1. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Die ganzrationale Funktion f fünften Grades hat die Nullstellen 0, ±1 und ±2.
Ihr Graph heißt G_f. Der Punkt P(3|120) ist Teil von G_f.

a) Weisen Sie nach, dass mit $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x;\ x \in R$ eine Funktionsgleichung für die Funktion f mit den oben beschriebenen Eigenschaften gegeben ist.

b) Ermitteln Sie, ob G_f symmetrisch ist und nennen Sie gegebenenfalls die Art der Symmetrie. Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Berechnen Sie die Koordinaten aller Extrem- und Wendepunkte von G_f. Weisen Sie die Art der Extrema nach.

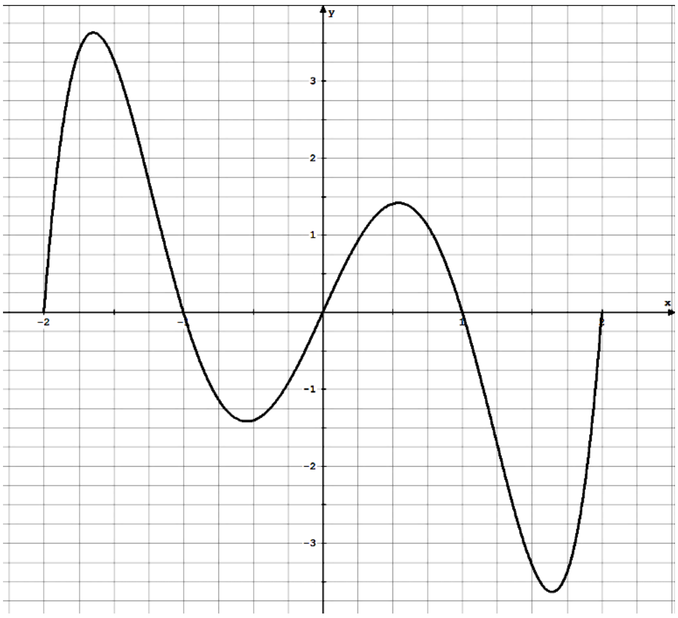
d) Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $-2 \le x \le 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Nutzen Sie dazu alle vorgegebenen und ermittelten Punkte.

e) Berechnen Sie die Maßzahl des gesamten Flächeninhalts aller Flächen, die von G_f und der x-Achse vollständig eingeschlossen werden.

f) Die Gerade t sei die Tangente an G_f im Koordinatenursprung. Geben Sie für t eine Funktionsgleichung an.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	3	2	11	3	6	2	27

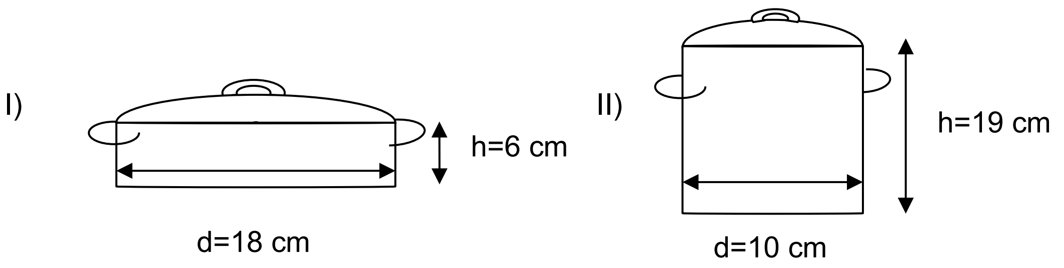
Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
1a)	Einsetzen zum Nachweis der Nullstellen: f(0)=f(-1)=f(1)=f(-2)=f(2)=0 Punktprobe: f(3)=120, d.h. P liegt auf dem Graphen Alternativ ist auch die Rekonstruktion über ein Gleichungssystem möglich.	3
1b)	Symmetrie $f(-x) = -x^5 + 5x^3 - 4x \neq f(x)$ $-f(-x) = x^5 - 5x^3 + 4x = f(x)$ Der Graph ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Alternative Begründung auch über die Exponenten von x möglich.	2
1c)	$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4;\quad f''(x) = 20x^3 - 30x;\quad f'''(x) = 60x^2 - 30$	1
	Extrempunkte $f'(x) = 0 = 5x^4 - 15x^2 + 4$ $0 = z^2 - 3z + \frac{4}{5};\quad z_1 \approx 2{,}70;\quad z_2 \approx 0{,}30$ $x_{E_1} \approx -1{,}64;\quad f''(-1{,}64) \approx -39{,}02 < 0;\quad f(-1{,}64) \approx 3{,}63;\quad H_1(-1{,}64 \mid 3{,}63)$ $x_{E_2} \approx 1{,}64;\quad f''(1{,}64) \approx 39{,}02 > 0;\quad f(1{,}64) \approx -3{,}63;\quad T_1(1{,}64 \mid -3{,}63)$ $x_{E_3} \approx -0{,}55;\quad f''(-0{,}55) \approx 13{,}17 > 0;\quad f(-0{,}55) \approx -1{,}42;\quad T_2(-0{,}55 \mid -1{,}42)$ $x_{E_4} \approx 0{,}55;\quad f''(0{,}55) \approx -13{,}17 < 0;\quad f(0{,}55) \approx 1{,}42;\quad H_2(0{,}55 \mid 1{,}42)$	6
	Wendepunkte $f''(x) = 0 = 20x^3 - 30x$ $0 = x(x^2 - 1{,}5)$ $x_{W_1} = 0;\quad f'''(0) = -30 \neq 0;\quad f(0) = 0;\quad W_1(0 \mid 0)$ $x_{W_2} = -\sqrt{1{,}5} \approx -1{,}22;\quad f'''(-1{,}22) \approx 59{,}30 \neq 0;\quad f(-1{,}22) \approx 1{,}50;\quad W_2(-1{,}22 \mid 1{,}50)$ $x_{W_2} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22;\quad f'''(1{,}22) \approx 59{,}30 \neq 0;\quad f(1{,}22) \approx -1{,}50;\quad W_3(1{,}22 \mid -1{,}50)$ Alternativ kann die Symmetrieeigenschaft zur Abkürzung der Berechnungen genutzt werden.	4

