1. Aufgabe: Differentialrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = -0{,}5x^4 + x^2 + 4;\ x \in R$.
Der Graph heißt G_f.

a) Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von G_f.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrema nach. Beschreiben Sie das Monotonieverhalten des Graphen G_f. Wählen Sie dazu geeignete Intervalle.

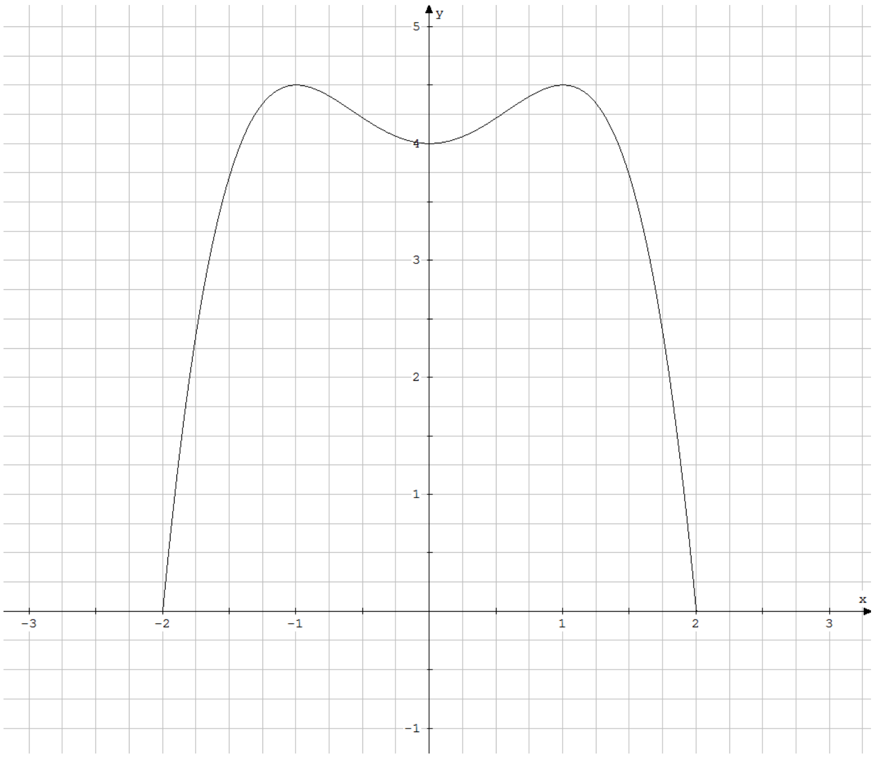
d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f.

e) Zeichnen Sie den Graphen G_f im Intervall $-2 \le x \le 2$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

f) Der Graph der Funktion f verfügt an der Stelle $x = 1{,}5$ über eine Tangente t. Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente t.

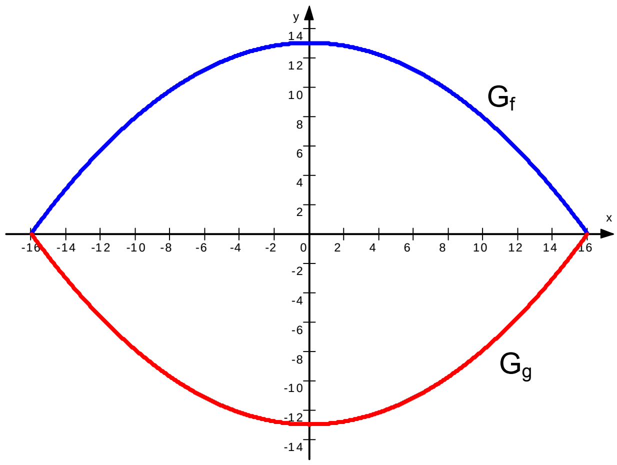
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	2	5	9	4	3	3	26

