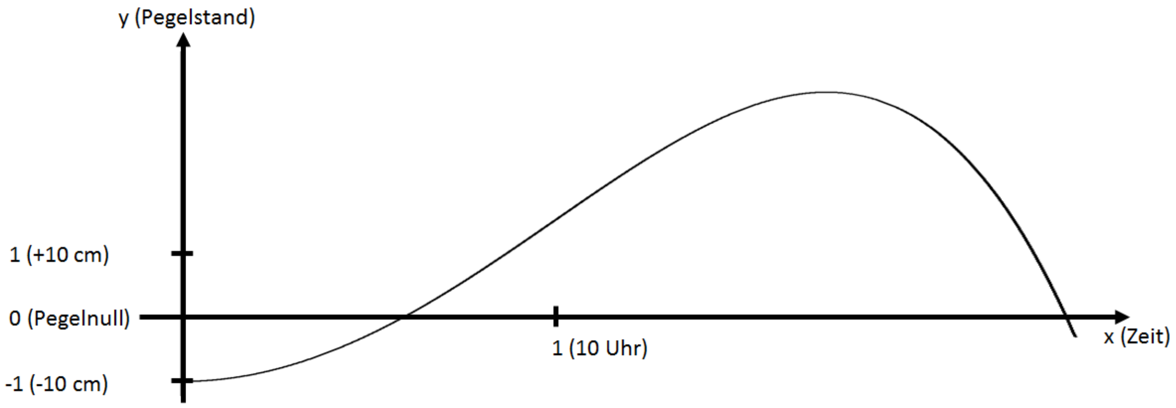
1. Aufgabe: Differentialrechnung

Der Wasserstand eines Flusses wird kontinuierlich an Pegellatten abgelesen und in Zentimetern über Pegelnull (cm ü PN) angegeben.
Nach einer längeren Trockenperiode, in welcher der Wasserstand unter den Pegelnullpunkt gesunken ist, sorgten starke Regenfälle am Tage für einen kurzfristigen Anstieg des Pegelstandes des Flusses. Über einen Zeitraum von 0 bis 24 Uhr soll der Pegelstand f in Abhängigkeit von der Zeit x ausgewertet werden. Der Pegelstand f kann näherungsweise durch die Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^4 + 3x^2 - 1;\ x \in R;\ 0 \le x \le 2{,}4$ dargestellt werden. Der Graph von f heißt G_f und ist in der Skizze veranschaulicht. Eine Einheit auf der y-Achse entspricht 10 cm und eine Einheit auf der x-Achse entspricht 10 Stunden.



a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Punkte $P_1(0{,}7 \mid 0{,}35)$ und $P_2(1{,}6 \mid 3{,}40)$ zum Graphen der Funktion f gehören, der die Pegelstände des Flusses zu bestimmten Zeiten beschreibt und geben Sie die dazu gehörigen Uhrzeiten an.

Berechnen Sie den Pegelstand zu Beginn der Messung und zeigen Sie rechnerisch, dass es sich um einen lokalen Tiefpunkt von G_f handelt.

b) Ermitteln Sie die Gesamtdauer der Zeit, in welcher der Pegelstand über dem Pegelnullpunkt lag.

c) Geben Sie den Pegelstand um 20 Uhr an und ermitteln Sie rechnerisch in cm je Stunde, wie stark der Pegelstand zu diesem Zeitpunkt steigt bzw. fällt.

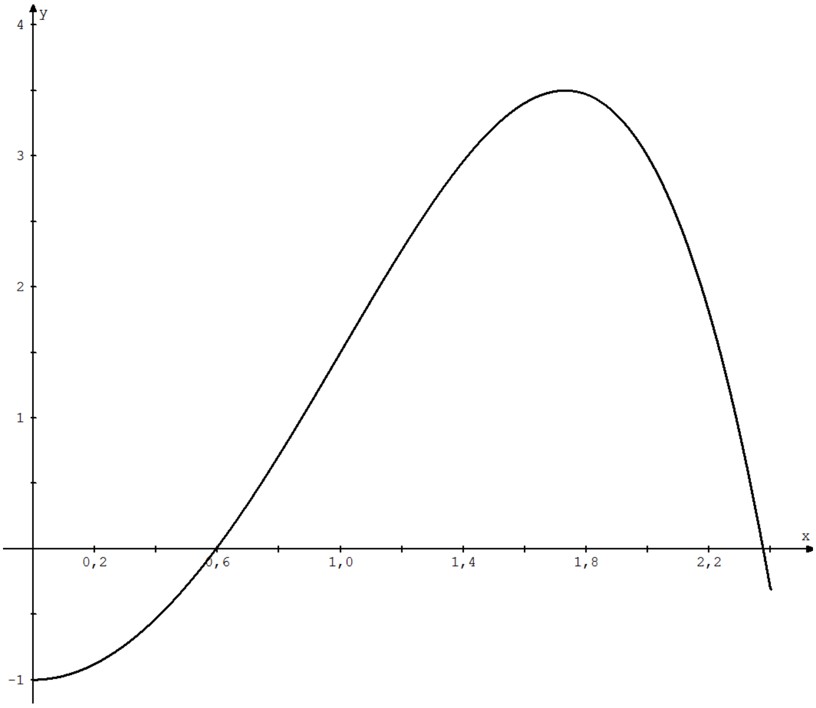
d) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem der Pegelstand am höchsten war und geben Sie den Pegelstand an.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_f und erläutern Sie die Bedeutung dieses Wendepunktes in Hinblick auf die Tendenz des Pegelstandes.