1d)	Graph G_f 	3
1e)	Flächeninhalt $A = 2(A_1 + A_2)$ $A_1 = \int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^2\right]_0^1 \approx 0{,}92$ $A_2 = \left\lvert\int_1^2 f(x)dx\right\rvert = \left\lvert\left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{4}x^4 + 2x^2\right]_1^2\right\rvert \approx \lvert -1{,}33 - 0{,}92\rvert = 2{,}25$ $A = 6{,}34$ Der Flächeninhalt der gesamten eingeschlossenen Flächenstücke beträgt 6,34 FE.	6
1f)	Tangentengleichung $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4$; $f'(0) = 4 = m$; $f(0) = 0 = n$ $t(x) = 4x$	2
	Summe	27

2. Aufgabe: Extremwertaufgabe

Ein Hersteller produziert zylindrische Töpfe in zwei Modellvarianten (siehe Skizze). Er untersucht den Materialverbrauch. Zur Vereinfachung werden Topfdeckel und Griffe vernachlässigt, so dass die Töpfe als oben offene Kreiszylinder betrachtet werden können.

Skizze:



a) Für welchen der beiden oben dargestellten Töpfe müsste der Hersteller sich entscheiden, wenn er den Materialverbrauch gering halten möchte? Begründen Sie durch Berechnung des Oberflächeninhalts ihre Entscheidung.
Berechnen Sie die Volumen der beiden Töpfe und geben Sie diese in Liter an.

b) Ermitteln Sie den Materialkostenunterschied zwischen den Töpfen bei einem Materialpreis von 1,20 € pro dm².

Es soll ein Topfmodell III mit einem Volumen von 1,5 Liter (entspricht 1 500 cm³) und minimalem Materialverbrauch produziert werden.

c) Leiten Sie eine Funktion $A_0(r)$ zur Beschreibung des Oberflächeninhaltes eines Topfes in Abhängigkeit vom Radius r in cm her. Verschnitt und Materialdicke sind dabei zu vernachlässigen.
(zur Kontrolle: $A_0(r) = \pi r^2 + \frac{3000}{r}$)

d) Berechnen Sie den Radius r und die Höhe h für das Topfmodell III so, dass der Materialverbrauch minimal ist.

e) Ermitteln Sie die Materialersparnis von Topf III im Vergleich zum oben beschriebenen Topf II in Prozent. Welcher Kostenvorteil ergibt sich daraus bei der Produktion von 1 000 Töpfen?