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	Vermutung: G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse zu zeigen: $f(-x) = f(x)$ $-0{,}5(-x)^4 + (-x)^2 + 4 = -0{,}5x^4 + x^2 + 4$ $-0{,}5x^4 + x^2 + 4 = -0{,}5x^4 + x^2 + 4$ w. A. Hinweis: alternativ ist auch eine Begründung über gerade Exponenten möglich	2
b)	Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Graphen G_f $0 = -0{,}5x^4 + x^2 + 4 = -0{,}5(x^4 - 2x^2 - 8)$ mit $x^2 = z$ $0 = z^2 - 2z - 8$ $z_1 = -2;\ z_2 = 4$ Resubstitution: $x_{01} = -2; x_{02} = 2$ $N_1(-2 \mid 0); N_2(2 \mid 0)$ $S_y(0 \mid 4)$	4 1
c)	Lokale Extrempunkte $f'(x) = -2x^3 + 2x;\ f''(x) = -6x^2 + 2;\ f'''(x) = -12x$ $0 = -2x(x^2 - 1)$ $x_{E1} = -1;\ f''(-1) = -4 < 0\ \ H_1(-1 \mid 4{,}5)$ $x_{E2} = 0; f''(0) = 2 > 0\ \ T(0 \mid 4)$ $x_{E3} = 1;\ f''(1) = -4 < 0\ \ H_2(1 \mid 4{,}5)$ Monotonieverhalten $-\infty < x < -1$ streng monoton wachsend $-1 < x < 0$ streng monoton fallend $0 < x < 1$ streng monoton wachsend $1 < x < \infty$ streng monoton fallend	1 6 2
d)	Wendepunkte $0 = -6x^2 + 2 = x^2 - \frac{1}{3}$ $x_{w1} \approx -0{,}58\ \ f'''(-0{,}58) \neq 0\ \ W_1(-0{,}58 \mid 4{,}28)$ $x_{w2} \approx 0{,}58\ \ f'''(0{,}58) \neq 0\ \ W_2(0{,}58 \mid 4{,}28)$	4

e)	Graph G_f 	3
f)	Tangente t $f(1{,}5) = 3{,}72\,;\ P_t(1{,}5 \mid 3{,}72)$ $m\ = f'(1{,}5) = -3{,}75\,;\ n = 9{,}35$ $t:\ \ y = -3{,}75x + 9{,}35$	3
	Summe	26

2. Aufgabe: Integralrechnung

Für die Arbeitsgemeinschaft Yoga sollen 12 Yogakissen hergestellt werden. Die Sitzfläche eines Kissens besteht aus Stoff und soll 26 cm breit sowie 32 cm lang sein. Die Grund- und Deckfläche des Kissens wird durch zwei Parabeln annähernd begrenzt. Der Rest der Kissenhülle besteht aus weichem Leder. Die Höhe des Kissens beträgt 15 cm.



a) Stellen Sie Gleichungen für die beiden begrenzenden Parabeln auf und zeigen Sie, dass die Maßzahl des Flächeninhaltes der Sitzfläche eines Yogakissens $554\frac{2}{3}$ cm² beträgt.
(zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{13}{256}x^2 + 13$)

b) Berechnen Sie die Stoffmenge in m², die man für die Produktion der 12 Sitzflächen benötigt, wenn für den Verschnitt pro Teil ein Mehrbedarf von 35 % einkalkuliert werden muss.

c) Die Kissen werden mit Bio-Buchweizenschalen gefüllt, da dieses Füllmaterial durch besondere Stabilität für eine optimale Sitzhaltung sorgt.
Buchweizenschalen werden handelsüblich nur in 1 kg Packungen angeboten. Eine Packung kostet 3,90 € und reicht für ein Kissenvolumen von 15 dm^3.
Mit welchen Kosten für die Füllung der 12 Kissen muss gerechnet werden?

d) Ein Schüler vermutet, dass man durch Änderung der Form des Kissens Füllmaterial sparen könnte.
Er möchte es als Rotationskörper gestalten, bei der die Sitzfläche um die Längsachse rotiert. Überprüfen Sie seine Vermutung, indem Sie die Maßzahl des Volumens des entstehenden Rotationskörpers berechnen und mit dem Ergebnis aus Aufgabe c) vergleichen.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	9	3	5	5	22

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Rekonstruktion: $f(x)=ax^2+bx+c$
$f(-16)=0 \quad \text{I} \quad 256a-16b+c=0$
$f(16)=0 \quad \text{II} \quad 256a+16b+c=0$
$f(0)=13 \quad \text{III} \quad c=13$

(alternative Lösungswege möglich)
$f(x)=-\frac{13}{256}x^2+13 \qquad g(x)=\frac{13}{256}x^2-13$

