1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x\,;\; x \in R$.
Der Graph heißt G_f.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

b) Zeigen Sie, dass $x = 1$ eine Extremstelle ist.
Ermitteln Sie die Koordinaten aller lokalen Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrema nach.
Geben Sie das Monotonieverhalten von G_f an.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte und untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f.

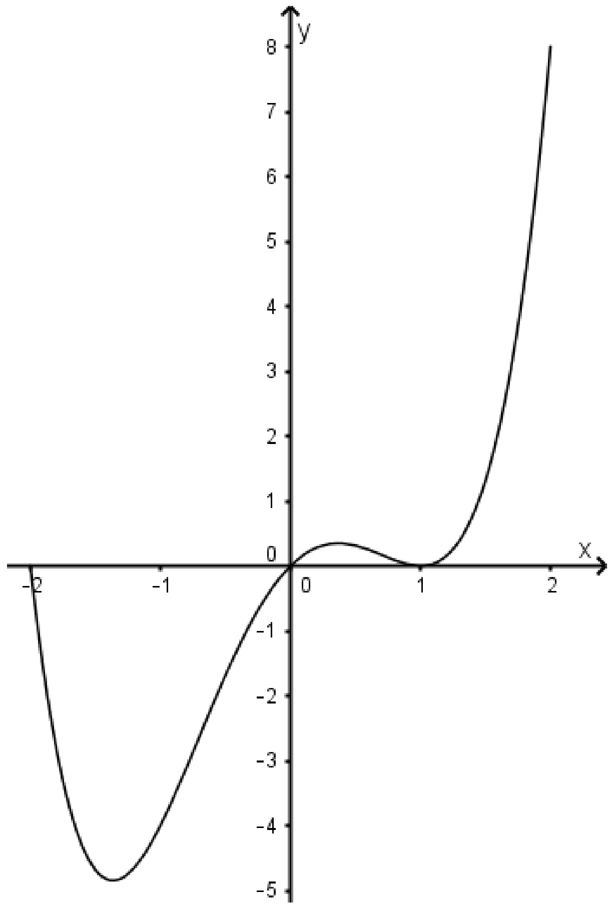
d) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-2 \le x \le 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

e) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung für die Tangente t an G_f
an der Stelle $x_1 = -1$.

f) Weisen Sie durch Rechnung nach, dass G_f an der Stelle $x = 0$ eine Steigung von $m = 2$ besitzt.
Bestimmen Sie alle weiteren Stellen von G_f mit der gleichen Steigung.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	4	8	6	3	3	3	27

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
1a)	$0 = x^4 - 3x^2 + 2x = x(x^3 - 3x + 2)$ Polynomdivision : $(x^3 - 3x + 2) : (x-1) = x^2 + x - 2$ $S_y = S_{x1}(0 \mid 0)$; $S_{x2}(1 \mid 0)$ (doppelte Nullstelle) ; $S_{x3}(-2 \mid 0)$	4
1b)	$f'(x) = 4x^3 - 6x + 2;\quad f''(x) = 12x^2 - 6;\quad f'''(x) = 24x$	1
	$f'(x) = 0 = 4x^3 - 6x + 2$ Polynomdivision : $(4x^3 - 6x + 2) \div (x-1) = 4x^2 + 4x - 2$	2
	$x_{E1} = 1;\quad f''(1) = 6 > 0;\quad f(1) = 0;\quad T_1(1 \mid 0)$ $x_{E2} \approx 0{,}37;\quad f''(0{,}37) \approx -4{,}36 < 0;\quad f(0{,}37) \approx 0{,}35;\quad H(0{,}37 \mid 0{,}35)$ $x_{E3} \approx -1{,}37;\quad f''(-1{,}37) \approx 16{,}52 > 0;\quad f(-1{,}37) \approx -4{,}85;\quad T_2(-1{,}37 \mid -4{,}85)$	3
	Monotonie: $-\infty < x < -1{,}37$ f ist streng monoton fallend $-1{,}37 < x < 0{,}37$ f ist streng monoton steigend $0{,}37 < x < 1$ f ist streng monoton fallend $1 < x < \infty$ f ist streng monoton steigend	2
1c)	$f''(x) = 0 = 12x^2 - 6$ $x_{W1} \approx 0{,}71;\quad f'''(0{,}71) = 17{,}04 \neq 0;\quad f(0{,}71) \approx 0{,}16;\quad W_1(0{,}71 \mid 0{,}16)$ $x_{W2} \approx -0{,}71;\quad f'''(-0{,}71) = -17{,}04 \neq 0;\quad f(-0{,}71) \approx -2{,}68;\quad W_2(-0{,}71 \mid -2{,}68)$	3
	$-\infty < x < -0{,}71;\quad f''(-1) = 6 > 0;$ links gekrümmt $-0{,}71 < x < 0{,}71;\quad f''(0) = -6 < 0;$ rechts gekrümmt $0{,}71 < x < +\infty;\quad f''(1) = 6 > 0;$ links gekrümmt	3

