Abschlussprüfung Berufsoberschule 2021
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Exponentialfunktion /34

In einem Museum wird die Anzahl an Besuchern während eines Tages ermittelt.
Die Anzahl an Besuchern lässt sich für einen bestimmten Tag durch die Funktion B mit der Gleichung

$$B(t) = t^3 \cdot (8 - t) \cdot e^{-t} = (8t^3 - t^4) \cdot e^{-t}$$

beschreiben. Dabei gibt t die Anzahl der Stunden ab 10 Uhr an und $B(t)$ die Anzahl der Besucher in 100.
Der Graph der Funktion ist G_B.

1.1 Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion B. **/4**
Interpretieren Sie die Nullstellen im Sachzusammenhang.

1.2 Zeigen Sie, dass $B'(t) = t^2 \cdot (t^2 - 12t + 24) \cdot e^{-t}$ die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion B ist. **/4**

1.3 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Anzahl an Besuchern am höchsten war. Geben Sie auch die Anzahl der Besucher an, die sich zu diesem Zeitpunkt im Museum befanden. **/9**
[*Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden:* $B''(t) = -t \cdot (t^3 - 16t^2 + 60t - 48) \cdot e^{-t}$.]

1.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

t	0,5	1	2	3	4	5	6	7
$B(t)$		2,58		6,72	4,69		1,07	

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion B im Intervall $0 \le t \le 8$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

1.5 Ein Mitarbeiter des Museums stellt während seiner Aufsicht von 10 Uhr bis 18 Uhr fest, dass um 14 Uhr die Besucherzahlen am stärksten sanken. **/11**

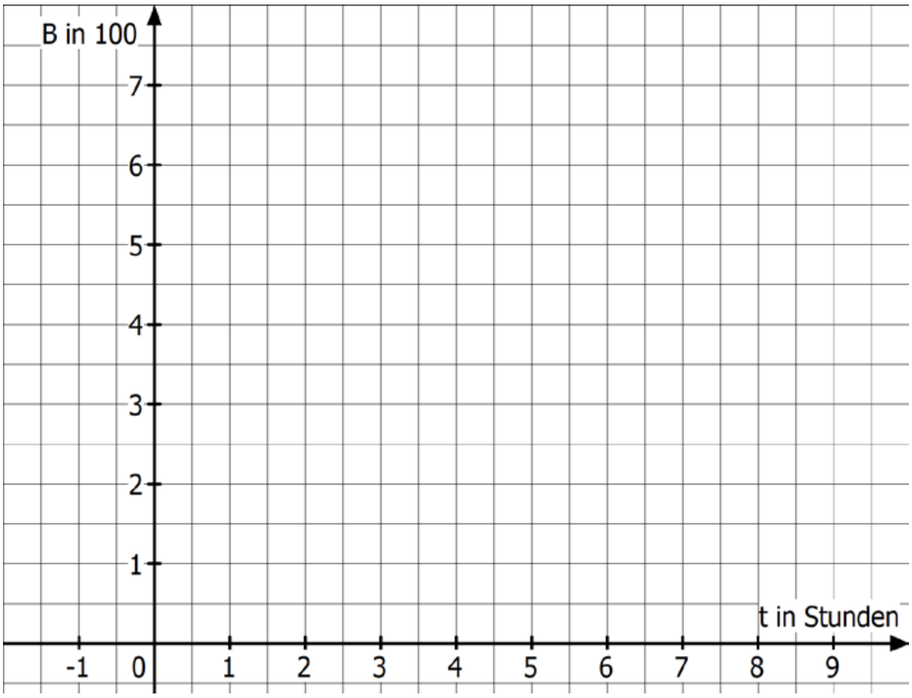
Ermitteln Sie den Zeitpunkt, an dem die Anzahl an Besuchern am stärksten gestiegen ist.

Berechnen Sie die Größe des Anstiegs der Anzahl an Besuchern zu diesem Zeitpunkt.

