1. Aufgabe: Differentialrechnung

Der Graph G_f einer Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $x, a, b, c, d \in R$ schneidet die y-Achse bei $y = 8$. Der Graph G_f verfügt bei $x = 4$ über eine Nullstelle.
Die Wendetangente t an G_f hat an der Wendestelle $x_w = 1$ den Anstieg $m = -9$.

a) Ermitteln Sie rechnerisch eine Funktionsgleichung der Funktion f.
(zur Kontrolle: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$)

Falls Sie kein vollständiges Gleichungssystem aufstellen konnten, ermitteln Sie die Koeffizienten für die Funktionsgleichung von f ersatzweise durch das Lösen des folgenden Gleichungssystems:

$$
\begin{aligned}
32a + 8b + 2c &= -4 \\
9a + 6b &= -3c - 27 \\
24a &= -8b
\end{aligned}
$$

b) Berechnen Sie alle weiteren Nullstellen der Funktion f.

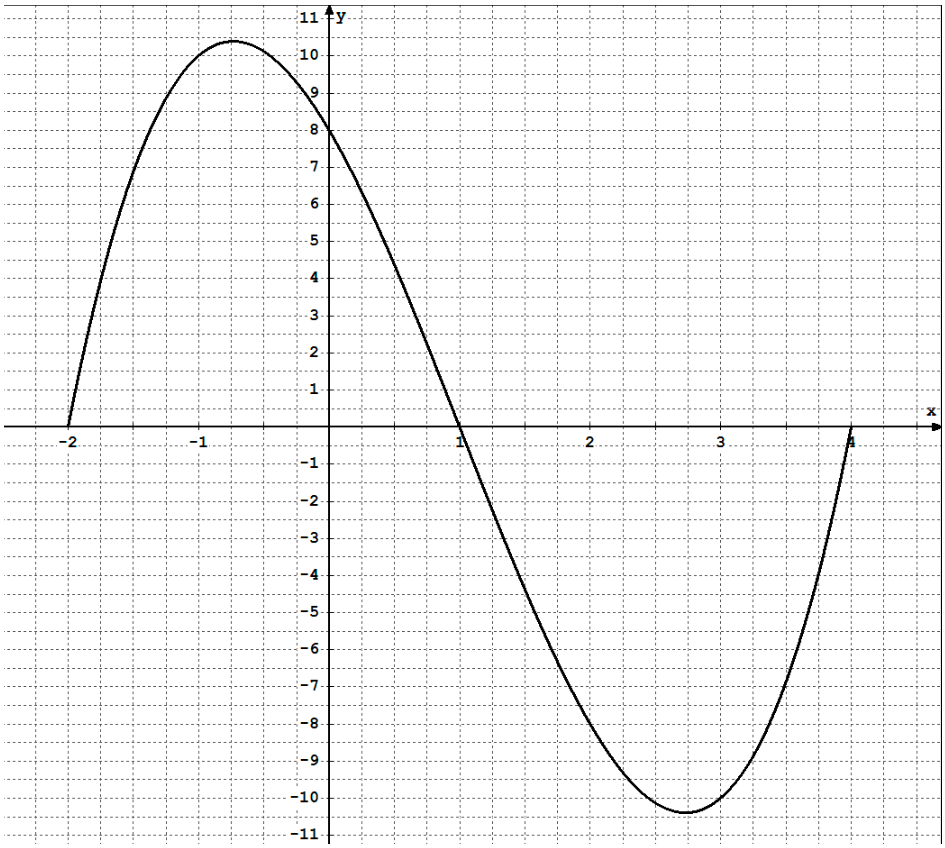
c) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und des Wendepunktes von G_f und weisen Sie die Art der Extrema nach.

d) Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $-2 \le x \le 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

e) Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der gesamten Fläche, die von G_f und der x- Achse vollständig eingeschlossen wird.