1d)		3
1e)	$y = mx + n$ $t: \quad m = f'(-1) = 4; \quad f(-1) = -4; \quad -4 = 4 \cdot (-1) + n; \quad n = 0; \quad y = 4x$	3
1f)	Nachweis der Steigung an der Stelle 0: $f'(x) = 4x^3 - 6x + 2$ $f'(0) = 2$ Finden weiterer Stellen mit der Steigung 2: $f'(x) = 2$ $2 = 4x^3 - 6x + 2$ $0 = 4x^3 - 6x = x(4x^2 - 6)$ $x_1 = 0; \quad x_2 \approx 1{,}22; \quad x_3 \approx -1{,}22$	1 2
	Summe	27

2. Aufgabe: Integralrechnung

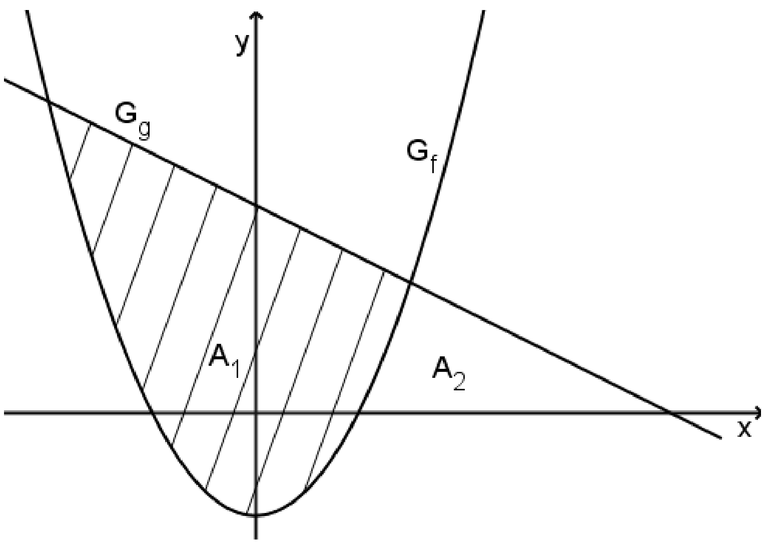
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4$; $x \in R$.
Ihre Graphen heißen G_f und G_g.

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass sich die Graphen G_f und G_g an den Stellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -4$ schneiden.

b) Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche A_1, die von beiden Graphen vollständig eingeschlossen wird (siehe Abbildung).

c) Die Fläche A_2 wird von den Graphen beider Funktionen und der x-Achse eingeschlossen (siehe Abbildung).
Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts von A_2.

d) Der Graph G_f rotiert im Intervall $-1 \le x \le 2$ um die x-Achse.
Ermitteln Sie die Volumenmaßzahl des so entstehenden Rotationskörpers.

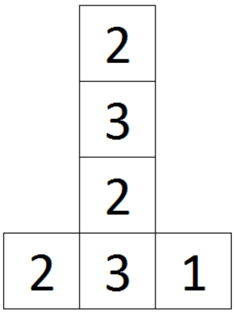


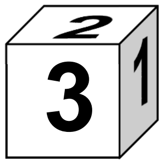
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	3	5	7	5	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
2a)	$\frac{1}{2}x^2 - 2 = -\frac{1}{2}x + 4$ $x^2 + x - 12 = 0$ $x_1 = 3;\ x_2 = -4$	3
2b)	$h(x) = g(x) - f(x) = -\frac{1}{2}x + 4 - (\frac{1}{2}x^2 - 2) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 6$ $H(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 6x$ $A = \int_{-4}^{3} h(x)dx = [H(x)]_{-4}^{3} = \left(\frac{45}{4}\right) - \left(-\frac{52}{3}\right) \approx 28{,}58\,\text{FE}$	3 2
2c)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ $x_{1,2} = \pm 2$ $g(x) = -\frac{1}{2}x + 4 = 0$ $x = 8$ Schnittstelle $x_1 = 3$ aus a) $A_1 = \int_{2}^{3} f(x)dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_2^3 = -\frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{7}{6} \approx 1{,}17\,\text{FE}$ $A_2 = \int_{3}^{8} g(x)dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + 4x\right]_3^8 = 16 - 9{,}75 = 6{,}25\,\text{FE}$ $A_{gesamt} = A_1 + A_2 = 7{,}42\,\text{FE}$	2 5
2d)	$[f(x)]^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ $V = \pi \cdot \int_{-1}^{2} [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{20}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} = \pi \cdot \left(\frac{64}{15} + \frac{203}{60}\right) = 7{,}65\pi \approx 24{,}03\,\text{VE}$	5
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Ein regulärer Würfel besitzt das abgebildete Netz mit den Ziffern 1, 2 und 3. Dieser Würfel wird pro Spiel zweimal geworfen.





