

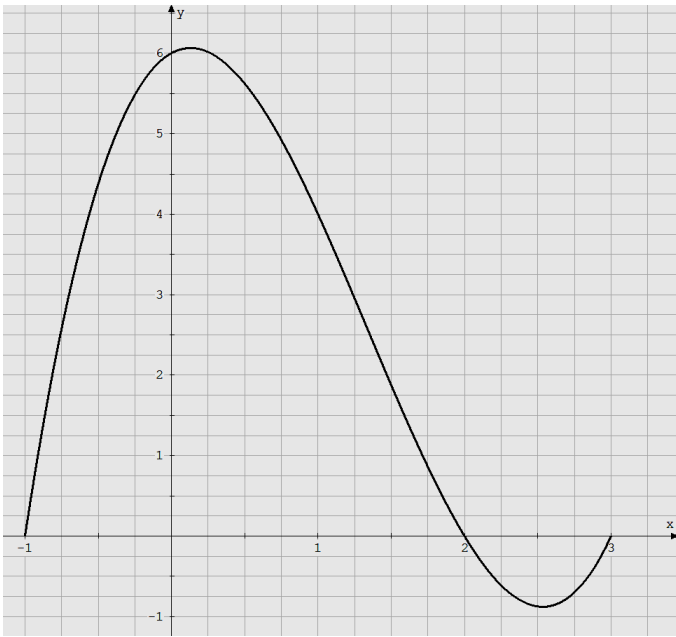
1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph heißt G_f .

- a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie und ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.
- b) Berechnen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunktes von G_f .
- c) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes von G_f und weisen Sie das Krümmungsverhalten von G_f nach.
- d) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-1 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
- e) Im 1. Quadranten des Koordinatensystems soll ein Rechteck so gelegt werden, dass eine Seite auf der x -Achse und eine Seite auf der y -Achse liegt. Ein Eckpunkt des Rechteckes ist der Koordinatenursprung O , der gegenüberliegende Eckpunkt $P(x | f(x))$ mit $0 < x < 2$ liegt auf G_f . Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass die Rechtecksfläche maximal wird.

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | e) | Summe |
|--------------|----|----|----|----|----|-------|
| Punkte | 7 | 6 | 5 | 3 | 6 | 27 |

| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|------|--|----------------------------|
| 1a) | <p>Da sowohl gerade als auch ungerade Exponenten von x in der Funktionsgleichung auftreten, liegt weder Punktsymmetrie zum Ursprung noch Achsensymmetrie zur y-Achse vor.</p> <p>Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 6)$</p> <p>Schnittpunkte mit der x-Achse: über Polynomdivision $N_1(-1 0)$ $N_2(2 0)$ $N_3(3 0)$</p> | <p>2</p> <p>1</p> <p>4</p> |
| 1b) | <p>$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$ $f''(x) = 6x - 8$ $f'''(x) = 6$</p> <p>Extrempunkte: $0 = 3x^2 - 8x + 1$ $x_{E1} \approx 0,13$ $x_{E2} \approx 2,54$ $f''(0,13) = -7,22 < 0$ $f(0,13) \approx 6,06$ $H(0,13 6,06)$ $f''(2,54) = 7,24 > 0$ $f(2,54) \approx -0,88$ $T(2,54 -0,88)$</p> | <p>1</p> <p>5</p> |
| 1c) | <p>Wendepunkt: $0 = 6x - 8$ $x_W = \frac{4}{3}$ $f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \neq 0$ $f\left(\frac{4}{3}\right) \approx 2,59$ $W\left(\frac{4}{3} 2,59\right)$</p> <p>Krümmung: $x < x_W$: G_f rechtsgekrümmt $x_W < x$: G_f linksgekrümmt (Nachweis z.B. über Teststellen der zweiten Ableitung)</p> | <p>3</p> <p>2</p> |
| 1d) |  | <p>3</p> |