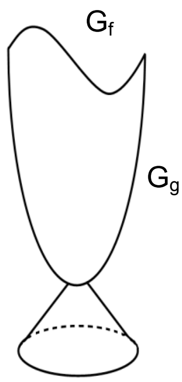
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	8	3	8	3	5	27

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
1a)	$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ $f''(x)=6ax+2b$ $f(0)=8:\quad d=8$ $f(4)=0:\quad 64a+16b+4c+d=0$ $f'(1)=-9:\quad 3a+2b+c=-9$ $f''(1)=0:\quad 6a+2b=0$ Ermitteln der Koeffizienten $f(x)=x^3-3x^2-6x+8$	1 4 3
1b)	$f(x)=x^3-3x^2-6x+8=0\qquad x_1=4$ (aus Aufgabenstellung) Polynomdivision: $(x^3-3x^2-6x+8):(x-4)=x^2+x-2$ $x_2=-2;\ x_3=1$	3
1c)	$f'(x)=3x^2-6x-6=0;\quad f''(x)=6x-6;\quad f'''(x)=6$ $x^2-2x-2=0$ $x_{E1}\approx 2{,}73\qquad f''(2{,}73)=10{,}38>0\qquad T(2{,}73\mid -10{,}39)$ $x_{E2}\approx -0{,}73\qquad f''(-0{,}73)=-10{,}38<0\qquad H(-0{,}73\mid 10{,}39)$ $f''(x)=6x-6=0\qquad x_W=1$ $f'''(1)=6\neq 0$ $f(1)=0$ $W(1\mid 0)$	1 5 2

1d)		3
1e)	$A_1 = \int_{-2}^{1} f(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 8x\right]_{-2}^{1} = 20{,}25\,\text{FE}$ $A_2 = \left\|\int_{1}^{4} f(x)dx\right\| = \left\|[F(x)]_1^4\right\| = 20{,}25\,\text{FE}$ $A_{ges} = 40{,}5\,\text{FE}$	4 1
	Summe	27

2. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Ein kleiner Pokal besteht aus zwei Teilen. Der Holzfuß des Pokals hat die Form eines geraden Kegelstumpfes. Der flache Aufsatz wird aus einer bedruckbaren Glasscheibe hergestellt, deren Begrenzung sich durch die Graphen G_f und G_g beschreiben lässt.



Die zugehörigen Funktionen f und g sind gegeben durch

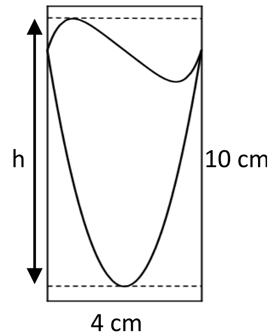
$f(x) = \frac{1}{16}x^5 - x$ und $g(x) = 2x^2 - 8$ im Intervall $-2 \le x \le 2$; $x \in R$.

Hinweis: Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 cm.

a) Die beiden Graphen G_f und G_g schneiden sich im angegebenen Intervall nur an zwei Stellen. Weisen Sie rechnerisch nach, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ diese beiden Schnittstellen sind.

b) Zeigen Sie, dass eine Seite des Glasaufsatzes einen Flächeninhalt von 21,33 cm² hat.

c) Bei der Herstellung soll der Aufsatz aus einer rechteckigen Glasscheibe mit einer Breite von 4 cm und einer Länge von 10 cm ausgefräst werden. Berechnen Sie den prozentualen Verschnitt bei der Fertigung eines Aufsatzes.



d) Ermitteln Sie rechnerisch die Höhe h des Pokalaufsatzes in cm, damit die Größe der rechteckigen Glasscheibe zur optimalen Materialausnutzung angepasst werden kann.