f) Zeichnen Sie G_f im Intervall $0 \le x \le 2{,}4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	5	6	4	5	4	3	27

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
1a)	Punktprobe: $f(0{,}7)=0{,}35$ Uhrzeit: $0{,}7\cdot 10=7$; 7 Uhr $f(1{,}6)=3{,}40$ $1{,}6\cdot 10=16$; 16 Uhr $x=0$ $f(0)=-1$ Der Pegelstand beträgt 10 cm unter PN (-10 cm über PN). Nachweis Extrempunkt: $f'(x)=-2x^3+6x$ $f'(0)=0$ $f''(x)=-6x^2+6$ $f''(0)=6>0$ Minimum	2 1 2
1b)	Nullstellenberechnung: $0=-0{,}5x^4+3x^2-1$ $0=x^4-6x^2+2$ $x^2=z$ $0=z^2-6z+2$ $z_1\approx 5{,}65$ $z_2\approx 0{,}35$ $x_1\approx 2{,}38$; $x_2\approx -2{,}38$; $x_3\approx 0{,}59$; $x_4\approx -0{,}59$ (negative Werte entfallen als Problemlösung) Berechnung der Gesamtdauer: 2,38 - 0,59 = 1,79 $1{,}79\cdot 10=17{,}9$ 17,9 Stunden lag der Pegelstand über dem Nullpunkt.	4 2
1c)	Pegelstandshöhe: $f(2)=3$ Der Pegel lag 30 cm ü PN. Anstieg: $f'(x)=-2x^3+6x$ $f'(2)=-4$ Der Pegelstand sinkt mit 4 cm je Stunde.	1 3
1d)	Extrempunktberechnung: $f'(x)=-2x^3+6x$ $f''(x)=-6x^2+6$ $f'(x)=0$ $0=-2x^3+6x$ $T(0\mid -1)$ siehe Aufgabe a) $0=-2x^2+6$ $x_{E2}\approx 1{,}73$; $x_{E3}\approx -1{,}73$ (negativer Wert entfällt als Problemlösung) $f''(1{,}73)\approx -11{,}96<0$ $H(1{,}73\mid 3{,}5)$ Nach 17,3 Stunden (17.18 Uhr) war der Pegelstand mit 35 cm ü PN am höchsten.	4 1
1e)	Berechnung Wendepunkt: $f''(x)=-6x^2+6$ $0=-6x^2+6$ $x_{W1}=1$; $x_{W2}=-1$ (negativer Wert entfällt als Problemlösung) $f'''(x)=-12x$ $f'''(1)=-12\neq 0$ $W(1\mid 1{,}5)$ Im Wendepunkt ist der Anstieg des Pegelstandes am größten.	3 1

1f)	Graph  	3
	Summe	27

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x-9$; $x \in R$.
Der Graph der Funktion ist G_f. Die Extrempunkte von G_f sind gegeben mit $H(2\,|\,1)$ und $T(4\,|\,-1)$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Graphen G_f.

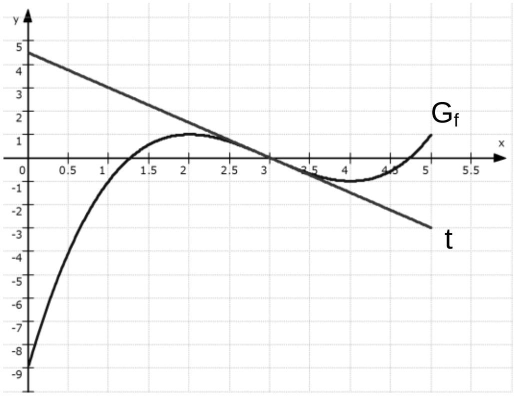
b) Zeigen Sie, dass der Punkt $W(3\,|\,0)$ Wendepunkt des Graphen G_f ist.

c) Zeichnen Sie den Graphen G_f und die Gerade t mit $y=-1{,}5x+4{,}5$ im Intervall $0 \le x \le 5$ in ein gemeinsames kartesisches Koordinatensystem.

