1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4;\ x \in R$.
Der Graph heißt G_f.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f.

b) Zeigen Sie, dass es neben der Extremstelle $x_E = -2$ noch eine weitere Extremstelle gibt. Ermitteln Sie die Art der Extrema und geben Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte an.

c) Weisen Sie nach, dass die lokalen Extrempunkte H und T sowie der Punkt $P(-1|0)$ des Graphen G_f auf einer Geraden g liegen.

d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W. Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen G_f im Unendlichen.

e) Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $-3 \le x \le 1$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

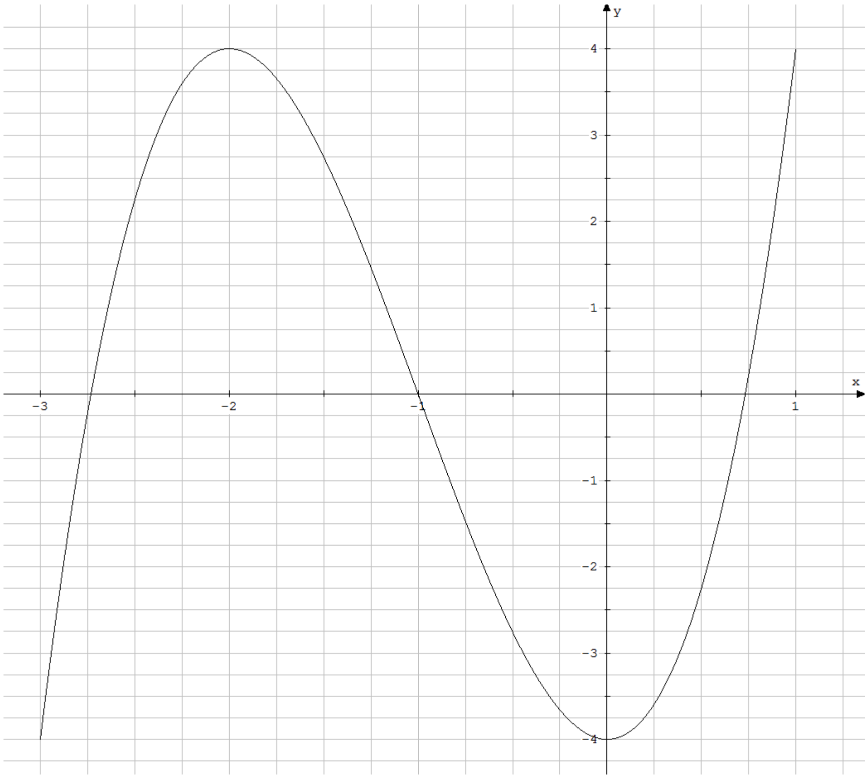
f) Begründen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind:

(1) G_f hat im Punkt $P(-1|0)$ einen Sattelpunkt.

(2) G_f ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	5	6	4	5	3	4	27

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	Koordinaten der Achsenschnittpunkte $S_y(0 \mid -4)$ Probieren: $x_1 = -1$ $(2x^3 + 6x^2 - 4) : (x + 1) = 2x^2 + 4x - 4$ $N_1(-2{,}73 \mid 0); N_2(-1 \mid 0); N_3(0{,}73 \mid 0)$	1 4
b)	Lokale Extrempunkte $f'(x) = 6x^2 + 12x; f''(x) = 12x + 12; f'''(x) = 12$ $f'(x_E) = 0 = 6x^2 + 12x = 6x \cdot (x + 2)$ $x_{E1} = -2;\quad f'(-2) = 0; f''(-2) = -12 < 0; H(-2 \mid 4)$ $x_{E2} = 0 \quad f'(0) = 0; f''(0) = 12 > 0; T(0 \mid -4)$	1 5
c)	Untersuchung einer Gerade g Vermutung: Punkt P(-1|0) liegt auf einer Geraden g durch H(-2|4) und T(0|-4). Nachweis: $m = \frac{-4-4}{0-(-2)} = -4$; mit T in $y = mx + n$; $-4 = n$ Gerade g: $y = -4x - 4$; Punktprobe mit P: $0 = (-4) \cdot (-1) - 4$ w. A. Ergebnis: Die Punkte H, T und P liegen auf einer Geraden g.	4
d)	Wendepunkt $0 = f''(x) = 12x + 12; x_W = -1;\ f'''(-1) = 12 \neq 0; W(-1 \mid 0)$ Verhalten im Unendlichen $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \cdot (2 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^3}) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \cdot (2 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^3}) = -\infty$	3 2