2. Aufgabe: Anwendung der Differential- und Integralrechnung

Der nördliche Abschnitt einer Motorsport-Rennstrecke lässt sich durch eine ganzrationale Funktion f beschreiben mit

$$f(x) = -\frac{1}{50}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{23}{2}x - 6 ; x \in \mathbb{R}.$$

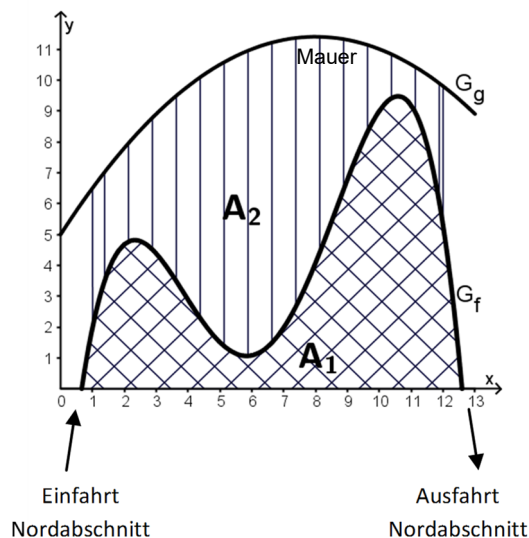
Der Graph von f heißt G_f (vgl. Abbildung) und schneidet die x -Achse an den Stellen $x_1 \approx 0,66$ und $x_2 \approx 12,60$.

Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 10 m.

Das Streckengelände wird nördlich durch eine Mauer begrenzt, deren Verlauf durch die Funktion g mit

$$g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{8}{5}x + 5 ; x \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden kann. Ihr Graph heißt G_g .



- a) Im gesamten Innenbereich des Nordabschnitts soll Rasen angesät werden. Geben Sie die Größe der Rasenfläche in m^2 an. Ermitteln Sie dazu den Inhalt der Fläche A_1 , die von G_f und der x -Achse eingeschlossen wird.
- b) Zwischen Rennstrecke und Begrenzungsmauer soll zur Erhöhung der Sicherheit der Fahrer ein Kiesbett im Intervall $1 \leq x \leq 12$ angelegt werden (vgl. A_2 in der Abbildung). Berechnen Sie die notwendige Kiesmenge in m^3 bei einer Kiesschichthöhe von 30 cm.
- c) Der nördliche Abschnitt der Rennstrecke beginnt mit einer Rechtskurve. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes R , an dem diese in die anschließende Linkskurve übergeht.
- d) Zur Erhöhung der Sicherheit wollen die Streckenbetreiber an bestimmten Stellen der Begrenzungsmauer Strohballen aufstellen. Bestimmen Sie den Aufprallpunkt Q eines Rennautos an der Streckenbegrenzung G_g , wenn das Fahrzeug im Punkt $P(10|9)$ von der Strecke G_f abkommt und geradlinig weiterfährt. Stellen Sie dazu zunächst eine Gleichung der Tangente t an G_f in P auf.

(zur Kontrolle: $t(x) = 1,5x - 6$)

| | | | | | |
|--------------|----|----|----|----|-------|
| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | Summe |
| Punkte | 4 | 6 | 4 | 6 | 20 |

| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|------|--|------------|
| 2a) | $F(x) = -\frac{1}{250}x^5 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{23}{4}x^2 - 6x$ $A_1 = \int_{0,66}^{12,60} f(x) dx = [F(x)]_{0,66}^{12,60} \approx 50,38 - (-1,82) = 52,2 \text{ FE}$ <p>Der Innenbereich des Nordabschnitts hat einen Flächeninhalt von 5220 m².</p> | 4 |
| 2b) | $h(x) = g(x) - f(x) = \frac{1}{50}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{39}{10}x^2 - \frac{99}{10}x + 11$ $H(x) = \frac{1}{250}x^5 - \frac{1}{8}x^4 + \frac{39}{30}x^3 - \frac{99}{20}x^2 + 11x$ $A_2 = \int_1^{12} h(x) dx = [H(x)]_1^{12} \approx 68,93 - 7,23 = 61,7 \text{ FE} \quad \triangleq 6170 \text{ m}^2$ <p>Kiesmenge: 6170 m² · 0,3 m = 1851 m³ Es werden 1851 m³ Kies benötigt.</p> | 5 1 |
| 2c) | $f'(x) = -\frac{2}{25}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + \frac{23}{2}; \quad f''(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 3x - 8; \quad f'''(x) = -\frac{12}{25}x + 3$ $f''(x) = -\frac{6}{25}x^2 + 3x - 8 = 0$ $x^2 - \frac{25}{2}x + \frac{100}{3} = 0$ $x_1 \approx 8,64 \quad x_2 \approx 3,86 \quad \text{Der Übergang befindet sich bei } x_2.$ $f'''(3,86) \approx 1,15 \neq 0$ $f(3,86) \approx 3,11 \quad R(3,86 3,11)$ | 4 |
| 2d) | $f'(10) = 1,5 \quad t(x) = 1,5x - 6$ <p>Aufprallpunkt: $t(x) = g(x)$</p> $1,5x - 6 = -\frac{1}{10}x^2 + \frac{8}{5}x + 5$ $x^2 - x - 110 = 0$ $x_1 = 11 \quad x_2 = -10 \quad \text{Die Stelle } x_2 \text{ liegt nicht im betrachteten Streckenabschnitt.}$ $t(11) = g(11) = 10,5$ <p>Der Aufprallpunkt befindet sich in Q(11 10,5).</p> | 2 4 |
| | Summe | 20 |

3. Aufgabe: Analytische Geometrie

In einem kartesischen räumlichen Koordinatensystem sind die Gerade g durch die Punkte $A(4|3|1)$ und $B(1|3|2)$ sowie die Gerade h durch den Punkt $Q(-1|-5|-4)$ und den

Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

- Geben Sie je eine Gleichung für die Gerade g und die Gerade h an. Untersuchen Sie rechnerisch die Lagebeziehung von g und h und berechnen Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes.
- Die Punkte A , B und $C(2|7|5)$ bilden das Dreieck ABC . Weisen Sie durch Rechnung nach, dass es sich bei dem Winkel $\angle ABC$ um einen rechten Winkel handelt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Seite AB .
- Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .
- Geben Sie eine Gleichung einer Geraden k an, die durch den Punkt $P(-2|4|0)$ und parallel zur Geraden h verläuft.
- Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D , so dass ein Rechteck $ABCD$ entsteht.

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | e) | Summe |
|--------------|----|----|----|----|----|-------|
| Punkte | 6 | 4 | 6 | 2 | 2 | 20 |

| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|------|---|----------------------------|
| 3a) | $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ <p>Die Geraden g und h sind nicht parallel.</p> $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ <p>$r = 1; s = 2$</p> $r = 1 \text{ in } g: \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ <p>Die Geraden g und h haben einen gemeinsamen Schnittpunkt S(1 3 2)</p> | <p>2</p> <p>4</p> |
| 3b) | $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 - 3 = 0$ <p>$\beta = 90^\circ$</p> <p>M(2,5 3 1,5)</p> | <p>2</p> <p>2</p> |
| 3c) | $ \overrightarrow{AC} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = 6 \text{ LE}$ $ \overrightarrow{BA} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \approx 3,16 \text{ LE}$ $ \overrightarrow{BC} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26} \approx 5,10 \text{ LE}$ <p>$u = 3,16 + 5,1 + 6 = 14,26 \text{ LE}$</p> <p>$A = \frac{1}{2} \cdot 3,16 \cdot 5,1 \approx 8,06 \text{ FE}$</p> | <p>3</p> <p>1</p> <p>2</p> |

| | | |
|-----|---|----|
| 3d) | $k : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ <p>alternative Lösungen möglich</p> | 2 |
| 3e) | $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ <p>Punkt D hat die Koordinaten D(5 7 4).</p> | 2 |
| | Summe | 20 |

