1. Aufgabe

Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f vierten Grades in der allgemeinen Form
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit a, b, c, d, e, $x \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

a) Zeigen Sie, dass die dritte Ableitung der Funktion durch den Funktionsterm $f'''(x) = 24ax - 6b$ beschrieben werden kann.

b) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c, d und e für eine gesuchte Funktion f, die folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Punkte $A(0\,|\,2)$ und $B(2\,|\,0)$ liegen auf dem Graphen von f.
2. Die erste Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = -1$ ist gleich 0.
3. Die zweite Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 1$ ist gleich 0.
4. Die dritte Ableitung der Funktion f an der Stelle $x = 0{,}5$ ist gleich 6.

Geben Sie den entsprechenden Funktionsterm für f an.

(zur Kontrolle: $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$)

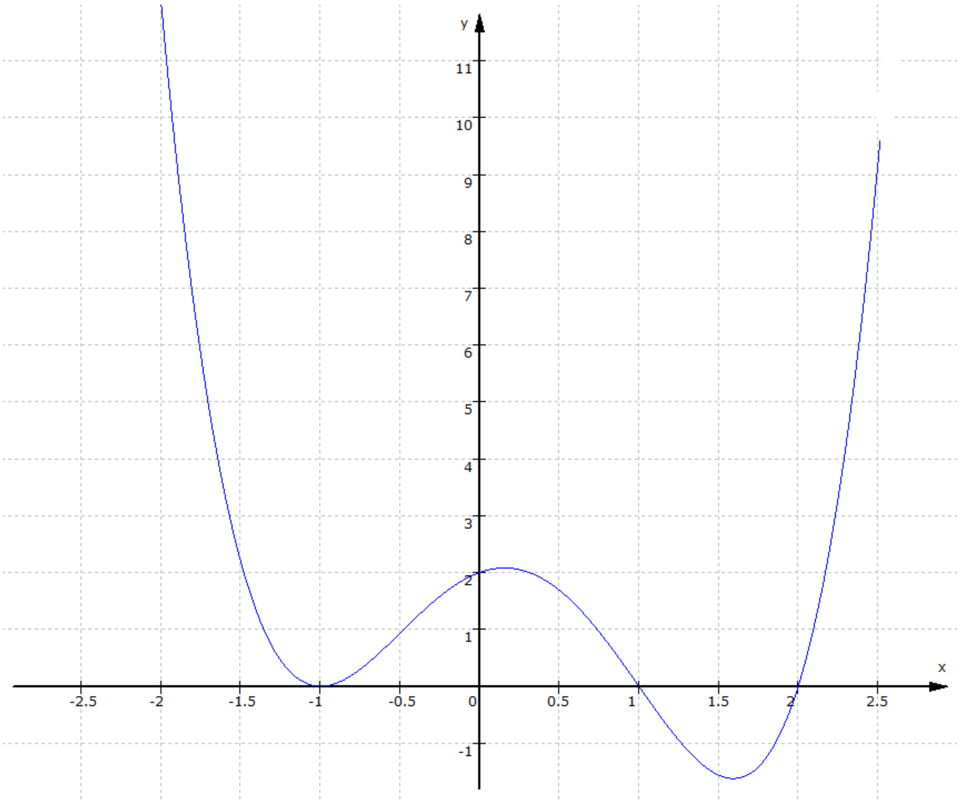
c) Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch-, Tief- und Wendepunkte des Graphen von f.

d) Zeigen Sie durch Rechnung, dass $x_2 = -1$ und $x_3 = 1$ zwei der insgesamt drei Nullstellen der Funktion f sind. Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \leq x \leq 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

e) Berechnen Sie die Maßzahlen der Flächeninhalte der Flächen, die vom Graphen der Funktion f und der x-Achse vollständig begrenzt werden. Geben Sie diese als Gesamtfläche in Flächeneinheiten (FE) an.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
Punkte	1	7	9	3	5	25