[*Ein Nachweis mit Hilfe der dritten Ableitung oder des Vorzeichenwechselkriteriums ist nicht erforderlich.*]

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\dfrac{15}{x^2+5}$. Der Graph der Funktion sei G_f.

2.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von *f*. /4
Untersuchen Sie den Graphen von *f* auf Symmetrie.

2.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen der Funktion *f* mit der *y*-Achse. /3
Weisen Sie nach, dass *f* keine Nullstellen besitzt.

2.3 Berechnen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f. /7

[*Hinweis: Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden* $f''(x)=\dfrac{90x^2-150}{(x^2+5)^3}$.]

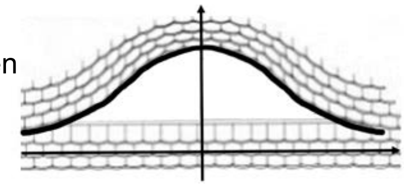
2.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. /5

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4
$f(x)$				2,07	1,67		

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von *f* im Intervall $[-4\,|\,4]$ in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite** ein.

Im Folgenden soll diese Funktion im Sachzusammenhang betrachtet werden:

Beim Dachausbau eines Hauses wird eine Dachgaube eingebaut.
Die Funktion *f* beschreibt in guter Näherung den Verlauf des oberen Randes der Dachgaube (siehe Abbildung).
Der Fußboden im Dach soll in der Höhe der *x*-Achse liegen,
1 Längeneinheit entspricht 1 m.



2.5 In der Höhe von 2 m über dem Fußboden wird im Fensterrahmen ein Balken *g* eingezogen, der parallel zum Fußboden ist. Die Fläche zwischen dem Balken und dem oberen Rand der Gaube soll in einem Stück verglast werden. Die Dicke des Fensterrahmens wird vernachlässigt. /2
Zeichnen Sie den Balken in das Koordinatensystem ein und markieren Sie die Fläche, die verglast werden soll.

2.6 Ermitteln Sie, in welchem Bereich der obere Rand des Fensterrahmens mehr als 2 m über dem Fußboden des Dachraums liegt. /3