e)	Graph G_f 	3
f)	Aussagen prüfen (1) G_f hat im Punkt $P(-1\|0)$ keinen Sattelpunkt. Begründung: G_f hat im Punkt $P(-1\|0)$ einen Wendepunkt, aber $f'(-1) \neq 0$. (2) G_f kann nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung sein, da die Funktion nicht ungerade ist bzw. $f(-x) \neq -f(x)$.	2 2
	Summe	27

2. Aufgabe: Differentialrechnung

Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades hat die Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$. Der Graph G_f dieser Funktion verläuft durch den Punkt $A(4\,|5)$. Die Steigung der Tangente an G_f an der Stelle $x = 6$ beträgt $m = -9$.

a) Ermitteln Sie rechnerisch eine Funktionsgleichung für die Funktion f.
(zur Kontrolle: $f(x) = x^3 - 17x^2 + 87x - 135$)

b) Berechnen Sie die dritte Nullstelle von f.

c) Ermitteln Sie zusätzlich zum Punkt A mindestens 6 weitere Punkte von G_f im Intervall $2{,}5 \le x \le 9{,}5$ und zeichnen Sie G_f im angegebenen Intervall in ein kartesisches Koordinatensystem. Wählen Sie eine geeignete Achseneinteilung.

d) G_f und die x-Achse begrenzen zwei Flächenstücke vollständig. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes der Gesamtfläche dieser Flächenstücke.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	8	3	6	5	22

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f(3)=0 \quad \text{I} \quad 27a+9b+3c+d=0$
$f(5)=0 \quad \text{II} \quad 125a+25b+5c+d=0$
$f(4)=5 \quad \text{III} \quad 64a+16b+4c+d=5$
$f'(6)=-9 \quad \text{IV} \quad 108a+12b+c=-9$

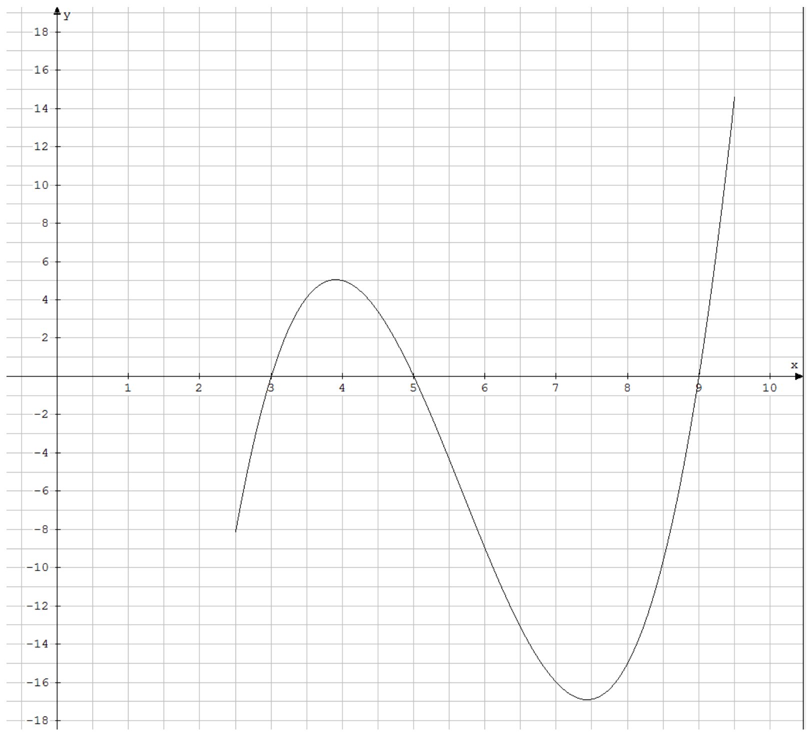
$f(x)=x^3-17x^2+87x-135$</td><td>5

3</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>3. Nullstelle: $0=x^3-17x^2+87x-135$