Flächenberechnung:
$A=4\int_0^{16}\left(-\frac{13}{256}x^2+13\right)dx=4\left[-\frac{13}{768}x^3+13x\right]_0^{16}=4\cdot 138\frac{2}{3}=554\frac{2}{3}$
Der Flächeninhalt der Sitzfläche des Kissens beträgt 554,67 cm².</td><td>5

4</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\frac{554\frac{2}{3}\text{ cm}^2\cdot 135\,\%}{100\,\%}=748{,}80\text{ cm}^2\approx 0{,}075\text{ m}^2$
Man benötigt für 12 Kissen $0{,}9\ \text{m}^2$ Stoff.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Volumen: $V=A_g\cdot h$
$V=554{,}67\text{ cm}^2\cdot 15\text{ cm}=8320{,}05\text{ cm}^3\approx 8{,}32\text{ dm}^3$
$8{,}32\text{ dm}^3\cdot 12=99{,}84\text{ dm}^3$
Verbrauch: $\frac{99{,}84\text{ dm}^3}{15\text{ dm}^3}\approx 6{,}66$

Kosten: $7\cdot 3{,}90\text{ €}=27{,}30\text{ €}$
Es müssen 7 kg Buchweizenschalen gekauft und 27,30 € bezahlt werden.</td><td>3

2</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Rotationsvolumen:

$(f(x))^2=\frac{169}{65536}x^4-\frac{338}{256}x^2+169$

$V=\pi\cdot\int_{-16}^{16}\left(\frac{169}{65536}x^4-\frac{338}{256}x^2+169\right)dx=\pi\cdot\left[\frac{169}{327680}x^5-\frac{338}{768}x^3+169x\right]_{-16}^{16}$
$V=\pi\cdot 2884{,}27=9061{,}2$
Das Volumen vergrößert sich durch Rotation auf 9061,2 cm³, d.h. es würde mehr Füllmaterial benötigt.</td><td>4

1</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe</td><td>22</td></tr>
</table>

3. Aufgabe: Wahlpflichtthema Zahlenfolgen

Gegeben ist die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = \frac{15n-10}{5n-2}; n \in N^*$.

a) Zeigen Sie, dass auch die Bildungsvorschrift gilt: $a_n = 3 - \frac{4}{5n-2}; n \in N^*$.

b) Ermitteln Sie die ersten sechs Glieder der Zahlenfolge (a_n) und stellen Sie diese in einem Koordinatensystem graphisch dar.

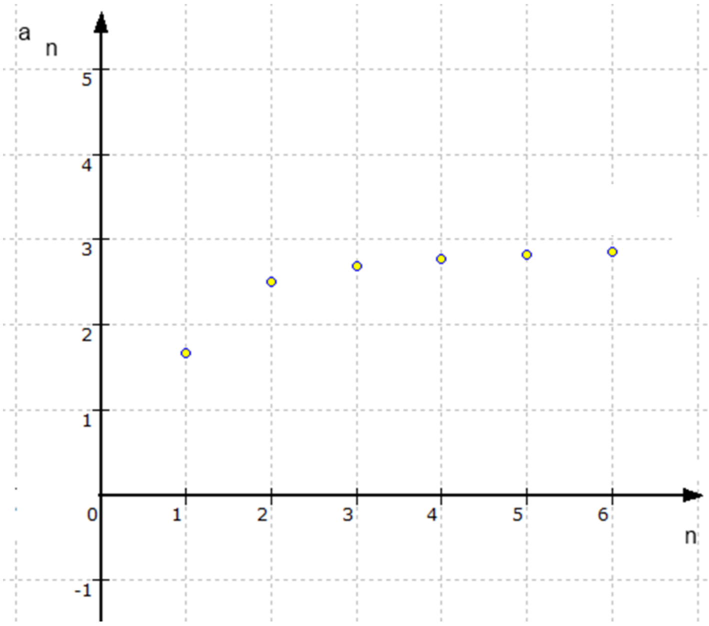
c) Prüfen Sie, ob in der Zahlenfolge (a_n) ein Glied $a_n = \frac{740}{248}$ existiert und geben Sie gegebenenfalls dessen Nummer n an.

d) Berechnen Sie a_{100} und a_{150} .