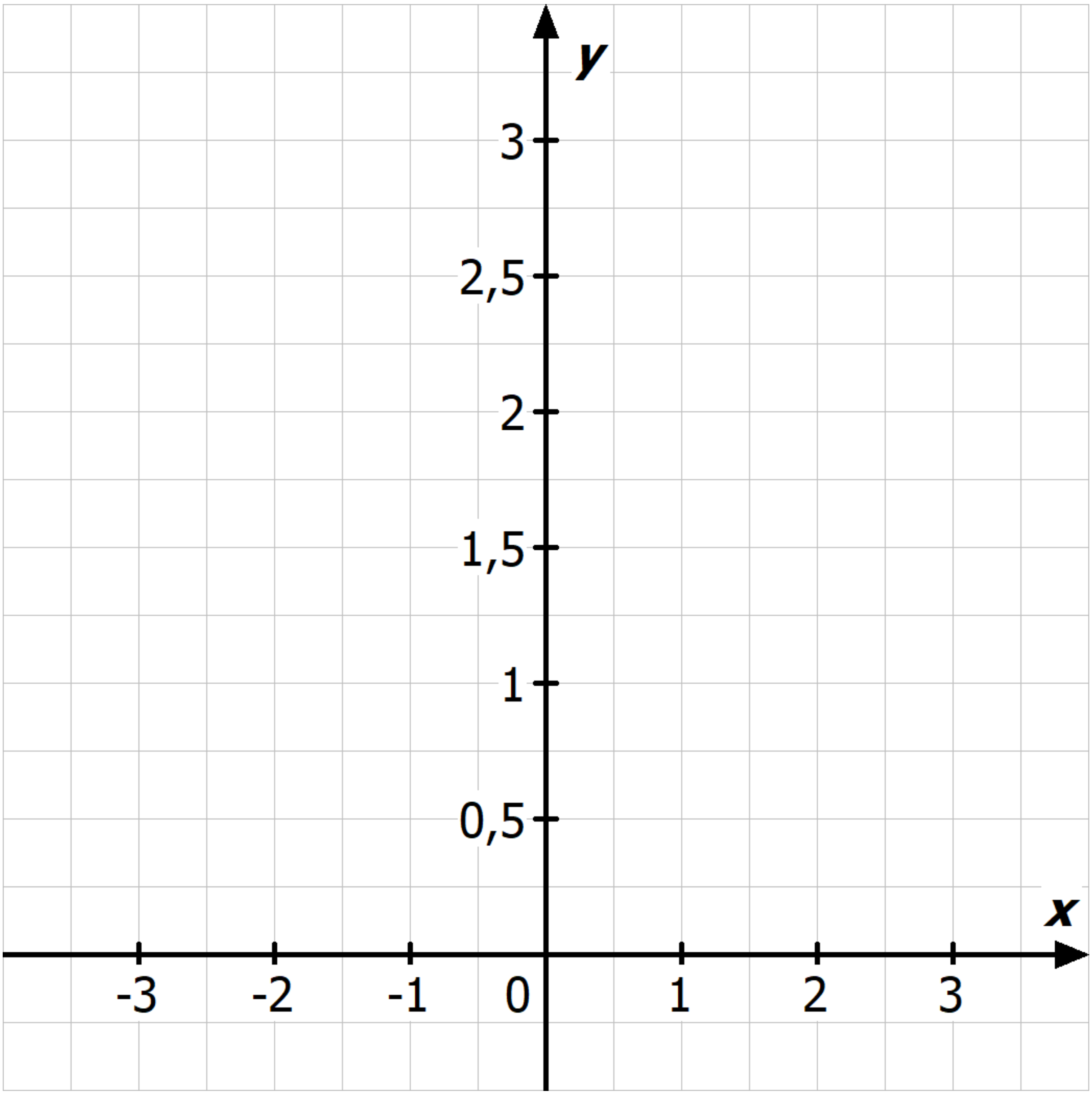
Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Um den Flächeninhalt der Fläche, die verglast werden soll, näherungsweise zu ermitteln, soll eine Parabel *p* verwendet werden, die die gleichen Schnittpunkte mit dem Balken *g* hat wie *f*.

2.7 Zeichnen Sie die Parabel *p* mit $p(x) = -0{,}4x^2 + 3$ in das Koordinatensystem ein. Zeigen Sie, dass die Schnittstellen der Graphen von *f* und *p* mit Hilfe der Gleichung $0 = -0{,}4x^4 + x^2$ ermittelt werden können. **/4**
[Hinweis: Die Schnittstellen selbst müssen nicht noch einmal ermittelt werden.]

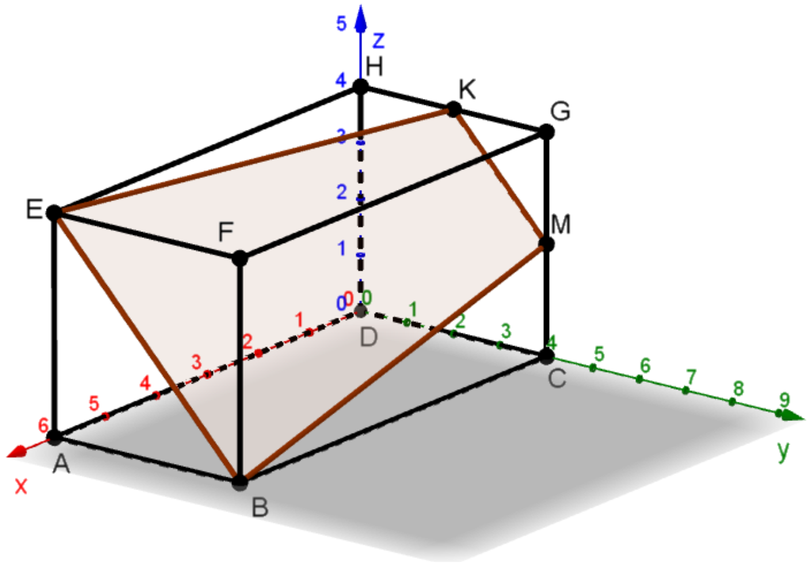
2.8 Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die verglast werden soll. Nutzen Sie dazu die Parabel *p*. **/5**
[*Hinweis: Sollten Sie Aufgabe 2.6 nicht bearbeitet haben, lesen Sie die Intervallgrenzen aus der Zeichnung ab.*]