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e; \quad f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c; \quad f'''(x) = 24ax + 6b$	1
b)	$A(0 \mid 2) \qquad e = 2$ $B(2 \mid 0) \qquad -2 = 16a + 8b + 4c + 2d$ $f'(-1) = 0 \qquad 0 = -4a + 3b - 2c + d$ $f''(1) = 0 \qquad 0 = 12a + 6b + 2c$ $f'''(0,5) = 6 \qquad 6 = 12a + 6b$ $-2 = 24a + 2b + 8c$ $\underline{0 = -48a - 24b - 8c}$ $-2 = -24a - 22b$ $\underline{12 = \ 24a + 12b}$ $10 = -10b$ $b = -1 \quad a = 1 \quad c = -3 \quad d = 1$ $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$	1 2 4
c)	Extrempunkte: $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1; \quad f''(x) = 12x^2 - 6x - 6; \quad f'''(x) = 24x - 6$ $f'(x) = 0$ aus b) $x_{E1} = -1; \quad 4x^2 - 7x + 1 = 0; \quad x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{4} = 0$ $x_{E2} \approx 1{,}59; \quad x_{E3} \approx 0{,}16$ $f''(-1) = 12 > 0$ TP; $\quad f''(1{,}59) \approx 14{,}8 > 0$ TP; $\quad f''(0{,}16) \approx -6{,}65 < 0$ HP $T_1(-1 \mid 0); \quad T_2(1{,}59 \mid -1{,}62); \quad H(0{,}16 \mid 2{,}08)$ Wendepunkte: $12x^2 - 6x - 6 = 0; \quad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0; \quad x_{W1} = 1; \quad x_{W2} = -\frac{1}{2}$ $f'''(1) = 18 \neq 0; \quad f'''(-\frac{1}{2}) = -18 \neq 0$ $W_1(1 \mid 0); \quad W_2(-\frac{1}{2} \mid \frac{15}{16}) \approx (-0{,}5 \mid 0{,}94)$	1 5 3

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
d)	Nachweis der Nullstellen: $f(-1) = 1+1-3-1+2 = 0; \quad f(1) = 1-1-3+1+2 = 0$	1
	Skizze:  	2
e)	$A_1 = \int_{-1}^{1}(x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{1}$ $= \frac{29}{20} - (-\frac{19}{20}) = 2{,}4$ $A_2 = \int_{1}^{2}(x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{1}^{2}$ $\lvert A_2 \rvert = \left\lvert \frac{2}{5} - \frac{29}{20} \right\rvert = \frac{21}{20} = 1{,}05$	3
	$A_{ges} = 3{,}45$ Die Gesamtfläche beträgt 3,45 FE.	2
	Summe	25

2. Aufgabe

Zahlenfolgen

Gegeben ist eine Zahlenfolge (a_n) durch $a_n = \frac{8n^2 - 1}{4n^2 + 10}$; $n \in N^*$.

a) Ermitteln Sie die ersten fünf Folgeglieder von (a_n) und stellen Sie diese in einem geeigneten Koordinatensystem graphisch dar.

b) Weisen Sie das Monotonieverhalten der Folge (a_n) nach.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert g der Folge (a_n). Zeichnen Sie g in das Koordinatensystem aus Aufgabe a) ein.

d) Berechnen Sie, von welchem Folgeglied ab alle weiteren Glieder in der ε-Umgebung des Grenzwertes g liegen, wenn $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ist.

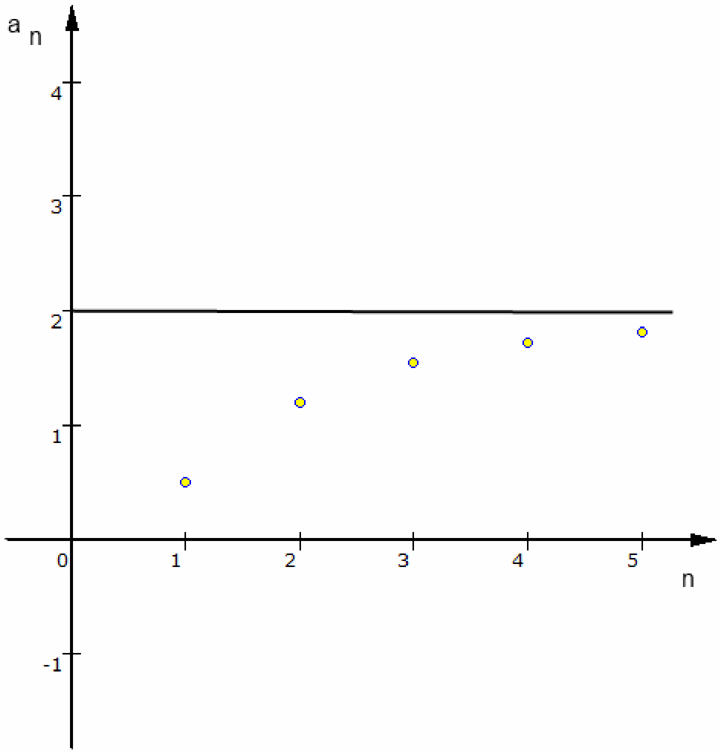
e) Berechnen Sie, welches Glied der Folge (a_n) den Wert $\frac{193}{98}$ hat.