a) Stellen Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω für diesen Zufallsversuch auf.

b) Zeichnen Sie für diesen Zufallsversuch ein Baumdiagramm.
Die Summe der beiden Wurfergebnisse eines Spiels nennt man Augensumme. Geben Sie für alle möglichen Augensummen die Wahrscheinlichkeiten an.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse in einem Spiel:

E: Die Eins fällt höchstens einmal.

F: Die Augensumme ist gerade.

d) In einem Gewinnspiel erhält man 2 Euro, wenn mindestens einmal eine Eins gewürfelt wurde und 8 Euro, wenn zweimal eine Drei fällt.

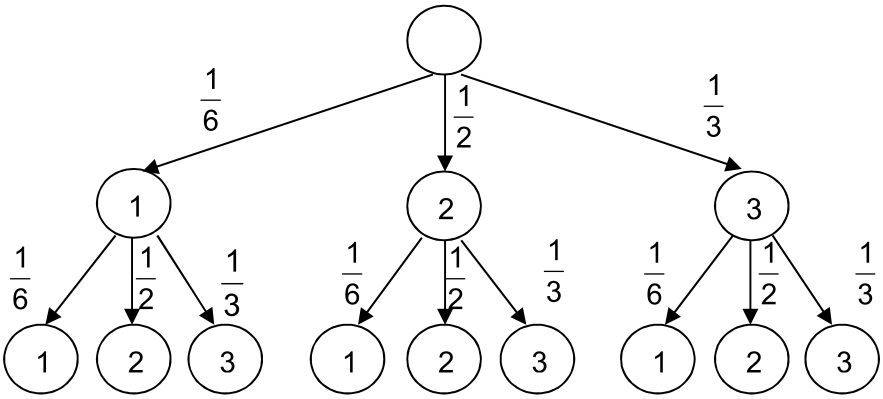
Welchen Einsatz muss der Spielleiter mindestens verlangen, damit er keinen Verlust macht?

e) Beim Probedurchlauf von 15 Spielen ergeben sich die folgenden Augensummen:

4	5	4	4	5
2	4	5	4	3
4	5	3	5	6

Ermitteln Sie rechnerisch das arithmetische Mittel und die Standardabweichung für diese Stichprobe.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	1	8	4	3	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich)	Pkt.
3a)	$\Omega = \{(1;1),(1;2),(1;3),(2;1),(2;2),(2;3),(3;1),(3;2),(3;3)\}$	1
3b)		3
	$P(\text{Augensumme } 2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ $\quad$ $P(\text{Augensumme } 3) = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ $P(\text{Augensumme } 4) = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{13}{36}$ $\quad$ $P(\text{Augensumme } 5) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ $P(\text{Augensumme } 6) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	5
3c)	$P(E) = 1 - P(\text{zweimal fällt die Eins}) = 1 - \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) = \frac{35}{36}$	2
	$P(F) = \frac{1}{36} + \frac{13}{36} + \frac{1}{9} = \frac{1}{2}$	2
3d)	$P(\text{mindestens eine Eins}) = 2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{36}$ $\text{Gewinn pro Spiel} = 2\cdot\frac{11}{36} + 8\cdot\frac{1}{9} = 1{,}50$ Der Einsatz muss 1,50 € betragen.	3

3e)	$\bar{x} = \frac{6 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 + 6}{15} = \frac{63}{15} = 4{,}2$	2
	$s^2 = \frac{1}{15} \cdot \left[6 \cdot (4-4{,}2)^2 + 5 \cdot (5-4{,}2)^2 + 2 \cdot (3-4{,}2)^2 + (2-4{,}2)^2 + (6-4{,}2)^2\right] = 0{,}96$ $s \approx 0{,}98$ (für n-1: $s^2 \approx 1{,}0286$ $s \approx 1{,}0142$)	2
	Summe	20