3. Aufgabe: Zahlenfolgen

Eine Zahlenfolge (a_n) ergibt sich als Quotient zweier Zahlenfolgen (b_n) und (c_n) :

$$a_n = \frac{b_n}{c_n}.$$

Von den arithmetischen Zahlenfolgen (b_n) und (c_n) sind folgende Eigenschaften bekannt:

$$b_n : 5; 11; 17; \dots \quad \text{und} \quad c_5 = 17; c_{10} = 32.$$

- a) Ermitteln Sie rechnerisch eine Bildungsvorschrift für die Zahlenfolge (a_n) .
(zur Kontrolle: $a_n = \frac{6n-1}{3n+2}$)
- b) Berechnen Sie von (a_n) die ersten fünf Zahlenfolgenreihenmitglieder und zeigen Sie, dass (a_n) weder eine arithmetische noch eine geometrische Folge ist.
- c) Weisen Sie rechnerisch das Monotonieverhalten von (a_n) nach.
- d) Bestimmen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n) . Berechnen Sie, ab welchem Zahlenfolgenreihenmitglied von (a_n) alle restlichen Folgenreihenmitglieder in der ε -Umgebung von g liegen, wenn $\varepsilon = \frac{1}{100}$ beträgt.

| Aufgabenteil | a) | b) | c) | d) | Summe |
|--------------|----|----|----|----|-------|
| Punkte | 5 | 6 | 4 | 5 | 20 |

| Teil | Erwartete Teilleistung (alternative Lösungswege möglich) | Pkt. |
|------|--|---------------------|
| 3a) | <p>Zahlenfolge (b_n) mit $b_n : 5; 11; 17; \dots$ $b_n = b_1 + (n-1) \cdot d$ $b_n = 5 + (n-1) \cdot 6$ $b_n = 5 + 6n - 6$ $b_n = 6n - 1$</p> <p>Zahlenfolge (c_n) mit $c_5 = 17$ $c_{10} = 32$: $c_{10} = c_5 + 5 \cdot d$ $d = \frac{32-17}{5} = 3$ $c_1 = c_5 - 4 \cdot d$ $c_1 = 5$ $c_n = c_1 + (n-1) \cdot d$ $c_n = 5 + (n-1) \cdot 3$ $c_n = 5 + 3n - 3$ $c_n = 3n + 2$</p> <p>aus $a_n = \frac{b_n}{c_n}$ folgt $a_n = \frac{6n-1}{3n+2}$</p> | 2 3 |
| 3b) | <p>5 Folgenglieder: $a_1 = 1$ $a_2 = \frac{11}{8} \approx 1,38$ $a_3 = \frac{17}{11} \approx 1,55$ $a_4 = \frac{23}{14} \approx 1,64$ $a_5 = \frac{29}{17} \approx 1,71$</p> <p>arithmetische ZF: $\frac{11}{8} - 1 = \frac{3}{8}$ $\frac{17}{11} - \frac{11}{8} = \frac{15}{88}$ $\frac{15}{88} \neq \frac{3}{8}$ d nicht konstant (a_n) keine arithmetische ZF</p> <p>geometrische ZF: $\frac{11}{8} : 1 = \frac{11}{8}$ $\frac{17}{11} : \frac{11}{8} = 1 \frac{15}{121}$ $\frac{11}{8} \neq 1 \frac{15}{121}$ q nicht konstant (a_n) keine geometrische ZF</p> | 2 2 2 |
| 3c) | <p>Vermutung: Die Zahlenfolge ist streng monoton steigend.</p> $a_{n+1} > a_n$ $\frac{6(n+1)-1}{3(n+1)+2} > \frac{6n-1}{3n+2}$ $\frac{6n+5}{3n+5} > \frac{6n-1}{3n+2}$ $18n^2 + 12n + 15n + 10 > 18n^2 - 3n + 30n - 5$ $10 > -5 \text{ w. A.}$ <p>(a_n) ist streng monoton steigend.</p> | 4 |