d) Durch die Gerade t, den Graphen G_f und die y-Achse wird im Intervall $0 \le x \le 3$ genau eine Fläche vollständig eingeschlossen.
Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes A dieser Fläche.

e) Die x-Achse teilt die unter d) beschriebene Fläche in zwei Teile. Berechnen Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte dieser Teilflächen.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	4	3	4	5	4	20

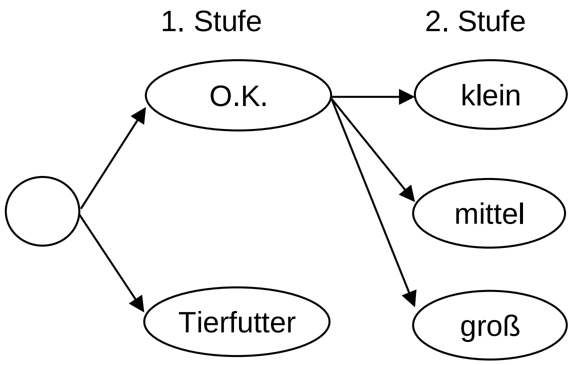
Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
2a)	Koordinaten der Achsenschnittpunkte $S_y(0 \mid -9)$ $f(x) = 0; \quad x_1 = 3 \quad$ (aus $W(3 \mid 0)$ bzw. durch Probieren) $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 12x - 9\right) : (x-3) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3$ $N_1(1{,}27 \mid 0); N_2(3 \mid 0); N_3(4{,}73 \mid 0)$	1 3
2b)	Wendepunkt $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 9x + 12; f''(x) = 3x - 9; f'''(x) = 3$ $f''(3) = 0$ und $f'''(3) = 3 \neq 0; f(3) = 0; W(3 \mid 0)$ ist Wendepunkt von G_f	3
2c)	Graph G_f und Gerade t 	4
2d)	Flächeninhalt A $h(x) = g(x) - f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 12x - 9\right) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{27}{2}x + \frac{27}{2}$ $H(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{27}{4}x^2 + \frac{27}{2}x$ $A = \int_0^3 h(x)\,dx = [H(x)]_0^3 \approx 10{,}13$ FE	5
2e)	Flächeninhalte A_1 und A_2 $A_2 = \left\| \int_0^{1,27} f(x)\,dx \right\| = \left\| \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 6x^2 - 9x\right]_0^{1,27} \right\| = 4{,}5$ FE $A_1 = A - A_2 = 10{,}13 \text{ FE} - 4{,}5 \text{ FE} = 5{,}63$ FE	3 1
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Ein Obstbau-Betrieb hat eine hochmoderne zweistufige Apfelsortieranlage angeschafft. In der ersten Stufe werden beschädigte Äpfel als Tierfutter aussortiert. In der zweiten Stufe werden die übrigen Äpfel nach der Größe in drei Gruppen sortiert.

Der Hersteller gibt als Richtwerte für die Sortierung in den einzelnen Stufen die folgenden theoretischen Wahrscheinlichkeiten an:
Erste Stufe: O.K. (90 %)
Zweite Stufe: klein (15 %) und groß (25 %)

Das nebenstehende Diagramm verdeutlicht den Sortierprozess.



a) Beschriften Sie im Diagramm alle Zweige mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

b) Die tägliche Sortierung von 15 t Äpfeln ist geplant. Ermitteln Sie für die vier Sortierergebnisse jeweils die theoretische Ausbeute an Äpfeln in kg je Tag.

Ein erster Probelauf der Sortieranlage mit 2 t Äpfeln ergab folgende Ergebnisse:
klein: 340 kg; mittel: 880 kg; groß: 540 kg. Der Rest war Tierfutter.

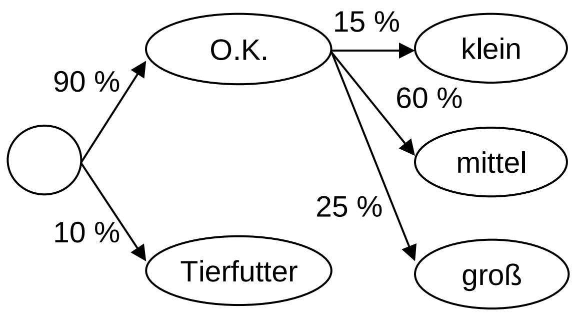
c) Ermitteln Sie die relativen Häufigkeiten der vier Sortierergebnisse und stellen Sie diese gemeinsam mit den theoretisch ermittelten Wahrscheinlichkeiten aus Aufgabe a) in einem geeigneten Diagramm dar.

d) Hinweis: Benutzen Sie für die folgende Berechnung die relativen Häufigkeiten aus dem ersten Probelauf.
Die Äpfel können zu folgenden Preisen je kg an den Handel verkauft werden:
Tierfutter: 0,20 €; klein: 0,80 €; mittel: 0,95 €; groß: 1,30 €.
Ermitteln Sie den Erlös aus den täglich geplanten 15 t Äpfeln. Welche Menge an Äpfeln müsste für einen Erlös von 10000 € verarbeitet werden?

e) Von den 12 Mitarbeitern des Betriebes werden täglich zwei zur Betreuung der Sortieranlage ausgewählt. Ermitteln Sie rechnerisch, wie viele unterschiedliche Zweierteams sich bilden lassen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden die Freunde Karl und Klaus ausgewählt?