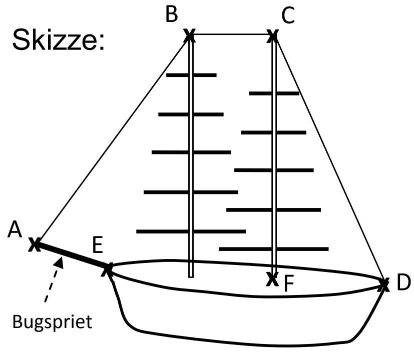
e) Der Fuß des Pokals kann durch einen Kegelstumpf beschrieben werden, der sich bei der Rotation der Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{2}x + 1$ im Intervall $0 \le x \le 2$ um die x- Achse ergibt. Bestimmen Sie das Volumen des Holzfußes in cm³.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	3	4	4	5	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
2a)	$f(x) = g(x)$ $\frac{1}{16}x^5 - x = 2x^2 - 8$ $d(x) = 0 = \frac{1}{16}x^5 - 2x^2 - x + 8$ $d(-2) = 0;\ d(2) = 0$ oder $f(2) = g(2) = 0$ $f(-2) = g(-2) = 0$	3
2b)	$A = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{16}x^5 - 2x^2 - x + 8\right)dx = \left[\frac{1}{96}x^6 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 8x\right]_{-2}^{2} \approx 21{,}33\,\text{FE}$ Der Flächeninhalt beträgt 21,33 cm².	4
2c)	$A_1 = 4 \cdot 10 = 40\,\text{FE}$ $A_2 = 40 - 21{,}33 = 18{,}67\,\text{FE}$ $\frac{40}{100} = \frac{18{,}67}{p\,\%}$ $p\,\% \approx 46{,}68\,\%$ Der Verschnitt beträgt bei der Fertigung 46,68 %.	4
2d)	$f'(x) = \frac{5}{16}x^4 - 1;\ f''(x) = \frac{5}{4}x^3$ $0 = \frac{5}{16}x^4 - 1;\ x_{E1} \approx -1{,}34;\ x_{E2} \approx 1{,}34$ $f''(1{,}34) \approx 3{,}01 > 0$ Tiefpunkt; $f''(-1{,}34) \approx -3{,}01 < 0$ Hochpunkt $f(-1{,}34) \approx 1{,}07$ $g(0) = -8$ $1{,}07 - (-8) = 9{,}07$ Der Pokalaufsatz hat eine Höhe von 9,07 cm.	5
2e)	$V = \pi \cdot \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)dx$ $V = \pi \cdot \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2 \approx 14{,}66\ \text{VE}$ (Alternativlösung mit Volumenformel möglich) Der Fuß des Pokales hat ein Volumen von 14,66 cm³.	4
	Summe	20

3. Aufgabe: Analytische Geometrie

Skizze:



Bei einem Segelschiff werden Masten, Taue und zugehörige Bedienelemente insgesamt als Takelage bezeichnet. Im Bug, dem vorderen Teil des Segelschiffes, ragt der sogenannte Bugspriet über den Schiffsrumpf hinaus und dient durch seine Befestigungsmöglichkeiten der verbesserten Mastabstützung.

Beim Zweimaster „Vektoria" liegt die Spitze des Bugspriets im Punkt $A(-5|-3|2)$. Die Heckmitte befindet sich im Punkt $D(31|27|0)$. Das gesamte Oberdeck der „Vektoria" liegt in der x-y-Ebene. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Das längste Tau der „Vektoria" verläuft von der Bugsprietspitze A über die Vordermastspitze im Punkt $B(13|12|24)$ und die Hintermastspitze $C(19|17|26)$ und endet schließlich in der Heckmitte. Ermitteln Sie die Gesamtlänge dieses Taus.

b) Der Hintermast besitzt den Fußpunkt $F(19|17|0)$ auf dem Oberdeck. Der Bugspriet ist in $E(1|2|0)$ mit dem Schiffsrumpf verbunden. Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Punkte D, E und F auf einer Geraden liegen und untersuchen Sie, in welchem Verhältnis der Punkt F die Länge des Oberdecks, also die Strecke $\overline{ED}$, teilt.

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel des Bugspriets und dem Tau, das die Punkte A und B verbindet.

d) Das Tau t_1 verläuft von der Mastspitze B zum Fußpunkt $F(19|17|0)$ des Hintermastes. Ein weiteres Tau verläuft entlang der Geraden t_2 mit

$$t_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 16 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}; s \in R.$$

Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die Taue t_1 und t_2 schneiden und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an.