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.4 , 2.6 und 2.7:



3 Analytische Geometrie /33

Ein Quader *ABCDEFGH* hat die Kantenlänge $\overline{DA} = 6$ cm, $\overline{DC} = 4$ cm und $\overline{DH} = 4$ cm.
M ist der Mittelpunkt der Kante $\overline{CG}$.



3.1 Die Ebene *T* verläuft durch die Punkte *E*, *B* und *M*. /7
Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene *T* in Parameterform und Koordinatenform.
[*Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist* $T: x + 3y + 3z = 18$.]

3.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Mittelpunkt *K* der Kante $\overline{GH}$ ein Punkt der Ebene *T* ist. /2

3.3 Die Raumdiagonale $\overline{DF}$ liegt auf der Geraden *d*. /2

Weisen Sie nach, dass $d: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Gleichung der Geraden *d* ist.

3.4 Zeigen Sie, dass $S(3{,}6\,|\,2{,}4\,|\,2{,}4)$ der Schnittpunkt der Raumdiagonale $\overline{DF}$ und der Ebene *T* ist. /8

Untersuchen Sie, ob *S* gleichzeitig der Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{EM}$ und $\overline{BK}$ des Vierecks *BMKE* ist.

3.5 Berechnen Sie im Viereck *BMKE* den Innenwinkel β im Punkt *B*. /3

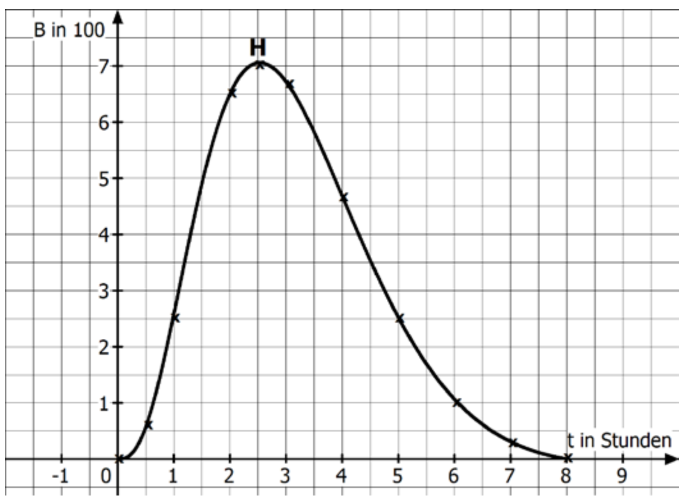
3.6 Begründen Sie, dass das Viereck *BMKE* ein Trapez ist. /3

3.7 Der Punkt $P(6\,|\,1\,|\,3)$ liegt auf der Strecke $\overline{EB}$. /3
Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade durch die Punkte *P* und *K* senkrecht zur Strecke $\overline{EB}$ verläuft.

