1. Aufgabe: Differentialrechnung

Die Funktion f sei eine ganzrationale Funktion vierten Grades mit $x \in R$. Der Graph heißt G_f. Von f ist die zweite Ableitung mit $f''(x) = 24x^2 - 90x + 48$ bekannt. Der Punkt P(1|27) ist Teil des Graphen. Der Punkt E(4|0) ist ein Extrempunkt von G_f.

a) Ermitteln Sie einen Funktionsterm für f.

(zur Kontrolle: $f(x) = 2x^4 - 15x^3 + 24x^2 + 16x$)

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f.

c) Berechnen Sie die Art und Lage aller Extrempunkte von G_f. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der Funktion im Intervall $-1 \leq x \leq 4{,}5$.

d) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten der Wendepunkte von G_f.

e) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-1 \leq x \leq 4{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	6	6	8	4	3	27

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>1a)</td><td>$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$f''(x) = 24x^2 - 90x + 48$
aus 24 = 12a folgt a = 2
aus –90 = 6b folgt b = –15
aus 48 = 2c folgt c = 24

aus $f'(4) = 0$ folgt d = 16
aus f(1) = 27 oder f(4) = 0 folgt e = 0

Ergebnis: $f(x) = 2x^4 - 15x^3 + 24x^2 + 16x$

(Alternative: Aufgabe über Integralrechnung lösen)</td><td>1

5</td></tr>
<tr><td>1b)</td><td>Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|0)$

Schnittpunkte mit der x- Achse: $2x^4 - 15x^3 + 24x^2 + 16x = 0;\ x_1 = 0$
aus E(4|0) folgt $x_2 = 4$: $(2x^3 - 15x^2 + 24x + 16) : (x - 4) = 2x^2 - 7x - 4$
$2x^2 - 7x - 4 = 0$ $x_3 = -0{,}5;$ $x_4 = 4$

$N_1 = S_y(0|0)$; $N_2 = E(4|0)$; $N_3(-0{,}5|0)$</td><td>1

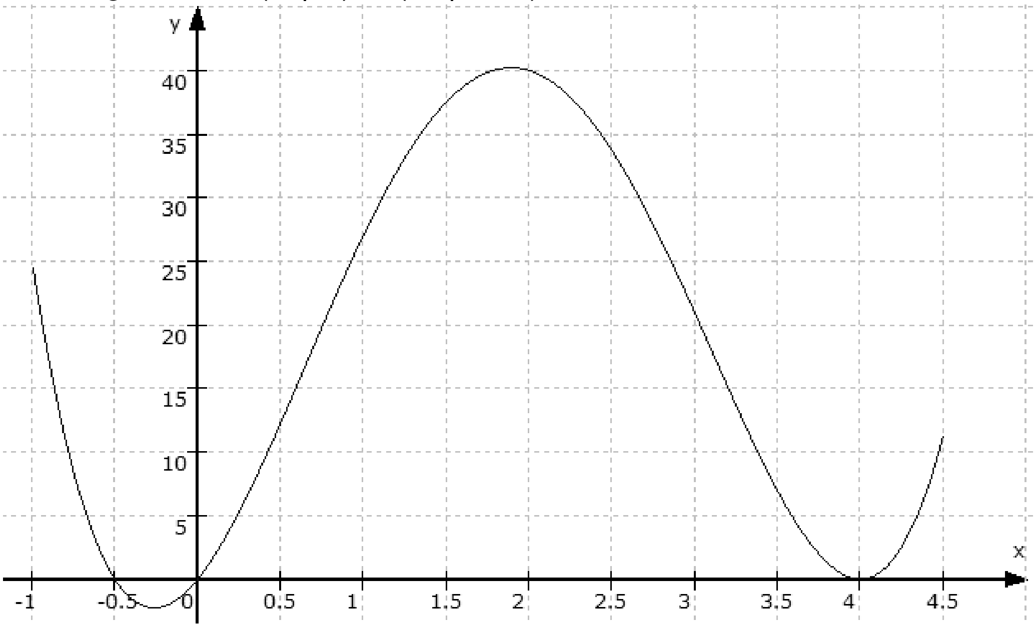
5</td></tr>
<tr><td>1c)</td><td>Extrempunkte:
$f'(x) = 8x^3 - 45x^2 + 48x + 16 = 0;$ $f''(x) = 24x^2 - 90x + 48$
aus E(4|0) folgt $x_{E_1} = 4$: $(8x^3 - 45x^2 + 48x + 16) : (x - 4) = 8x^2 - 13x - 4$
$8x^2 - 13x - 4 = 0$ $x_{E_2} \approx -0{,}26$ und $x_{E_3} \approx 1{,}89$