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	3	3	6	4	4	20

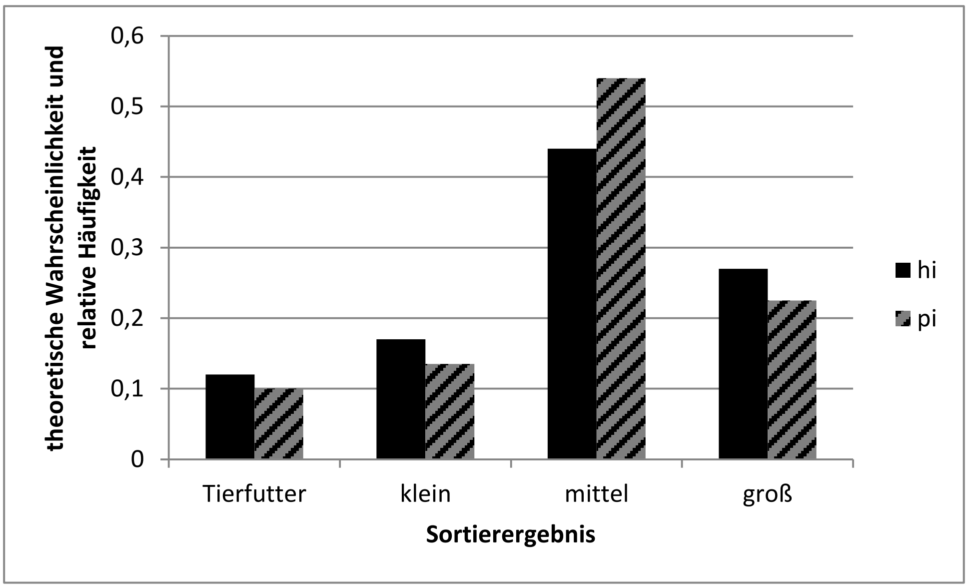
<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>
Zweige: P(Tierfutter) =100 %-90 %=10 %
P(mittel) =100 %-15 %-25 %=60 %

Beschriftung: 1. Stufe 2. Stufe


</td><td>2

1</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>
Pfadwahrscheinlichkeiten:
P(Tierfutter) =10 %
P(klein) =90 %·15 %=13,5 %
P(mittel) =90 %·60 %=54 %
P(groß) =90 %·25 %=22,5 %

Ausbeute Tierfutter: 15000 kg·10 %=1500 kg
Ausbeute klein: 15000 kg·13,5 %=2025 kg
Ausbeute mittel: 15000 kg·54 %=8100 kg
Ausbeute groß: 15000 kg·22,5 %=3375 kg
</td><td>2

1</td></tr>
<tr><td>3c)</td><td>
<table>
<tr><th>Sortierergebnis</th><th>Tierfutter</th><th>klein</th><th>mittel</th><th>groß</th></tr>
<tr><td>H_i</td><td>240 kg</td><td>340 kg</td><td>880 kg</td><td>540 kg</td></tr>
<tr><td>h_i</td><td>0,12</td><td>0,17</td><td>0,44</td><td>0,27</td></tr>
</table>


</td><td>2

4</td></tr>
</table>

3d)	Erlös: $15000 \cdot (0{,}2 \cdot 0{,}12 + 0{,}8 \cdot 0{,}17 + 0{,}95 \cdot 0{,}44 + 1{,}3 \cdot 0{,}27) = 13935$ Aus 15 t Äpfeln kann täglich ein Erlös von 13935 € erzielt werden. Menge: $\frac{15000}{x} = \frac{13935}{10000}$; $x = \frac{15000 \cdot 10000}{13939} \approx 10764{,}26$ Für einen Erlös von 10000 € müssten 10,76 t Äpfel verarbeitet werden.	2 2
3e)	Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge und ohne Wiederholung: $C_{12}^{2} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!(10!)} = 66$ Es gibt 66 Möglichkeiten zur Bildung der Zweierteams. Auswahl von Karl und Klaus: $P(\text{KundK}) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{66} = 0{,}0\overline{15}$ Die Wahrscheinlichkeit für die Auswahl der Freunde beträgt 1,52 %.	2 2
	Summe	20