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	6	2	3	4	5	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>2a)</td><td>$A_0 = A_G + A_M$
$A_0 = \pi r^2 + 2\pi rh$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>$\mathrm{I}: A_0 = \pi \cdot 9^2 + 2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot 6 \approx 593{,}76\,\text{cm}^2 \approx 5{,}94\,\text{dm}^2$
$\mathrm{II}: A_0 = \pi \cdot 5^2 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 19 \approx 675{,}44\,\text{cm}^2 \approx 6{,}75\,\text{dm}^2$
$A_{0_I} < A_{0_{II}}$
Der Hersteller müsste sich für den Topf I entscheiden.</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>$V = \pi r^2 h$
$\mathrm{I}: V = \pi \cdot 9^2 \cdot 6 \approx 1526{,}81\ \text{cm}^3 \approx 1{,}53\ \text{dm}^3$
$\mathrm{II}: V = \pi \cdot 5^2 \cdot 19 \approx 1492{,}26\ \text{cm}^3 \approx 1{,}49\ \text{dm}^3$
Das Volumen von Topf I beträgt 1,53 l, das Volumen von Topf II 1,49 l.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2b)</td><td>$\mathrm{I}: 1{,}2 \cdot 5{,}94 \approx 7{,}13$
$\mathrm{II}: 1{,}2 \cdot 6{,}75 = 8{,}10$
$8{,}10 - 7{,}13 = 0{,}97$
Der Preisunterschied zwischen beiden Töpfen beträgt 0,97 €.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2c)</td><td>$A_0(r) = \pi r^2 + 2\pi rh$
$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1500}{\pi r^2}$
$A_0(r) = \pi r^2 + \frac{2 \cdot 1500\pi r}{\pi r^2}$
$A_0(r) = \pi r^2 + 3000r^{-1}$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2d)</td><td>$A_0(r) = \pi r^2 + 3000r^{-1}$
$A_0'(r) = 2\pi r - 3000r^{-2}$; $A_0''(r) = 2\pi + 6000r^{-3}$
$0 = 2\pi r - \frac{3000}{r^2}$
$0 = 2\pi r^3 - 3000$
$r \approx 7{,}82$
$A_0''(7{,}82) \approx 18{,}83 > 0$ Minimum
$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{1500}{\pi \cdot 7{,}82^2} \approx 7{,}81$

Das Topfmodell III hat einen Radius von 7,82 cm und eine Höhe von 7,81 cm.</td><td>4</td></tr>
</table>

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
2e)	Topf III $A_0 = \pi \cdot 7{,}82^2 + \pi \cdot 2 \cdot 7{,}82 \cdot 7{,}81 \approx 575{,}86\,\text{cm}^2 \approx 5{,}76\,\text{dm}^2$ $\frac{6{,}75}{100\%} = \frac{5{,}76}{p\%}$ $p\% \approx 85{,}33\%$ $100\% - 85{,}33\% = 14{,}67\,\%$ Der Materialverbrauch ist bei der Topfsorte III um 14,67 % geringer.	3
	$1{,}2 \cdot (6{,}75 - 5{,}76) \cdot 1000 = 1188$ Der Kostenvorteil beträgt bei der Produktion von 1000 Töpfen 1188,00 €.	2
	Summe	20

3. Aufgabe: Stochastik

Auf dem Schulfest eines Oberstufenzentrums soll eine Tombola für die 1300 teilnehmenden Personen veranstaltet werden. Die Organisatoren der Tombola haben zur Vorbereitung 30 Schüler befragt, wie viele Lose sie kaufen werden (siehe Tabelle). Die Ergebnisse dieser Stichprobe sollen auf die gesamte Teilnehmerzahl verallgemeinert werden.

Anzahl der Lose	0	1	3	5	6	8	10	12
Anzahl der Personen	2	4	6	2	3	5	3	5
Relative Häufigkeit								

a) Geben Sie die relativen Häufigkeiten je gewünschter Losanzahl in der obigen Tabelle an und stellen Sie die Befragungsergebnisse auf geeignete Weise grafisch dar.

b) Zeigen Sie, dass $\overline{x} = 6$ der Mittelwert der Stichprobe ist und berechnen Sie die Standardabweichung s dieser Stichprobe.

c) Ermitteln Sie, wie viele Lose die Tombola insgesamt umfassen sollte, damit 70 % des durchschnittlichen Bedarfs an Losen für alle Teilnehmer abgedeckt werden können.

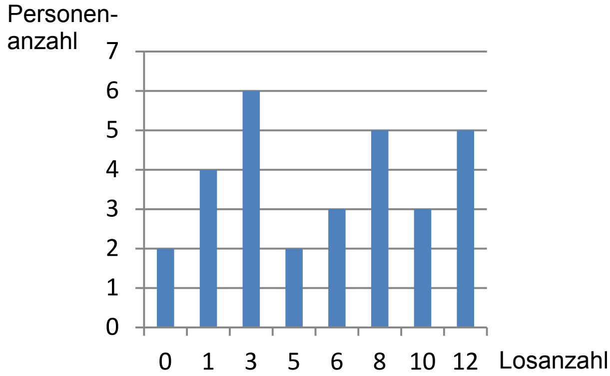
d) Mit der Tombola soll weder ein finanzieller Gewinn noch ein Verlust erzielt werden. Unter den 5460 Losen, die zu jeweils 0,50 € verkauft werden, befinden sich 100 Hauptgewinne zu einem Wert von jeweils 15,00 € und 600 Kleingewinne. Berechnen Sie, wie viel Geld für die Gesamtmenge der Kleingewinne zur Verfügung steht und wie teuer ein Kleingewinn im Durchschnitt sein kann.

e) Die Organisatoren möchten mit ihren Kenntnissen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung prüfen, wie hoch ihre Gewinnchancen wären, wenn nur noch 50 Lose in der Tombola vorhanden sind, darunter noch ein Haupt- und sechs Kleingewinne.