$(x^3-17x^2+87x-135):(x-3)=x^2-14x+45$

$0=x^2-14x+45 \qquad x_2=5 \qquad x_3=9$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>eine mögliche Wertetabelle:

<table>
<tr><td>x</td><td>2,5</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9,5</td></tr>
<tr><td>y</td><td>-8,13</td><td>0</td><td>-9</td><td>-16</td><td>-15</td><td>14,63</td></tr>
</table>

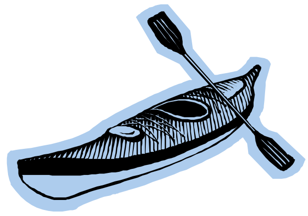

</td><td>3

3</td></tr>
</table>

d)	Flächenberechnung: $A_1 = \int_3^5 \left(x^3 - 17x^2 + 87x - 135\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{17}{3}x^3 + \frac{87}{2}x^2 - 135x\right]_3^5 \approx 6{,}67$ $A_2 = \left\| \int_5^9 \left(x^3 - 17x^2 + 87x - 135\right) dx \right\| = \left\| \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{17}{3}x^3 + \frac{87}{2}x^2 - 135x\right]_5^9 \right\| \approx 42{,}67$ $A_g = A_1 + A_2 = 6{,}67 + 42{,}67 = 49{,}34$ Der Flächeninhalt beträgt 49,34 FE.	5
	Summe	22

3. Aufgabe: Wahlpflichtthema Zahlenfolgen

Ein Hersteller von Sportbooten hat ein neues Paddelboot entwickelt.



Bildquelle: Microsoft Office 2010

a) Für den Verkauf von bis zu 8 Booten an Vereine oder Bootsverleihe hat man sich folgende Preismodelle überlegt:

	Preis für das erste Boot	Preis für das zweite Boot	Preis für das dritte Boot	…
Preismodell 1	610 €	560 €	510 €	
Preismodell 2	600 €	540 €	486 €	

Überprüfen Sie für beide Preismodelle, ob sie durch eine arithmetische oder durch eine geometrische Zahlenfolge beschrieben werden können. Geben Sie jeweils eine explizite Bildungsvorschrift an. Bestimmen Sie den sich jeweils ergebenden Gesamtpreis für den Kauf von 8 Booten durch einen Verein.

Für die Produktion der Bootskörper werden so genannte Glasmatten benötigt, die in einer festgelegten Größe angeliefert werden.
Der Verbrauch an Glasmatten je Bootskörper ist durch die Ausnutzung des Verschnitts nicht konstant und kann durch die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{18n-10}{3n-2}\ (n \in N^*)$ beschrieben werden (mit n=Anzahl der Boote und a_n =Anzahl der Glasmatten).

b) Wie viele Glasmatten werden jeweils für die Produktion des ersten, zweiten, dritten, vierten und fünften Bootskörpers verbraucht?
Stellen Sie diesen Verbrauch (d.h. Folge (a_n)) für jeden der ersten 5 Bootskörper graphisch dar.

c) Auf welchen Wert pegelt sich der Bedarf an Glasmatten pro Bootskörper bei der Produktion großer Stückzahlen ein? Bestimmen Sie dazu den Grenzwert der Folge (a_n).

d) Zeigen Sie, dass sich durch die Optimierung des Zuschnitts der Verbrauch an Glasmatten pro Bootskörper stetig reduzieren lässt, indem Sie die Monotonie der Folge (a_n) nachweisen.

e) Bestimmen Sie die Nummer des Bootskörpers, für dessen Herstellung erstmals weniger als 6,05 Glasmatten benötigt werden.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	6	4	2	4	4	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

<u>Preismodell 1:</u>

$b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = -50$; arithmetische Folge mit $b_n = 610 + (n-1)(-50)$

<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>Summe</td></tr>
<tr><td>b_n</td><td>610</td><td>560</td><td>510</td><td>460</td><td>410</td><td>360</td><td>310</td><td>260</td><td>3480</td></tr>
</table>

Für 8 Boote sind insgesamt 3480 € zu zahlen.