Stellen Sie eine Vermutung über das Monotonieverhalten der Zahlenfolge (a_n) auf und beweisen Sie Ihre Vermutung.

e) Ermitteln Sie den Grenzwert g der Folge (a_n). Bestimmen Sie, von welchem n ab alle weiteren Glieder der Folge (a_n) in der ε – Umgebung von g mit $\varepsilon = \frac{1}{100}$ liegen.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	2	5	3	5	5	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Bildungsvorschrift
$a_n = 3 - \frac{4}{5n-2} = \frac{3 \cdot (5n-2) - 4}{5n-2} = \frac{15n-10}{5n-2}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Glieder der Zahlenfolge (a_n)
$a_1 \approx 1{,}67; a_2 = 2{,}5; a_3 \approx 2{,}69; a_4 \approx 2{,}78; a_5 \approx 2{,}83; a_6 \approx 2{,}86$
Darstellung in einem Koordinatensystem:

</td><td>2

3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Glied der Zahlenfolge (a_n) untersuchen
$$\begin{aligned} \frac{740}{248} &= \frac{15n-10}{5n-2} \\ 740(5n-2) &= 248(15n-10) \\ 3700n - 1480 &= 3720n - 2480 \\ 20n &= 1000 \\ n &= 50 \end{aligned}$$
Das Glied existiert in der Folge und trägt die Nummer 50.</td><td>3</td></tr>
</table>

d)	Glieder berechnen $a_{100} = \frac{1490}{498} = \frac{745}{249}$; $a_{150} = \frac{2240}{748} = \frac{560}{187}$	1
	Monotonienachweis Vermutung: (a_n) ist (streng) monoton steigend	1
	Nachweis z.B: $a_{n+1} > a_n$ $\frac{15(n+1)-10}{5(n+1)-2} > \frac{15n-10}{5n-2}$; $\frac{15n+5}{5n+3} > \frac{15n-10}{5n-2}$ $75n^2 - 5n - 10 > 75n^2 - 5n - 30$ $-10 > -30$; oder $0 > -20$ w.A.	3
e)	Grenzwert g $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{15n-10}{5n-2} = \frac{15}{5} = 3$	2
	ε- Umgebung $\left\lvert \frac{15n-10}{5n-2} - 3 \right\rvert < \frac{1}{100}$ $\frac{5n-2}{4} > 100$ $5n > 402$ $n > 80{,}4$ Ab dem 81. Glied liegen alle weiteren Glieder in der ε–Umgebung von g für $\varepsilon = \frac{1}{100}$.	3
	Summe	20

3. Aufgabe: Wahlpflichtthema Analytische Geometrie

Gegeben ist ein Viereck ABCD im Raum durch die Punkte A(3|1|2), B(6|2|2), C(5|9|4) und D(1|4|3).

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ nicht parallel sind.

b) Berechnen Sie den Umfang des Vierecks ABCD.

c) Ermitteln Sie die Entfernung der Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$.

d) Berechnen Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$.

e) Ein Viereck ist dann eben, wenn seine Diagonalen sich schneiden. Führen Sie rechnerisch diesen Nachweis für das Viereck ABCD durch. Berechnen Sie dazu die Koordinaten des Schnittpunktes.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	4	5	3	3	5	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_x = -\frac{3}{4}$; $\lambda_y = -\frac{1}{5}$; Widerspruch, Vektoren nicht parallel	4
b)	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$ LE $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{1+49+4} = \sqrt{54} \approx 7{,}35$ LE $\left\|\overrightarrow{CD}\right\| = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42} \approx 6{,}48$ LE $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$ LE U = 20,73 LE	4 1
c)	$M_{AB}(4{,}5 \mid 1{,}5 \mid 2)$; $P_{CD}(3 \mid 6{,}5 \mid 3{,}5)$ $\left\|\overrightarrow{MP}\right\| = \sqrt{2{,}25+25+2{,}25} = 5{,}43$ LE	2 1
d)	$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = \frac{-6+3}{\sqrt{14}\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{140}} = -0{,}2535$ $\alpha = 104{,}69°$	3

e)	Gerade g durch A und C: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$	1
	Gerade h durch B und D: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	1
	g = h: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - r\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ I $-3 = -5s - 2r$ II $-1 = 2s - 8r$ $\quad r = \frac{1}{4}$; $s = \frac{1}{2}$ III $0 = s - 2r$ $S(3{,}5 \mid 3 \mid 2{,}5)$	3
	Summe	20