3.8 Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Trapezes *BMKE*. /5

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2021
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

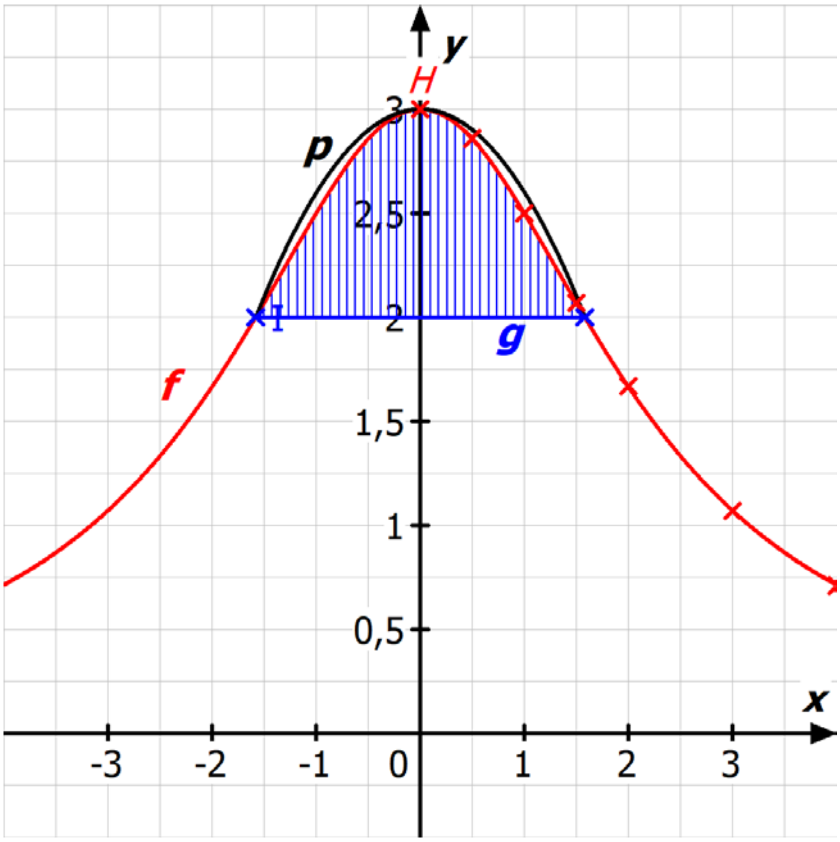
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$B(t_0)=0 \Rightarrow 0=t^3\cdot(8-t)\cdot\underbrace{e^{-t}}_{\text{wird nie Null}} \Rightarrow t_{01}=0$ und $t_{02}=8$
Um 10 Uhr und um 18 Uhr befinden sich keine Besucher im Museum.</td><td>2
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Aus $B(t)=(8t^3-t^4)\cdot e^{-t}$ ergibt sich
$B'(t)=\left(24t^2-4t^3\right)\cdot e^{-t}+\left(8t^3-t^4\right)\cdot\left(-e^{-t}\right)=e^{-t}\cdot\left(t^4-12t^3+24t^2\right)$
$=t^2\cdot\left(t^2-12t+24\right)\cdot e^{-t}$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$B'(t_E)=0 \Rightarrow t^2\cdot\left(t^2-12t+24\right)\cdot\underbrace{e^{-t}}_{\text{wird nie Null}}=0 \Rightarrow t_1=0$ entfällt, da $B(0)=0$
Aus $t^2-12t+24=0 \Rightarrow t_{2,3}=6\pm\sqrt{36-24}$
$\Rightarrow t_2\approx 9{,}46$ und $B''(9{,}46)>0 \Rightarrow$ entfällt
$\Rightarrow t_3\approx 2{,}54$ und $B''(2{,}54)<0 \Rightarrow B(2{,}54\,|\,7{,}06)$
Um 12:32 Uhr befanden sich ca. 706 Besucher im Museum.
Alternative Zeit- und Besucherangaben entsprechend der gewählten Rundung von t_3 sind zulässig.</td><td></td><td>9</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Ergänzung der Wertetabelle:
<table><tr><td>t</td><td>0,5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>$B(t)$</td><td>0,57</td><td>2,58</td><td>6,50</td><td>6,72</td><td>4,69</td><td>2,53</td><td>1,07</td><td>0,31</td></tr></table>