$f''(4) = 72 > 0$ $T_1 = E(4 \mid 0)$
$f''(-0{,}26) \approx 73{,}02 > 0$ $T_2(-0{,}26 \mid -2{,}26)$
$f''(1{,}89) \approx -36{,}37 < 0$ $H(1{,}89 \mid 40{,}22)$

Monotonie:
$-1 < x < -0{,}26$ f ist streng monoton fallend
$-0{,}26 < x < 1{,}89$ f ist streng monoton steigend
$1{,}89 < x < 4$ f ist streng monoton fallend
$4 < x < 4{,}5$ f ist streng monoton steigend</td><td>3

3

2</td></tr>
</table>

1d)	Wendepunkte: $f''(x) = 24x^2 - 90x + 48 = 0; \quad f'''(x) = 48x - 90$ $x_{W_1} \approx 0{,}64; \qquad x_{W_2} \approx 3{,}11$ $f'''(0{,}64) = -59{,}28 \neq 0 \qquad f'''(3{,}11) = 59{,}28 \neq 0$ $f(0{,}64) \approx 16{,}47 \qquad f(3{,}11) \approx 17{,}79$ $W_1(0{,}64 \mid 16{,}47) \qquad W_2(3{,}11 \mid 17{,}79)$	4
1e)	Intervallgrenzen: $P_1(-1 \mid 25)$, $P_2(4{,}5 \mid 11{,}25)$  	3
	Summe	27

2. Aufgabe: Integralrechnung

In einem Erlebnisbad befindet sich im Außenbereich ein Becken für Nichtschwimmer.
Die Sicht von oben auf das Becken ist in der Abbildung dargestellt. Der gekrümmte Teil des Beckenrandes lässt sich durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades beschreiben, der durch die Punkte A(0|3) und B(12|0) verläuft. Die weiteren Eckpunkte des Beckens haben die Koordinaten C(12|18) und D(0|18). Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht in der Realität einem Meter.

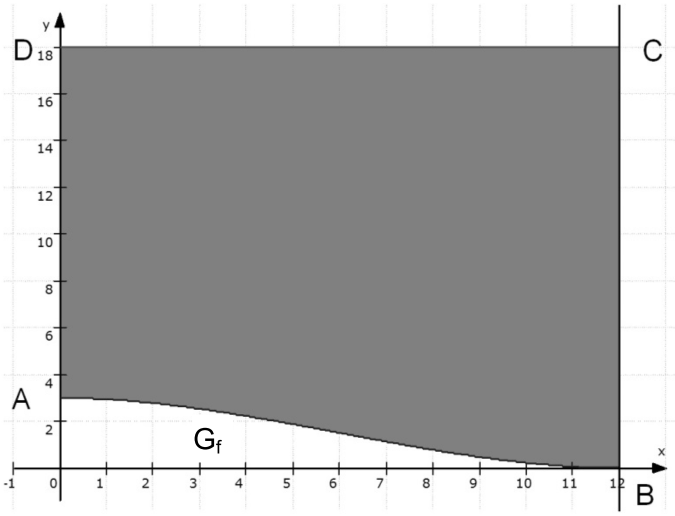


Abbildung
(Wasseroberfläche bzw. Beckenboden grau markiert, nicht maßstabsgerecht)

a) Prüfen Sie durch Rechnung, ob es sich bei den Punkten A und B um lokale Extrempunkte des Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{288}x^3 - \frac{1}{16}x^2 + 3$ handelt. Weisen Sie gegebenenfalls die Art der Extrema nach.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt des gesamten Beckenbodens $198\ m^2$ beträgt.