<u>Preismodell 2:</u>

$\frac{c_2}{c_1} = \frac{c_3}{c_2} = 0{,}9$; geometrische Folge mit $c_n = 600 \cdot 0{,}9^{n-1}$

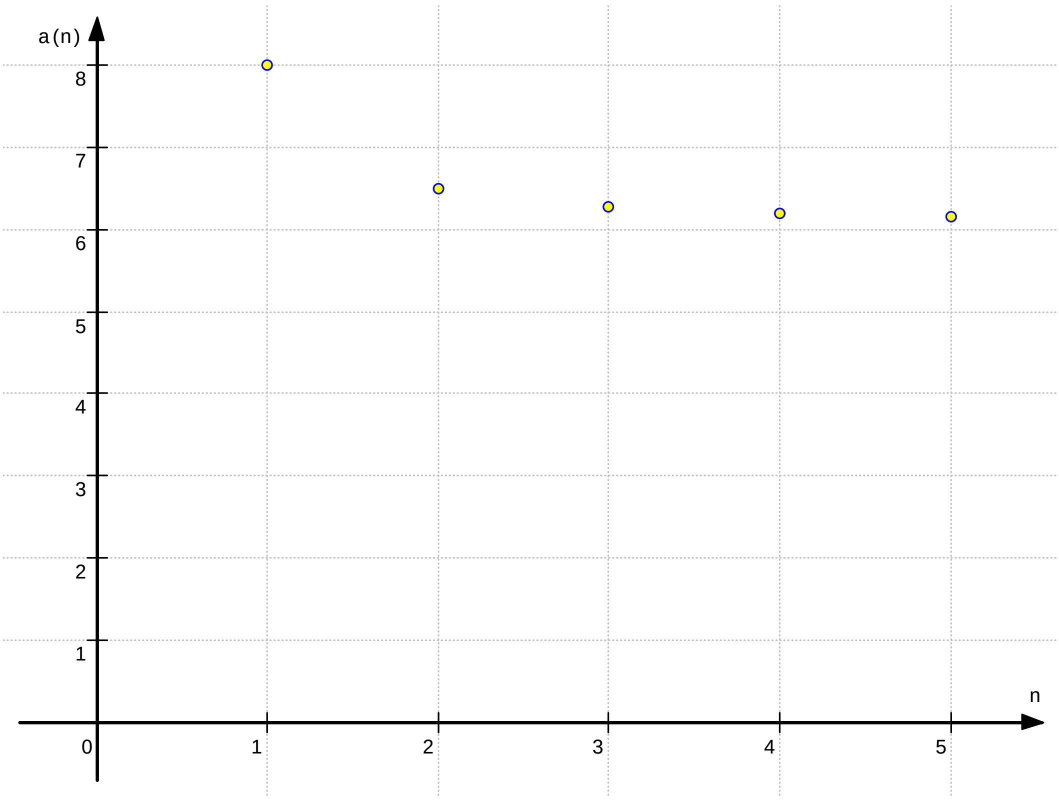
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>Summe</td></tr>
<tr><td>c_n</td><td>600</td><td>540</td><td>486</td><td>437,40</td><td>393,66</td><td>354,29</td><td>318,86</td><td>286,98</td><td>3417,19</td></tr>
</table>

Für 8 Boote sind insgesamt 3417,19 € zu zahlen.

</td><td>3

3</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$a_1 = 8$; $a_2 = 6{,}5$; $a_3 \approx 6{,}29$; $a_4 = 6{,}2$; $a_5 \approx 6{,}15$

