1. Aufgabe: Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = 0{,}5x^5 - 6x^3 + 18x\,;\; x \in R$.
Der Graph heißt G_f.

a) Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Berechnen Sie die Nullstellen von G_f.

c) Weisen Sie das Monotonieverhalten von G_f nach.

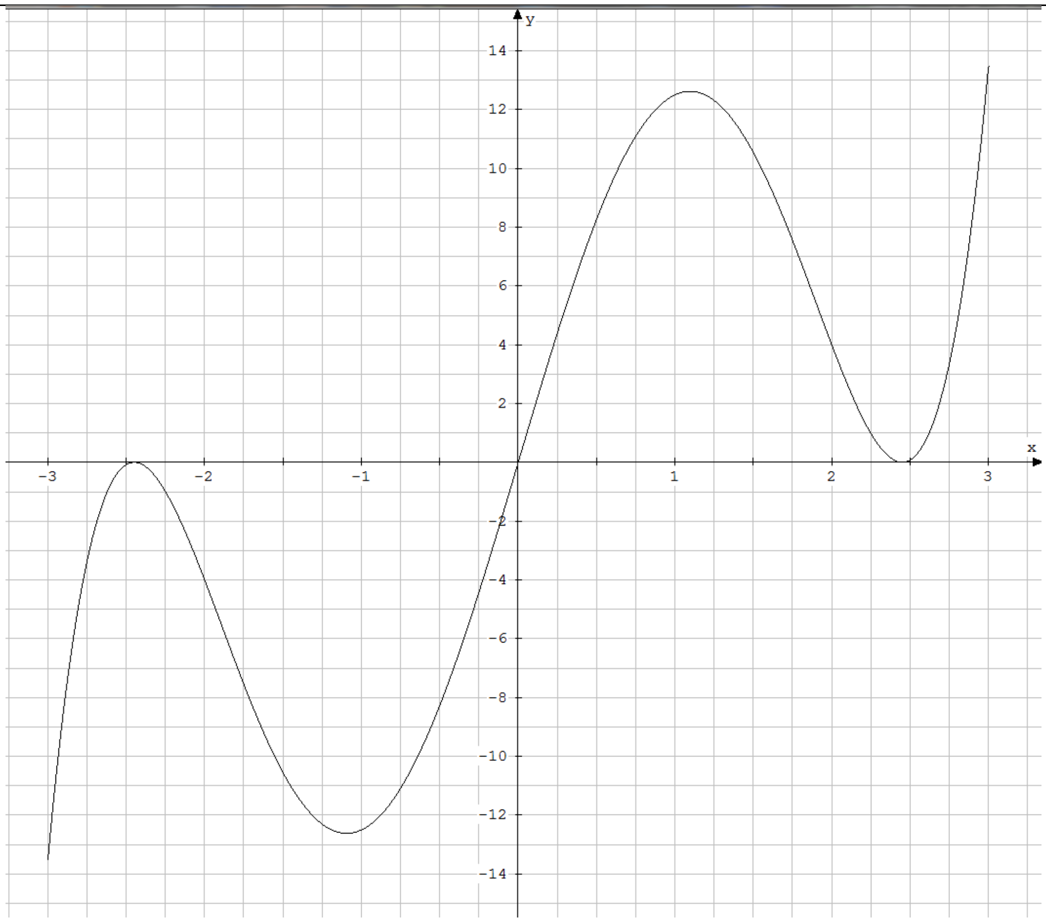
d) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f.

e) Zeichnen Sie G_f im Intervall $-3 \le x \le 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

f) Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhaltes der Fläche, die G_f mit der x-Achse im Intervall $-2{,}45 \le x \le 2{,}45$ einschließt.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	2	4	7	4	3	4	24