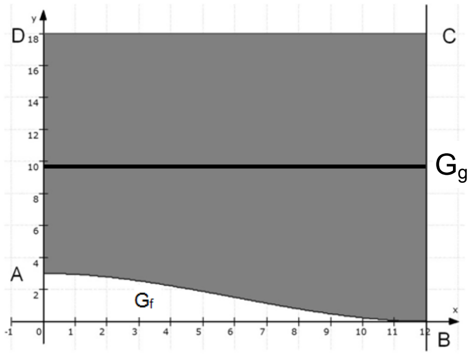
Der Boden des Beckens soll zu gleichen Flächenanteilen in zwei Farben gestaltet werden. Die beiden Teilflächen werden durch eine Gerade g getrennt, die parallel zur Strecke $\overline{CD}$ verläuft.

c) Untersuchen Sie, ob unter Verwendung einer Gerade g mit $g(x) = 9{,}75$ die gewünschte Flächenteilung erreicht wird. Berechnen Sie dazu die Flächeninhalte A_1 und A_2 der beiden Teilflächen und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Skizzieren Sie in der obigen Abbildung den Graphen der Funktion g.

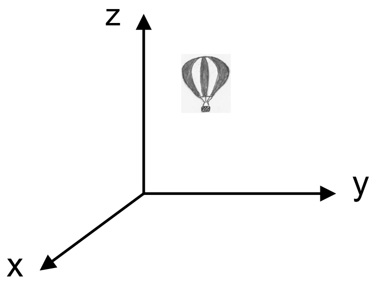
d) Das Becken hat ringsum senkrechte Seitenwände und eine Bautiefe von einem Meter. Es wird zu $60\,\%$ gefüllt. Berechnen Sie die Menge an Wasser in Litern, die für diesen Beckenfüllstand benötigt wird.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	5	5	6	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
2a)	$f(x)=\frac{1}{288}x^3-\frac{1}{16}x^2+3 \quad \text{mit } f(0)=3 \text{ und } f(12)=0$	1
	$f'(x)=\frac{1}{96}x^2-\frac{1}{8}x; f''(x)=\frac{1}{48}x-\frac{1}{8}$	1
	Untersuchung der Punkte A und B $f'(0)=0$ und $f''(0)=-\frac{1}{8}<0$ A ist ein Hochpunkt. $f'(12)=0$ und $f''(12)=\frac{1}{8}>0$ B ist ein Tiefpunkt.	3
2b)	Flächeninhalt der Gesamtfläche berechnen $h(x)=g(x)-f(x)=18-\left(\frac{1}{288}x^3-\frac{1}{16}x^2+3\right)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2+15$	2
	$A_{ges}=\int_0^{12}h(x)\,dx=\left[-\frac{1}{1152}x^4+\frac{1}{48}x^3+15x\right]_0^{12}=198$ Der Flächeninhalt beträgt 198 m².	3
2c)	- Teilfläche $A_1=a\cdot b=(18-9{,}75)\,m\cdot 12\,m=8{,}25\,m\cdot 12\,m=99\,m^2$ - Teilfläche A_2 liegt zwischen den Graphen der Funktionen f und g $A_2=A_{ges}-A_1=198\,m^2-99\,m^2=99\,m^2$ Die Gerade g teilt die Gesamtfläche in zwei gleich große Teilflächen $A_1=A_2=99\,m^2$. Alternative Lösungen sind möglich.	5
	G_g einzeichnen  	1
2d)	Wasserhöhe $h=0{,}6\cdot 1m=0{,}6\,m$	1
	Volumen $V=A_G\cdot h_{max}=198\,m^2\cdot 0{,}6\,m=118{,}8\,m^3$. Das Wasservolumen beträgt 118800 Liter.	3
	Summe	20

3. Aufgabe: Analytische Geometrie

Die Position eines Heißluftballons wird am Himmel durch die drei Koordinaten x, y und z bestimmt. Die Erdoberfläche wird vereinfacht durch die x-y-Ebene im Koordinatensystem festgelegt. Eine Einheit entspricht 1 km.
Hinweis: Ein Ballonflug wird auch als Ballonfahrt bezeichnet.