f) Gegeben ist eine weitere konvergente Zahlenfolge (b_n) mit

$$b_n = \frac{6n^2 + c}{2n^2 + d};\ n \in N^* \text{ und } c, d \in R.$$

Wählen Sie zwei Zahlen für c und d derart aus, dass die dadurch entstehende Folge streng monoton fallend wird.

Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
Punkte	4	4	3	4	3	2	20

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
a)	Folgeglieder: $a_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5;\ a_2 = \frac{31}{26} \approx 1{,}19;\ a_3 = \frac{71}{46} \approx 1{,}54;\ a_4 = \frac{127}{74} \approx 1{,}72;\ a_5 = \frac{199}{110} \approx 1{,}81$ Graphische Darstellung 	2 2
b)	Vermutung: streng monoton steigend: $b_n < b_{n+1}$ $\frac{8n^2-1}{4n^2+10} < \frac{8(n+1)^2-1}{4(n+1)^2+10}$; $\frac{8n^2-1}{4n^2+10} < \frac{8n^2+16n+7}{4n^2+8n+14}$ $(8n^2-1)(4n^2+8n+14) < (8n^2+16n+7)(4n^2+10)$ $-84 < 168n$ $-\frac{1}{2} < n$ Die Vermutung wurde bestätigt.	4
c)	Grenzwert g $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n^2-1}{4n^2+10} = \frac{8}{4} = 2$ Gerade $g = 2$ zeichnen	2 1

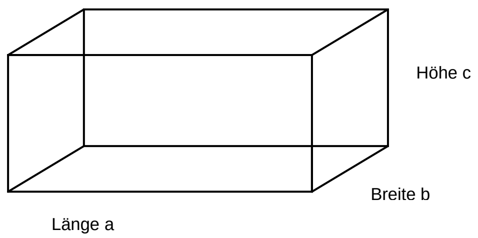
Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
d)	$\left\lvert \dfrac{8n^2-1}{4n^2+10} - 2 \right\rvert < \dfrac{1}{100}$ $\left\lvert \dfrac{-21}{4n^2+10} \right\rvert < \dfrac{1}{100}$ $\dfrac{4n^2+10}{21} > 100$ $4n^2 > 2090$; $n^2 > 522{,}5$; $n > 22{,}86$ (negativer Wert entfällt) Antwort: Ab $n = 23$ liegen alle weiteren Glieder in der ε - Umgebung des Grenzwertes für $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$.	4
e)	$\dfrac{8n^2-1}{4n^2+10} = \dfrac{193}{98}$ $784n^2 - 98 = 772n^2 + 1930$ $n^2 = 169$ $n_1 = 13$ (negativer Wert entfällt)	3
f)	Schüler wählen Zahlen für c und d derart, dass gilt: c > d.	2
	Summe	20

3. Aufgabe

Extremwertaufgabe

Im Fachunterricht wurden zur Prüfungsvorbereitung Lernhilfen als Karteikärtchen der Größe 10 cm x 7 cm angefertigt. Diese Sammlung soll in mehreren Schachteln den nachfolgenden Schülerjahrgängen zur Verfügung gestellt und eventuell ergänzt werden.

3 Schülergruppen fertigen dafür nach oben offene quaderförmige Schachteln aus Pappe an.



Skizze nicht maßstäblich

a) Die Schüler der Gruppe 1 schlagen folgende Maße für eine Schachtel vor:

Länge: 11 cm, Breite: 11 cm, Höhe: 5,5 cm.