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. $f(-x) = 0{,}5(-x)^5 - 6(-x)^3 + 18(-x) = -0{,}5x^5 + 6x^3 - 18x$ $f(-x) = -(0{,}5x^5 - 6x^3 + 18x) = -f(x)$ (Alternative: Begründung über Exponenten)	2
b)	Nullstellen: $f(x) = 0 = x(0{,}5x^4 - 6x^2 + 18) \quad \rightarrow \quad x_1 = 0$ $0 = z^2 - 12z + 36 \quad z_{1/2} = 6 \quad \rightarrow \quad x_2 \approx -2{,}45 \quad x_3 \approx 2{,}45$	4
c)	Monotonieverhalten: $f'(x) = 2{,}5x^4 - 18x^2 + 18$ $0 = z^2 - 7{,}2z + 7{,}2 \quad z_1 = 6 \quad z_2 = 1{,}2$ $x_{E_1} \approx -2{,}45 \quad x_{E_2} \approx -1{,}10 \quad x_{E_3} \approx 1{,}10 \quad x_{E_4} \approx 2{,}45$	3
	Nachweis über Monotonieintervalle: $-\infty \leq x \leq -2{,}45: \quad f'(-3) = 58{,}5 > 0; \quad$ f ist monoton steigend $-2{,}45 \leq x \leq -1{,}1: \quad f'(-2) = -14 < 0; \quad$ f ist monoton fallend $-1{,}1 \leq x \leq 1{,}1: \quad f'(0) = 18 > 0; \quad$ f ist monoton steigend $1{,}1 \leq x \leq 2{,}45: \quad f'(2) = -14 < 0; \quad$ f ist monoton fallend $2{,}45 \leq x \leq \infty: \quad f'(3) = 58{,}5 > 0; \quad$ f ist monoton steigend (Hier kann die Punktsymmetrie ausgenutzt werden, auch die Betrachtung über Extrempunkte ist möglich.)	4
d)	Wendepunkte: $f''(x) = 10x^3 - 36x = x(10x^2 - 36) = 0$; $x_{W_1} \approx -1{,}90$; $x_{W_2} = 0$; $x_{W_3} \approx 1{,}90$ $f'''(x) = 30x^2 - 36$ $f'''(-1{,}90) = 72{,}3 \neq 0$ $f'''(0) = -36 \neq 0$ $f'''(1{,}90) = 72{,}3 \neq 0$ $W_1(-1{,}90 \mid -5{,}43) \quad W_2(0 \mid 0) \quad W_3(1{,}90 \mid 5{,}43)$ (Die Symmetrie kann auch hier ausgenutzt werden.)	4

e)		3
f)	Flächenberechnung unter Ausnutzung der Symmetrie: $A = 2\int_0^{2,45} f(x)dx = \left[\frac{1}{12}x^6 - \frac{3}{2}x^4 + 9x^2\right]_0^{2,45} = 2(18-0) = 36$ Der Flächeninhalt beträgt 36 FE.	4
	Summe	24

2. Aufgabe: Anwendung der Differentialrechnung

Ein mittelständischer Betrieb stellt zylindrische Blechbehälter her und hat sich auf besonders preisgünstige Verpackungsdosen spezialisiert. Der Geschäftsführer kauft das Blech für 7 € je m² im Großhandel ein. Die Betriebskosten ohne Material berechnet er mit 70 € pro Stunde (1 Stunde = 3600 Sekunden). Ein Kunde benötigt 1-Liter-Dosen, um diese mit Holzlasur abfüllen zu lassen.

a) Der Kunde beabsichtigt 10.000 Dosen mit den Maßen Radius r = 5 cm und Höhe h = 12,8 cm zu bestellen. Welches Volumen hat eine dieser Dosen dann?
Wie groß wäre der Materialverbrauch für 10.000 Dosen ohne Materialverschnitt bei den gewünschten Maßen in m²?
(zur Kontrolle A_O = 559,20 cm² je Dose)
Ermitteln Sie den Herstellungspreis für alle Dosen des Auftrags inklusive Material und Betriebskosten, wenn für die Produktionszeit einer Dose 10 Sekunden einkalkuliert werden?

b) Welche Abmessungen müssten zylindrische Dosen haben, damit bei einem Inhaltsvolumen von V = 1,005 Liter (1 l = 1000 cm³) der Materialverbrauch zu ihrer Herstellung minimal wird? Berechnen Sie dafür Radius und Höhe einer Dose ohne Materialverschnitt. (zur Kontrolle $A_O(r) = \frac{2010}{r} + 2\pi r^2$)
Welche Materialkosten müsste der Geschäftsführer für die 10.000 Dosen einplanen, wenn ein Dosenradius von 5,43 cm zugrunde gelegt wird?

c) Wie groß wäre die Materialkostenersparnis für alle Dosen, wenn anstelle des Kundenwunsches die optimale Dosengröße gewählt würde?
Wie teuer wären dann die 10.000 Dosen mit den in b) berechneten Abmaßen, inklusive der veranschlagten Betriebskosten bei einem zusätzlichen Gewinn auf den Gesamtpreis von 10 Prozent?