Der Ballon startet im Punkt $A(1|-1|0)$. Die Flugrichtung hängt vom Wind ab. Gegeben sind die Punkte, an denen sich der Kurs des Ballons ändert: $B(5|0|3)$; $C(2|2|5)$; $D(-2|0|3)$.
Zwischen diesen Punkten wird von einem geradlinigen Flug ausgegangen.
Der Ballon landet im Punkt $E(-1|-2|0)$.

a) Berechnen Sie, wie weit der Zielort vom Startplatz entfernt ist.

b) Ermitteln Sie, wie viele Kilometer der Ballon insgesamt in der Luft zurückgelegt hat und geben Sie an, welcher Flugabschnitt am längsten ist.

c) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Ballon bei der Fahrt von C nach D einen Beobachter am Boden im Punkt $P(0|1|0)$ überquert.

d) Bestimmen Sie, in welchem Winkel zur Erdoberfläche der Ballon gestartet ist.

e) Beim Landeanflug überfährt der Ballon einen 80 m hohen Funkmast. Die Lage des Mastes kann vereinfacht durch folgende Geradengleichung beschrieben werden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ -1{,}6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, in welchem Abstand der Ballon die Spitze des Funkmastes überquert.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	2	5	4	4	5	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
3a)	Entfernung Start- und Landeplatz $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left\lvert\overrightarrow{AE}\right\rvert = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}\,\text{LE} \approx 2{,}24\,\text{LE}$ Die Strecke ist ca. 2,24 km lang.	2
3b)	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{26}\,\text{LE} \approx 5{,}1\,\text{LE}$ $\left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}\,\text{LE} \approx 4{,}12\,\text{LE}$ $\left\lvert\overrightarrow{CD}\right\rvert = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{24}\,\text{LE} \approx 4{,}9\,\text{LE}$ $\left\lvert\overrightarrow{DE}\right\rvert = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}\,\text{LE} \approx 3{,}74\,\text{LE}$ $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert + \left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert + \left\lvert\overrightarrow{CD}\right\rvert + \left\lvert\overrightarrow{DE}\right\rvert = 17{,}86\,\text{LE}$ Der Ballon hat eine Strecke von 17,86 km zurückgelegt. Der Flugabschnitt von A nach B war am längsten.	5
3c)	$g_{CD} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Nur x-y-Ebene: $0 = 2 - 4r$ $1 = 2 - 2r$ $r = 0{,}5$ Der Punkt $P(0\mid1\mid0)$ wird bei der Fahrt von B nach C überquert.	4

3d)	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AB'}=\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{4^2+1^2+3^2}=\sqrt{26}\,\text{LE}$ $\left\|\overrightarrow{AB'}\right\|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}\,\text{LE}$ $\cos\alpha=\frac{\left(\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB'}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AB'}\right\|}=\frac{\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{17}}=\frac{17}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{17}}\approx 0{,}809$ $\alpha\approx 36°$	4
3e)	$g_{DE}:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ $g_{DE}=g_M$ $\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1{,}2\\-1{,}6\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}0\\0\\0{,}03\end{pmatrix}$ I $-2+1s=-1{,}2\Rightarrow s=0{,}8$ II $-2s=-1{,}6\Rightarrow s=0{,}8$ III $3-3s=0{,}03r\Rightarrow 3-3\cdot 0{,}8=0{,}03r\Rightarrow r=20$ $z=3+0{,}8\cdot(-3)=0{,}6$ $0{,}6-0{,}08=0{,}52$ Alternative Lösungen sind möglich. Der Ballon überquert die Funkmastspitze mit einem Abstand von 520 m.	5
	Summe	20