Hinweis: Die Taue t_1 und t_2 sind nicht in der Skizze eingezeichnet.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	4	7	3	6	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
3a)	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}18\\15\\22\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{18^2+15^2+22^2} = \sqrt{1033} \approx 32{,}14\,\text{LE}$ $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6^2+5^2+2^2} = \sqrt{65} \approx 8{,}06\,\text{LE}$ $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}12\\10\\-26\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{12^2+10^2+26^2} = \sqrt{920} \approx 30{,}33\,\text{LE}$	3
	Gesamtlänge g = 32,14 m + 8,06 m + 30,33 m = 70,53 m	1
3b)	Geradennachweis: Gerade durch E und F: $g: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}18\\15\\0\end{pmatrix}$ Prüfe D(31|27|0): $\begin{pmatrix}31\\27\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}18\\15\\0\end{pmatrix}$ für $r = \frac{5}{3}$ erfüllt, also liegt D auf g. Somit liegen die Punkte D, E und F auf einer gemeinsamen Gerade.	4
	Teilverhältnis: $\left\|\overrightarrow{EF}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}18\\15\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{18^2+15^2+0^2} = \sqrt{549} \approx 23{,}43\,\text{LE}$ $\left\|\overrightarrow{FD}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}12\\10\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{12^2+10^2+0^2} = \sqrt{244} \approx 15{,}62\,\text{LE}$ $\left\|\overrightarrow{EF}\right\| : \left\|\overrightarrow{FD}\right\| = 3:2$ Der Punkt F teilt die Strecke $\overline{ED}$ im Verhältnis 3:2.	3

3c)	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}18\\15\\22\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{18^2+15^2+22^2} = \sqrt{1033}\,\text{LE}$ (aus Teilaufgabe a)) $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}6\\5\\-2\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6^2+5^2+2^2} = \sqrt{65}\,\text{LE}$ $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AE}\right\|} = \dfrac{\begin{pmatrix}18\\15\\22\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\5\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{1033}\cdot\sqrt{65}} = \dfrac{139}{\sqrt{1033}\cdot\sqrt{65}} \approx 0{,}5364$ $\alpha \approx 57{,}56°$	3
3d)	$t_1: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\cdot\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix}13\\12\\24\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\5\\-24\end{pmatrix}$	2
	$\begin{pmatrix}13\\12\\24\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\5\\-24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}30\\22\\16\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}10\\5\\8\end{pmatrix}$ mit $r = \frac{3}{4};\ s = -\frac{5}{4}$	3
	S(17,5|15,75|6)	1
	Summe	20

3. Aufgabe: Zahlenfolgen

Die Bundesgartenschau 2015 in der Havelregion dauerte 25 Wochen. Zur Planung der Gartenschau wurde für die erwartete Besucherzahl nach insgesamt n Wochen folgende Gleichung einer arithmetischen Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = 62500n + 25000$ aufgestellt.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der gegebenen Zahlenfolge die Besucherzahl a_1 in der 1. Woche und die in jeder Folgewoche erwartete Anzahl d an Besuchern.

b) Mit wie vielen Besuchern konnten die Veranstalter theoretisch nach 6; 10; 14 und 20 Wochen rechnen? Stellen Sie die erwarteten Besucherzahlen in einem Säulendiagramm dar. Wählen Sie einen geeigneten Maßstab.

c) Berechnen Sie, in welcher Woche man die Besuchergrenze von einer Million laut Plan erstmalig überschritten hätte.