</td><td>2

4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.5	$B''(t) = 0 \Rightarrow 0 = -t \cdot (t^3 - 16t^2 + 60t - 48) \cdot \underbrace{e^{-t}}_{\text{wird nie Null}}$			
	$\Rightarrow t_1 = 0 \Rightarrow$ entfällt, da $B'(0) = 0$ (vgl. 1.3)		3	
	Nach Polynomdivision oder Hornerschema mit $t_2 = 4$ (vgl. Aufgabenstellung) ergibt sich			
	$t^3 - 16t^2 + 60t - 48 = (t - 4) \cdot (t^2 - 12t + 12)$			3
	$\Rightarrow t_{3/4} = 6 \pm \sqrt{36 - 12}$			
	$\Rightarrow t_3 \approx 10{,}90 \Rightarrow$ entfällt, da außerhalb der Öffnungszeiten			
	$\Rightarrow t_4 \approx 1{,}10$			4
	$\Rightarrow B'(1{,}10) = 4{,}84$			1
	Um 11:06 Uhr nimmt die Besucherzahl am stärksten mit 484 Besuchern/Stunde zu. Alternative Angaben entsprechend der gewählten Rundung von t_4 sind zulässig.			
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**10**	**16**	**8**
	Summe der BE		**34**	

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.1	$N(x)=x^2+5\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$ $f(-x)=\dfrac{15}{(-x)^2+5}=\dfrac{15}{x^2+5}=f(x) \Rightarrow$ der Graph von *f* ist achsensymmetrisch zur *y*-Achse.	2 2		
2.2	$S_y:\ f(0)=\dfrac{15}{5}=3 \Rightarrow S_y(0\mid 3)$ $Z(x)=15\neq 0 \Rightarrow$ Der Funktionswert kann niemals Null werden, es gibt keine Nullstellen.	3		
2.3	1. Ableitung: $f'(x)=\dfrac{0\cdot(x^2+5)-15\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=\dfrac{-30x}{(x^2+5)^2}$ Extrempunkt: $f'(x)=0$ $-30x=0$ $x=0$ $f''(0)=\dfrac{-150}{125}<0 \Rightarrow$ es liegt ein Maximum vor. $\Rightarrow H(0\mid 3)$		7	
2.4	(Wertetabelle und Graph siehe unten)	2	3	

x	0	0,5	1	1,5	2	3	4
***f*(*x*)**	**3,00**	**2,86**	**2,50**	2,07	1,67	**1,07**	**0,71**



Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.5	Siehe Abbildung zu 2.4: Strecke *g* und blaue Markierung		2	
2.6	$f(x) > 2$ $\frac{15}{x^2+5} = 2$ $15 = 2(x^2+5)$ $x^2 = 2{,}5$ $x_{1/2} \approx \pm 1{,}58$ Im Bereich -1,58 m < x < +1,58 m ist der Fensterrahmen höher als 2 m über dem Fußboden.		3	
2.7	Zeichnung: Siehe Abbildung zu 2.4: Parabel *p*		1	
	Ansatz für Schnittstellenberechnung $f(x) = p(x)$ führt zu: $f(x) = p(x)$ $\frac{15}{x^2+5} = -0{,}4x^2 + 3$ $15 = \left(-0{,}4x^2+3\right)\cdot\left(x^2+5\right)$ $15 = -0{,}4x^4 + 3x^2 - 2x^2 + 15$ $0 = -0{,}4x^4 + x^2$ Gleichung nachgewiesen			3
2.8	Ermittlung der Intervallgrenzen		1	
	$A = \int_{-1,58}^{+1,58} \left(p(x) - g(x)\right) \mathrm{d}x = \int_{-1,58}^{+1,58} \left(-0{,}4x^2+1\right) \mathrm{d}x$ $= \left[-\frac{2}{15}x^3 + x\right]_{-1,58}^{+1,58} = \frac{\sqrt{10}}{3} - \left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right) \approx 2{,}11\,\text{FE}$ Der Inhalt der zu verglasenden Fläche beträgt ca. 2,11 m². [*Hinweis: Das Ablesen der Intervallgrenzen aus der Zeichnung ist möglich.*]		4	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**9**	**21**	**3**
	Summe der BE		**33**	