Ein Spieler kauft zwei Lose. Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Der Spieler erhält zwei Kleingewinne.
B: Der Spieler gewinnt nur den Hauptgewinn.
C: Der Spieler erhält mindestens irgendeinen Gewinn.

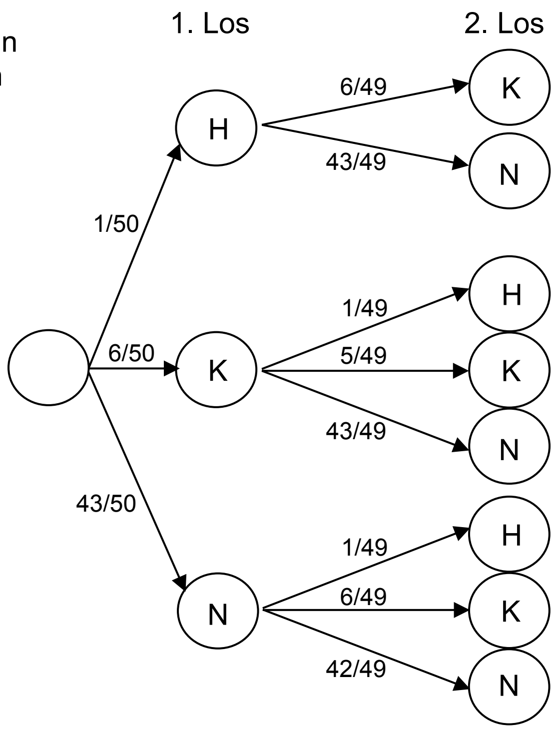
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	3	4	2	3	8	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>3a)</td><td>
<table>
<tr><td>Anzahl der Lose</td><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr>
<tr><td>Anzahl der Personen</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>Relative Häufigkeit</td><td>$\frac{2}{30} \approx 0{,}07$</td><td>$\frac{4}{30} \approx 0{,}13$</td><td>$\frac{6}{30} = 0{,}20$</td><td>$\frac{2}{30} \approx 0{,}07$</td><td>$\frac{3}{30} = 0{,}10$</td><td>$\frac{5}{30} \approx 0{,}17$</td><td>$\frac{3}{30} = 0{,}10$</td><td>$\frac{5}{30} \approx 0{,}17$</td></tr>
</table>


Alternative Lösungen sind möglich.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3b)</td><td>
$\bar{x} = \frac{1}{30} \cdot (0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 12 \cdot 5) = 6$
$s^2 = \frac{1}{30}\left[2(0-6)^2 + 4(1-6)^2 + 6(3-6)^2 + \ldots + 5(12-6)^2\right] = \frac{476}{30} \approx 15{,}87$
$s \approx 3{,}98$

Der Mittelwert beträgt 6 Lose und die Standardabweichung 3,98 Lose.
(für n = 29 gilt s² ≈ 16,41 und s ≈ 4,05)

Alternative Lösung mit TR möglich.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3c)</td><td>
$1300 \cdot 6 = 7800$
70 % von 7800 sind 5460
Die Tombola sollte 5460 Lose umfassen.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3d)</td><td>
Einnahmen: $5460 \cdot 0{,}50\,€ = 2730\,€$
Restgeld für Kleingewinne: $2730\,€ - 100 \cdot 15\,€ = 1230\,€$
Durchschnittlicher Preis: $1230\,€ : 600 = 2{,}05\,€$
Für die Kleingewinne können die Organisatoren insgesamt 1230 € ausgeben, also pro Kleingewinn im Durchschnitt 2,05 €.</td><td>3</td></tr>
</table>

3e)	H – Hauptgewinn K – Kleingewinn N – Niete  	3
	P(A) = $\frac{6}{50}\cdot\frac{5}{49}=\frac{3}{245}\approx 1{,}22\,\%$ P(B) = $\frac{1}{50}\cdot\frac{43}{49}+\frac{43}{50}\cdot\frac{1}{49}=\frac{43}{1225}\approx 3{,}51\,\%$ P(C) = 1 – P(NN) = 1 – $\frac{43}{50}\cdot\frac{42}{49}=\frac{46}{175}\approx 26{,}29\,\%$	5
	Summe	20