Aufgabenteil	a)	b)	c)	Summe
Punkte	7	10	3	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	$V = \pi r^2 h \approx 1005{,}31 cm^3$ (mit $\pi = 3{,}14$ wird V $\approx$ 1004,8 cm³) Für die weiteren Berechnungen wurde mit dem genauen Wert von π gerechnet! Materialverbrauch für eine Dose: $A_O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 402{,}12 + 157{,}08 \approx 559{,}20\,cm^2$ Für 10.000 Dosen: $559{,}20 \cdot 10^4\,cm^2 = 559{,}20\,m^2$ Produktionszeit: 100.000 s $\approx$ 27,78 h Betriebskosten dafür: $27{,}78 \cdot 70\,€ = 1944{,}60€$ Materialkosten: $559{,}20 \cdot 7\,€ = 3914{,}40€$ Gesamtkosten. 1944,60 € + 3914,40 € = 5859,00 €	2 2 3
b)	$A_O = 2\pi rh + 2\pi r^2$; $V = \pi r^2 h = 1005\,cm^3$ $h = \frac{1005}{\pi r^2}$ $A_O(r) = 2\pi r \frac{1005}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2010}{r} + 2\pi r^2$ $A_O'(r) = 4\pi r - \frac{2010}{r^2} = 0$ $4\pi r^3 = 2010$; $r^3 = 159{,}95$; $r \approx 5{,}43$ $h = \frac{1005}{\pi \cdot 5{,}43^2} \approx 10{,}85$ $A_O''(5{,}43) = 4\pi + \frac{4020}{159{,}95} \approx 37{,}7 > 0$; lok.Min. Die Abmessungen der Dose mit minimalem Materialverbrauch betragen: Radius r = 5,43 cm und Höhe h = 10,85 cm. Material für eine Dose: $A_O = 555{,}44\,cm^2$ Für 10.000 Dosen werden $555{,}44\,m^2$ Blech benötigt. Daraus entstehen 3888,08 € an Materialkosten.	 3 3 1 1 2
c)	Die Materialersparnis beträgt 3,76 m². Daraus ergibt sich eine Materialkostenersparnis von 26,32 €. Kosten ohne Gewinnaufschlag: 1944,60 € + 3888,08 € = 5832,68 € Der Preis mit Gewinnaufschlag: 5832,68 € + 583,27 € = 6415,95 €	3
	Summe	20

3. Aufgabe: Kurvenuntersuchung und Integralrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{3}{8}x^2 - x + 6\,;\, x \in R.$$

G_f sei der Graph der Funktion f, der nur in $T(4\,|\,0)$ einen lokalen Extrempunkt hat.

Der Graph G_f verfügt im Punkt $S_y(0\,|\,6)$ über eine Tangente t.
G_t sei der Graph der Tangente t.

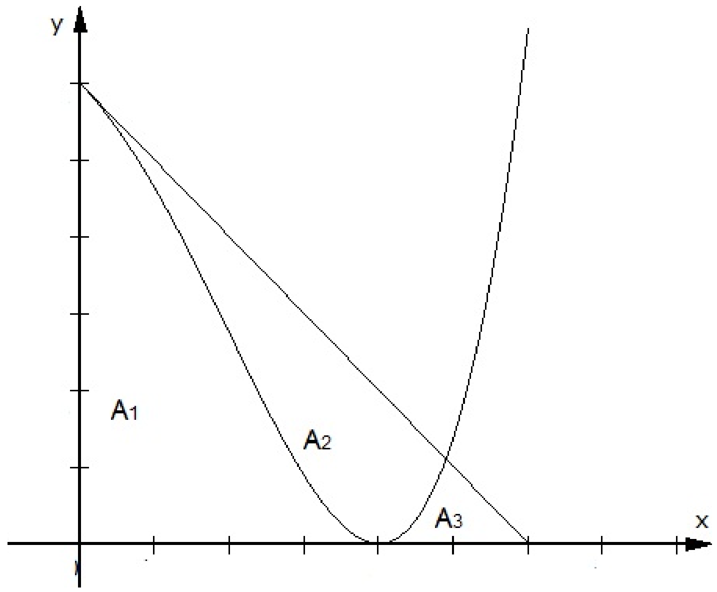
a) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t. (zur Kontrolle: $t(x) = -x + 6$)

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass einer der Wendepunkte von G_f ein Sattelpunkt ist und geben Sie dessen Koordinaten an.

c) Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung einer Wertetabelle im Intervall $-5 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Zeichnen Sie den Graphen G_t in das gleiche Koordinatensystem ein.

d) Die Graphen G_f und G_t schließen gemeinsam mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten des Koordinatensystems drei Teilflächen vollständig ein (siehe Skizze).
Berechnen Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte A_1, A_2 und A_3.