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.1	Richtungsvektoren und Normalenvektor der Ebene: $\overrightarrow{BE}=\begin{pmatrix}6-6\\0-4\\4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}0-6\\4-4\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Parameterform: $T:\ \vec{x}=\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{BE}+s\cdot\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\2\end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Koordinatenform: $\vec{n}=\overrightarrow{BE}\times\overrightarrow{BM}=-8\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$ $\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\overrightarrow{OB}$ $T: x+3y+3z=18$	3	4	
3.2	Punktprobe für $K(0\mid 2\mid 4)$: $T: 1\cdot 0+3\cdot 2+3\cdot 4=6+12=18$ *K* liegt in der Ebene *T*.	2		
3.3	$d:\vec{x}=\overrightarrow{OD}+t\cdot\overrightarrow{DF}=t\cdot\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}$ Der Stützvektor entfällt, da die Diagonale durch den Ursprung verläuft. Der Richtungsvektor ist $\overrightarrow{DF}$.		2	
3.4	*d* in die Koordinatenform von *T* einsetzen: $6t+12t+12t=18$ $t=0{,}6$ $\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}3{,}6\\2{,}4\\2{,}4\end{pmatrix}$ $S(3{,}6\mid 2{,}4\mid 2{,}4)$	3		

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
	Prüfen, ob S auch Schnittpunkt der Diagonalen ist: $d_{EM}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 2{,}4 \\ 2{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{array}{ll} I)\ 3{,}6 = 6 + 6t & I)\ t = -0{,}4 \\ II)\ 2{,}4 = -4t & II)\ t = -0{,}6 \\ III)\ 2{,}4 = 4 + 2t & III)\ t = -0{,}8 \end{array}$ Der Punkt *S* liegt nicht auf der Geraden $\overline{EM}$ und kann damit auch nicht der Schnittpunkt der Diagonalen sein. [*Hinweis: Alternative Lösungen sind möglich.*]		5	
3.5	$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BM}}{\lvert\overrightarrow{BE}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BM}\rvert} = \frac{8}{\sqrt{32}\sqrt{40}}$ $\beta = 77{,}08°$		3	
3.6	$\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{KM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ Die Strecken $\overline{KM}$ und $\overline{EB}$ sind parallel zueinander, da offensichtlich die Vektoren $\overrightarrow{EB}$ und $\overrightarrow{KM}$ linear abhängig sind. Damit ist das Viereck *BMKE* ein Trapez. [*Alternative Begründungen sind ebenfalls möglich.*]			3
3.7	$\overrightarrow{PK} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PK} \cdot \overrightarrow{EB} = 0$, also steht die Gerade durch die Punkte *P* und *K* senkrecht zur Strecke $\overline{EB}$.		3	
3.8	$\lvert\overrightarrow{EB}\rvert = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$ (in 3.5 berechnet) $\lvert\overrightarrow{KM}\rvert = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ $\qquad \lvert\overrightarrow{PK}\rvert = \sqrt{(-6)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{38}$ $A = \frac{1}{2}\left(\lvert\overrightarrow{EB}\rvert + \lvert\overrightarrow{KM}\rvert\right) \cdot \lvert\overrightarrow{PK}\rvert = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{8} + \sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{38} = 6\sqrt{19} \approx 26{,}15 \text{ cm}^2$ [*Alternative Vorgehensweisen sind ebenfalls möglich.*]			5
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**8**	**17**	**8**
	Summe der BE		**33**	