Berechnen Sie den Materialverbrauch für 15 dieser Schachteln, wenn für Verschnitt und Klebefalze pro Schachtel ein Mehrverbrauch von 8 % einkalkuliert werden muss. Wie viele Schachteln ließen sich theoretisch aus 1 m² Pappe herstellen?

b) Um die Karten auch nebeneinander anordnen zu können überlegen die Schüler der Gruppe 2 nun, die Schachtel jeweils doppelt so lang und nur halb so breit wie von Gruppe 1 vorgeschlagen zu bauen. Die Höhe bleibt unverändert.

Um wie viel Prozent verändert sich der Materialverbrauch bei gleichem Mehrbedarf von 8 % für Verschnitt und Falze? In welchem Verhältnis stehen die Volumina der beiden Schachtelvarianten der Gruppen 1 und 2 zueinander?

c) Die Mathematiker der Gruppe 3 legen für die Schachtel ein Volumen von 640 cm³ fest. Sie wollen die Schachteln mit geringstem Materialverbrauch herstellen.

Berechnen Sie die Maße einer Schachtel, wenn deren Länge a doppelt so groß wie die Höhe c sein soll. Falze und Verschnitt bleiben hierbei unberücksichtigt.

(zur Kontrolle: $A_0(c) = \frac{1280}{c} + 4c^2$)

Aufgabenteil	a)	b)	c)	Summe
Punkte	5	7	8	20

<table>
<tr><th>Teil</th><th>Erwartete Teilleistung</th><th>Pkt.</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>geg.: a = b = 11 cm ges.: A_0
c = 5,5 cm

Lös.:
$A_0 = ab + 2bc + 2ac$
$A_0 = 121 + 121 + 121 = 363$
8 % $\hat{=}$ 29,04
$A_0 + 29{,}04 = 392{,}04$
Der Verbrauch für 15 Schachteln beträgt $5880{,}6\,cm^2$.
$1\,m^2 = 10000\ cm^2$
$10000 : 392{,}04 = 25{,}51$
Theoretisch reicht das Material für 25 Schachteln.</td><td>3
1

1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>geg.: a = 22 cm ges.: A_0, V
b = c = 5,5 cm

Lös.:
$A_0 = ab + 2bc + 2ac$
$A_0 = 121 + 242 + 60{,}5 = 423{,}5$
8 % $\hat{=}$ 33,88
$A_0 + 33{,}88 = 457{,}38$
Der Materialmehrverbrauch beträgt 16,67 %.

Volumen:
$V_1 = 11 \cdot 11 \cdot 5{,}5$ $V_2 = 22 \cdot 5{,}5 \cdot 5{,}5$
$V_1 = 665{,}5$ $V_2 = 665{,}5$

Man erhält ein Verhältnis der beiden Volumina von $V_1 : V_2 = 1:1$.</td><td>1

3

2

1</td></tr>
</table>

Teil	Erwartete Teilleistung	Pkt.
c)	Minimaler Oberflächeninhalt $A_O = 2ac + 2bc + ab$ $\text{NB}: \quad a = 2c; \quad 640 = a \cdot b \cdot c = 2bc^2; \quad b = \dfrac{320}{c^2}$	2
	$A_O(c) = 4c^2 + \dfrac{1280}{c}$	1
	$A_O{}'(c) = 8c - \dfrac{1280}{c^2}; \quad A_O{}''(c) = 8 + \dfrac{2560}{c^3}$	1
	$8c - \dfrac{1280}{c^2} = 0; \quad 8c^3 = 1280; \quad c^3 = 160; \quad c = 5{,}43$	2
	$A_O{}''(5{,}43) = 8 + \dfrac{2560}{5{,}43^3} = 23{,}99 > 0; \quad A_0$ wird minimal für $a = 2c = 10{,}86; \quad b = 10{,}85$	2
	Die Länge beträgt 10,86 cm, die Breite 10,85 cm und die Höhe 5,43 cm. (Ohne Rundung wären die Seiten a und b gleich lang).	
	Summe	20