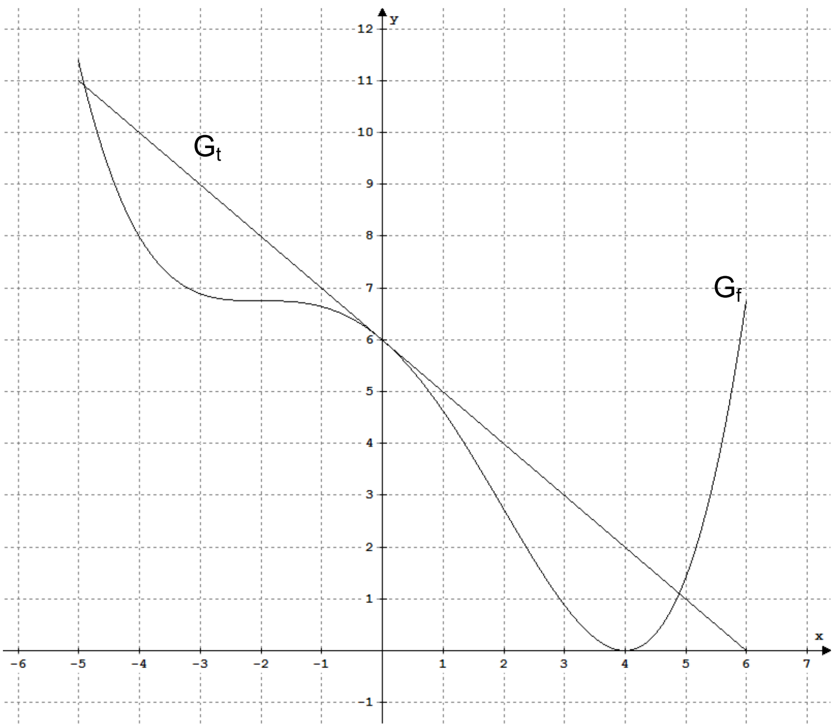
Skizze:



Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
Punkte	3	4	4	10	21

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	$f(x) = y = \frac{1}{64}x^4 - \frac{3}{8}x^2 - x + 6$ $f'(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x - 1$ Tangente $t: m_t = f'(0) = -1$ $S_y(0 \mid 6):\ 6 = (-1) \cdot 0 + n;\quad n = 6$ $t: y = -x + 6$	3
b)	$f''(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}$ $f'''(x) = \frac{3}{8}x$	1
	$x_w: 0 = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}$ $x_{w_{1/2}} = \pm 2$ mit $f'(-2) = 0; f''(-2) = 0;\quad f'''(-2) \neq 0$ ist Sattelpunkt $S(-2 \mid 6{,}75)$	3
c)	Wertetabelle für G_f	1

x	-5	-4	-2	0	2	4	5	6
y	11,39	8	6,75	6	2,75	0	1,39	6,75



3

d)	Berechnung der Maßzahlen der Teilflächeninhalte Das Dreieck $\Delta 0S_yN$ hat einen Flächeninhalt von $A=\frac{6\cdot 6}{2}=18$ FE. $A_1=\int_0^4\left(\frac{1}{64}x^4-\frac{3}{8}x^2-x+6\right)dx=\left[\frac{1}{320}x^5-\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^4=11{,}2$ Schnittstellen der Graphen G_f und G_t $(-x+6)-\left(\frac{1}{64}x^4-\frac{3}{8}x^2-x+6\right)=-\frac{1}{64}x^4+\frac{3}{8}x^2=x^2\cdot\left(-\frac{1}{64}x^2+\frac{3}{8}\right)=0$ $x_{S1}=0;\ x_{S2/3}=\pm\sqrt{24}\approx\pm 4{,}90$ $A_2=\int_0^{\sqrt{24}}\left(-\frac{1}{64}x^4+\frac{3}{8}x^2\right)dx=\left[-\frac{1}{320}x^5+\frac{1}{8}x^3\right]_0^{\sqrt{24}}=5{,}88$ $A_3=A-(A_1+A_2)=0{,}92$ Die Flächen haben die Flächeninhalte A_1 = 11,2 FE; A_2 = 5,88 FE; A_3 = 0,92 FE.	1 3 3 2 1
	Summe	21