3. Aufgabe: Zahlenfolgen

Die japanische Kampfsportart Judo wird in Deutschland von vielen Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen in zahlreichen Vereinen aktiv betrieben.
In 5 Jahren möchte ein Brandenburger Judoverein an einem Vergleichswettkampf in Japan teilnehmen. Die Kosten der Reise betragen voraussichtlich 15.000 €. Ein Sponsor stellt als sofortige Unterstützung 10.000 € in Aussicht.

a) Berechnen Sie, welches Endkapital sich nach 5 Jahren ergibt, wenn das Startkapital von 10000 € auf einem Sparkonto mit einem Zinssatz von 2,5 % p.a. fest angelegt wird.

Ermitteln Sie, welches Kapital bei einer jährlichen Verzinsung von 2,5 % angelegt werden müsste, um nach 5 Jahren über den Gesamtbetrag der Reise von 15.000 € verfügen zu können.

b) Bestimmen Sie, bei welchem Zinssatz ein Anfangskapital von 10.000 € in 5 Jahren auf den Gesamtreisebetrag angewachsen wäre.

Reicht der Endbetrag eines Sparkontos für diese Reise, wenn ein Startkapital von 10.000 € und eine jährliche Einzahlung mit vorschüssiger Verzinsung von 900 € 5 Jahre lang mit 2,5 % p.a. verzinst werden? Begründen Sie Ihre Entscheidung durch Rechnung.

Der Verein prüft auch andere Varianten, mit denen unabhängig vom Sponsor der Betrag von 15.000 € angespart werden kann.

c) Durch ein Sportfest werden Einnahmen von 1.875 € erzielt. Dieses Geld wird auf ein Sparkonto mit einer Verzinsung von 2,5 % p.a. für 5 Jahre angelegt. Zusätzliche jährliche Einzahlungen sollen die Gesamtreisesumme sichern. Ermitteln Sie, welchen Betrag der Verein 5 Jahre lang auf dieses Konto einzahlen muss, wenn vorschüssig verzinst wird.

d) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren der Verein die Reisekosten von 15.000 € zusammengespart hätte, wenn die 15 Sportler einen Eigenanteil von jeweils 15 € im Monat in einer jährlichen Zahlung auf ein Konto mit 2,5 % p.a. nachschüssiger Verzinsung anlegen würden.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	4	6	6	4	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
3a)	$K_5 = 10000 \cdot 1{,}025^5 \approx 11314{,}08$ Das Endkapital beträgt 11.314,08 €. $K_o = \frac{15000}{1{,}025^5} \approx 13257{,}81$ Es wäre ein Startkapital von 13257,81 € notwendig.	2 2
3b)	$p = 100 \cdot \left(\sqrt[5]{\frac{15000}{10000}} - 1 \right) \approx 8{,}45$ Der Prozentsatz müsste 8,45 % betragen. $K_5 = 10000 \cdot 1{,}025^5 + \frac{900 \cdot 1{,}025 \cdot (1{,}025^5 - 1)}{1{,}025 - 1}$ $K_5 \approx 11314{,}08 + 4848{,}96 = 16163{,}04$ Der Endbetrag in Höhe von 16.163,04 € reicht für die Bezahlung der Reise.	2 4
3c)	$K_5 = 1875 \cdot 1{,}025^5 \approx 2121{,}39$ $15000 - 2121{,}39 = 12878{,}61$ $R = \frac{12878{,}61 \cdot (1{,}025 - 1)}{1{,}025 \cdot (1{,}025^5 - 1)} \approx 2390{,}36$ Es wären Jahresraten in Höhe von 2.390,36 € notwendig.	2 1 3
3d)	$R = 15 \cdot 12 \cdot 15 = 2700$ € $n = \frac{\lg\left(\frac{15000 \cdot (1{,}025 - 1)}{2700} + 1 \right)}{\lg 1{,}025} \approx 5{,}27$ Es würde 5,27 Jahre dauern.	1 3
	Summe	20