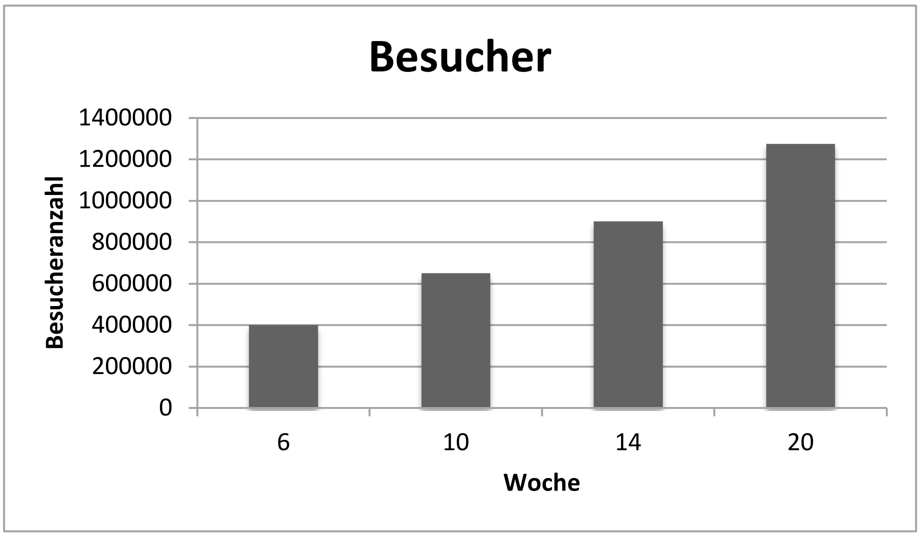
d) Bestimmen Sie die Besucherzahl, von der man nach 25 Wochen planmäßig ausging. Insgesamt 1,05 Millionen Besucher hatte die BUGA tatsächlich. Geben Sie die Abweichung vom geplanten Wert in Prozent an.

Die Gäste der BUGA nutzten neben vielfältigen Veranstaltungen auch die Möglichkeiten, Pflanzen zu kaufen. Ein Gartenbaubetrieb reduzierte in einer Aktionswoche den Stückpreis einer Topfpflanze von anfänglich 2,50 € an jedem Folgetag um 10 %.

e) Stellen Sie für die Preisentwicklung eine Gleichung einer geometrischen Zahlenfolge (b_n) auf. Ermitteln Sie die Tagespreise der Topfpflanzen in dieser einwöchigen Aktion und geben Sie die Höhe der Gesamteinnahme in der Aktionswoche an, wenn täglich 100 Pflanzen verkauft wurden.

f) Berechnen Sie, wie viele Tage der Gärtner die Aktion laufen lassen könnte, ohne den Selbstkostenpreis von 0,65 € zu unterschreiten.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	2	5	3	3	4	3	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
3a)	$a_n = 62500n + 25000$ $a_1 = 87500$ $d = 62500$ Der Anfangswert a_1 beträgt 87500. In jeder Woche wurden d=62500 Besucher erwartet.	2
3b)	$a_6 = 400000$ $a_{10} = 650000$ $a_{14} = 900000$ $a_{20} = 1275000$  	2 3
3c)	$62500n + 25000 \geq 1000000$ $n \geq 15{,}6$ In der 16. Woche wäre die Besuchergrenze von einer Million laut Plan überschritten worden.	3
3d)	$a_{25} = 1587500$ $\frac{1050000}{1587500} \approx 0{,}66$ Die Gesamtbesucherzahl lag 34 % unter der erwarteten.	3

3e)	$b_n = 2{,}50 \cdot 0{,}9^{n-1}$	1
	$b_1 = 2{,}50 \;\; b_2 = 2{,}25 \;\; b_3 \approx 2{,}03 \;\; b_4 \approx 1{,}82$ $b_5 \approx 1{,}64 \;\; b_6 \approx 1{,}48 \;\; b_7 \approx 1{,}33$ (Angaben in €)	2
	$e = 100 \cdot (2{,}50 + 2{,}25 + 2{,}03 + 1{,}82 + 1{,}64 + 1{,}48 + 1{,}33) = 1305$	
	In der Aktionswoche wurden 1305,00 € eingenommen.	1
3f)	$0{,}65 \le 2{,}5 \cdot 0{,}9^{n-1}$ $0{,}585 \le 2{,}5 \cdot 0{,}9^{n}$ $0{,}234 \le 0{,}9^{n}$ $13{,}79 \ge n$ Der Preisnachlass könnte nur bis zum 13. Tag eingeräumt werden.	3
	Summe	20