. Die Ergebnisse sind im Diagramm dargestellt. Die Personengruppe besteht aus 30 Mädchen und 20 Jungen.




a) Ermitteln Sie die relative Häufigkeit der Personenanzahl für jede der vier Größenklassen. Bestimmen Sie rechnerisch den arithmetischen Mittelwert der Körpergröße aller Personen bezüglich der Klasseneinteilung.

b) Zum Vergleich wurden die 50 Personen nach ihrer Größe in vier gleich breite Klassen eingeteilt. Vervollständigen Sie alle fehlenden Angaben in der Tabelle.

| Klasse | Größe in cm | | Anzahl der Personen | |
|---|---|---|---|---|
| | von | bis | absolut | relativ |
| A | 140 | | | 8 % |
| B | | | | 42 % |
| C | | | | |
| D | | 187 | | 14 % |

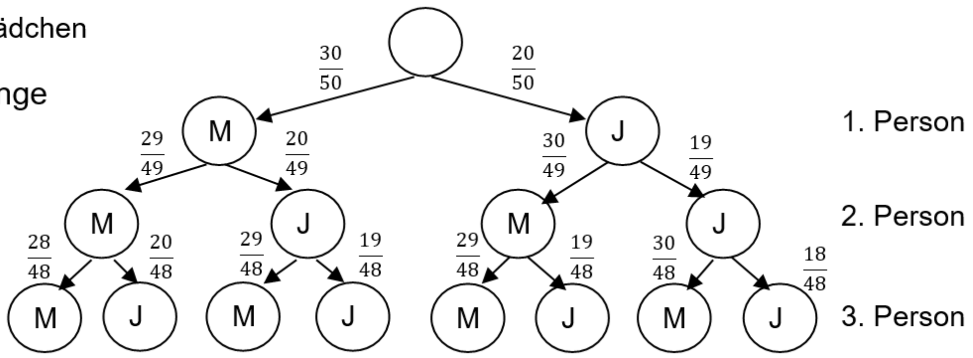
c) Drei Personen der Gruppe sollen für einen Sehtest zufällig ausgewählt werden. Verdeutlichen Sie diesen Vorgang unter Berücksichtigung des Geschlechtes der jeweiligen Person in einem Baumdiagramm.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

$E_1$: Alle drei Personen sind Jungen.

$E_2$: Unter den drei Personen befinden sich genau zwei Mädchen und ein Junge.

d) Eine Befragung der Personengruppe ergab, dass 50 % der Mädchen und 60 % der Jungen regelmäßig eine Sportart betreiben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig aus der Gruppe ausgewählte Person Sport treibt.
Auf wie viel Prozent müsste der Anteil der Sport treibenden Mädchen steigen, damit die zufällig ausgewählte Person mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,70 Sportlerin bzw. Sportler ist?

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | Summe |
|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | 4 | 4 | 8 | 4 | 20 |

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>rel. Häufigkeit: $h_1 = \frac{5}{50} = 0{,}1$; $h_2 = \frac{20}{50} = 0{,}4$; $h_3 = \frac{15}{50} = 0{,}3$; $h_4 = \frac{10}{50} = 0{,}2$<br><br>Klassenmitte: $x_1 = 147{,}5$; $x_2 = 159{,}5$; $x_3 = 167{,}5$; $x_4 = 179{,}5$<br>arithm. Mittelwert: $\overline{x} = \sum_{i=1}^{4}(h_i \cdot x_i) = 164{,}7$<br><br>Hinweis zur Bewertung: Sollten die Schüler mit rechts- oder linksoffenen Intervallen für die Klasseneinteilung arbeiten, verschieben sich die Klassenmitten und somit der angegebene Mittelwert. Auch hier ist die volle Punktzahl zu vergeben.</td><td>2<br><br>2</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>
<table>
<tr><th rowspan="2">Klasse</th><th colspan="2">Größe in cm</th><th colspan="2">Anzahl der Personen</th></tr>
<tr><th>von</th><th>bis</th><th>absolut</th><th>relativ</th></tr>
<tr><td>A</td><td>140</td><td>151</td><td>4</td><td>8 %</td></tr>
<tr><td>B</td><td>152</td><td>163</td><td>21</td><td>42 %</td></tr>
<tr><td>C</td><td>164</td><td>175</td><td>18</td><td>36 %</td></tr>
<tr><td>D</td><td>176</td><td>187</td><td>7</td><td>14 %</td></tr>
</table>
Klassengrenzen:<br>absolute H.:<br>relative H.:<br><br>Hinweis zur Bewertung: Sollten die Schüler mit rechts- oder linksoffenen Intervallen für die Klasseneinteilung arbeiten („von - bis unter“ bzw. „von über - bis“), müssen die Klassengrenzen angepasst werden. Auch hier ist die volle Punktzahl zu vergeben.</td><td>2<br>1<br>1</td></tr>
<tr><td>3c)</td><td>M: Mädchen<br>J: Junge<br>
<br><br>Alle Personen männlich:<br>$P(E_1) = \frac{20}{50} \cdot \frac{19}{49} \cdot \frac{18}{48} = \frac{57}{980} \approx 5{,}82\,\%$</td><td>3<br><br>2</td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | Genau 2 Mädchen und 1 Junge:<br>$P(E_2) = \frac{30}{50} \cdot \frac{29}{49} \cdot \frac{20}{48} + \frac{30}{50} \cdot \frac{20}{49} \cdot \frac{29}{48} + \frac{20}{50} \cdot \frac{30}{49} \cdot \frac{29}{48} = \frac{87}{196} \approx 44{,}39\,\%$ | 3 |
| 3d) | $P(\text{Sport}) = \frac{30}{50} \cdot \frac{50}{100} + \frac{20}{50} \cdot \frac{60}{100} = 0{,}54 = 54\,\%$<br>Eine Person betreibt mit einer Wahrscheinlichkeit von 54 % Sport.<br>$P(\text{Sport}) = \frac{30}{50} \cdot x + \frac{20}{50} \cdot \frac{60}{100} = \frac{70}{100}$<br>$x = \frac{23}{30} \approx 0{,}7667 = 76{,}67\,\%$<br>Der Anteil der Sport treibenden Mädchen müsste auf 76,67 % steigen. | 2<br><br>2 |
| | Summe | 20 |