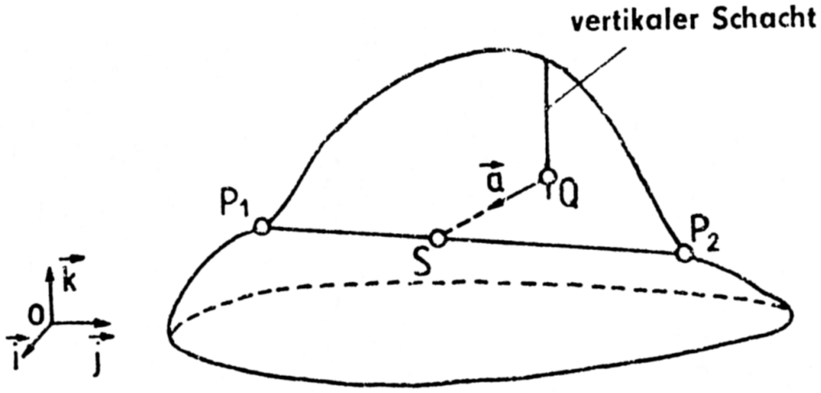


</td><td>4</td></tr>
</table>

c)	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{18n-10}{3n-2} = \frac{18}{3} = 6$	2
d)	Annahme: (a_n) streng monoton fallend zu zeigen: $a_n > a_{n+1}$ $\frac{18n-10}{3n-2} > \frac{18(n+1)-10}{3(n+1)-2}$ $\frac{18n-10}{3n-2} > \frac{18n+8}{3n+1}$ $0 > -6$ wahre Aussage, d.h. (a_n) ist streng monoton fallend, also sinkt der Verbrauch stetig	4
e)	$\frac{18n-10}{3n-2} < 6{,}05$ $14 < n$ Ab dem 15. Bootskörper werden weniger als 6,05 Glasmatten benötigt.	4
	Summe	20

3. Aufgabe: Wahlpflichtthema Analytische Geometrie

In den Alpen führt ein geradliniger Tunnel $\overline{P_1P_2}$ durch ein Gebirgsmassiv (siehe Skizze, Darstellung nicht maßstäblich).
Die Punkte P_1 und P_2 haben die Koordinaten $P_1(100\,|\,20\,|\,100)$ und $P_2(400\,|\,200\,|\,90)$.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.



a) Berechnen Sie die Länge der Tunnelstrecke $\overline{P_1P_2}$.

b) Stellen Sie eine Gleichung für die Gerade g auf, die durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft.

c) Von einem Punkt $Q(210\,|\,122\,|\,z_Q)$ eines vertikal verlaufenden Schachtes aus soll in Richtung des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein geradlinig verlaufender Entlüftungsstollen gebaut werden, der auf den Tunnel im Punkt S trifft. Stellen Sie eine Geradengleichung für die Gerade h auf, die durch den Punkt Q in Abhängigkeit von z_Q mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ geht.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S zwischen g und h.

(zur Kontrolle: $S(220\,|\,92\,|\,96)$)

d) Berechnen Sie die Größe eines Winkels zwischen dem Tunnel und dem Entlüftungsstollen.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	3	2	10	5	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	$\lvert\overline{P_1P_2}\rvert = \sqrt{90000 + 32400 + 100} = 350$ Die Länge der Tunnelstrecke beträgt 350 m.	3
b)	$\vec{x} = \begin{pmatrix}100\\20\\100\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}300\\180\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100\\20\\100\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}30\\18\\-1\end{pmatrix}$ (Änderung des Richtungsvektors nicht nötig)	2
c)	$\vec{x} = \begin{pmatrix}210\\122\\z_Q\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}$	2
	Schnittpunkt: $\begin{pmatrix}100\\20\\100\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}30\\18\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}210\\122\\z_Q\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-110\\-102\\100-z_Q\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}2\\-6\\-3\end{pmatrix} - r\begin{pmatrix}30\\18\\-1\end{pmatrix}$; $\quad -110 = 2s - 30r$, $-102 = -6s - 18r$ $\quad r = 4; \quad s = 5$	4
	$100 - z_Q = -15 + 4; \quad z_Q = 111$ $\qquad S(220 \mid 92 \mid 96)$	4
d)	Beispielrechnung: $\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix}-10\\30\\15\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{SP_1} = \begin{pmatrix}-120\\-72\\4\end{pmatrix}$	2
	$\cos\alpha = \frac{-900}{35 \cdot 140} = -0{,}1837$; $\alpha = 100{,}58°$ oder $\beta = 79{,}42°$	3
	Summe	20