Abschlussprüfung Berufsoberschule 2021
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Exponentialfunktionen /34

Die Wassermenge in einem Stausee verändert sich, weil Wasser zufließt und abfließt. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt. Die in einem Monat zugelaufene Wassermenge kann durch die Zulauffunktion z mit

$$z(x) = \left(0{,}01x^2 - x + 25\right)e^{0{,}05x}$$

beschrieben werden.
Dabei gibt x die Anzahl der Monate nach Beobachtungsbeginn an und $z(x)$ die in dem Monat x zugelaufene Wassermenge in Tausend Kubikmetern. Betrachtet wird für x das Intervall $[0 \,|\, 60]$.

Geben Sie alle Ergebnisse mit 2 Nachkommastellen an.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion z. /6
Interpretieren Sie die Bedeutung der Nullstelle im Sachzusammenhang.

1.2 Zeigen Sie, dass /3
$z'(x) = \left(0{,}0005x^2 - 0{,}03x + 0{,}25\right)e^{0{,}05x}$ die 1. Ableitung der Funktion z ist.

1.3 Bestimmen Sie, in welchem Monat im betrachteten Intervall die zulaufende Wassermenge maximal wird. /8
Geben Sie an, welche Wassermenge zu diesem Zeitpunkt zufließt.
[Hinweis: Ohne Herleitung dürfen Sie verwenden:.
$z''(x) = \left(0{,}000025x^2 - 0{,}0005x - 0{,}0175\right)e^{0{,}05x}$ *.]*

1.4 Für $10 < x < 50$ nimmt der Zulauf ab. /5
Bestimmen Sie, in welchem Monat der Zulauf am stärksten abnimmt.
[Hinweis: Auf einen Nachweis mit Hilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

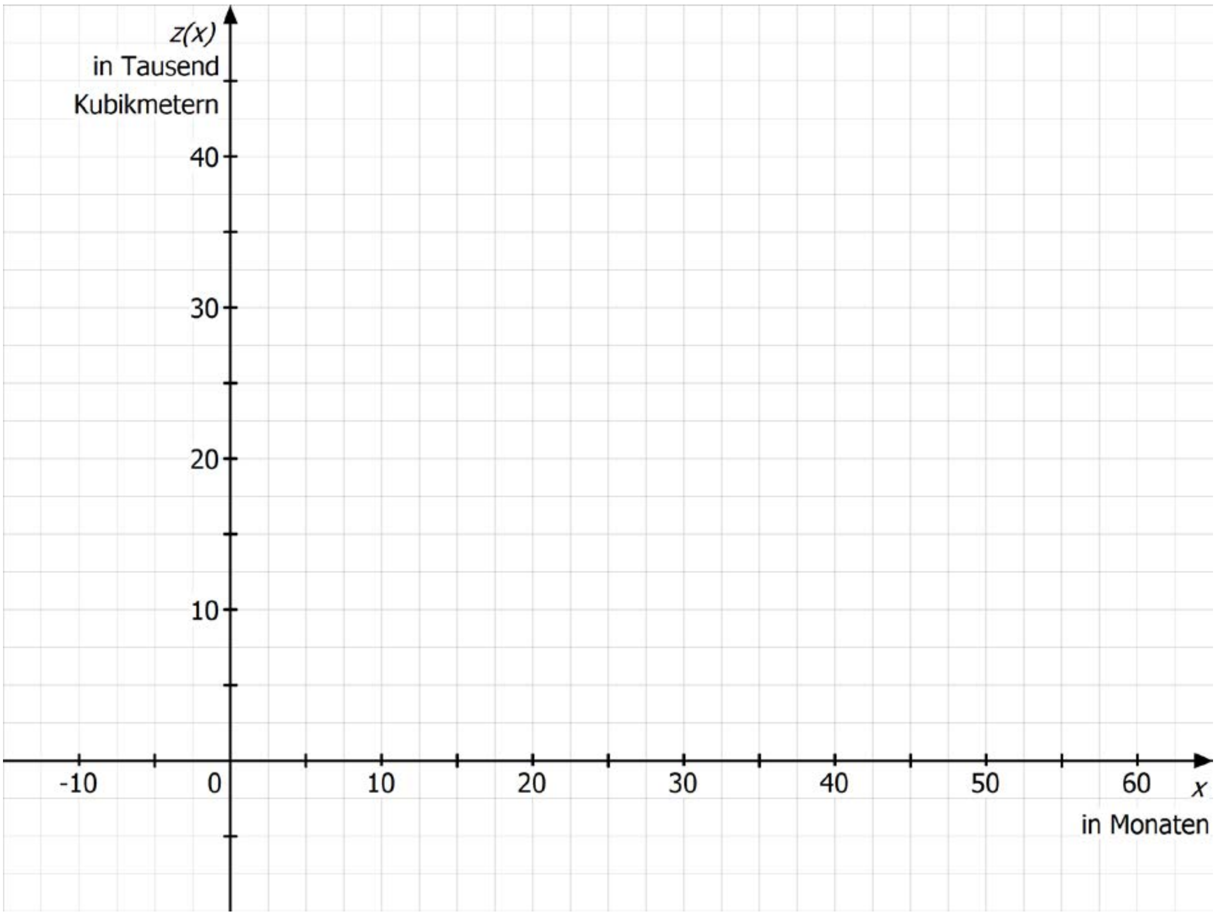
1.5 Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von z im Intervall $[0 \,|\, 60]$ mit Hilfe Ihrer Ergebnisse sowie der nachfolgenden Wertetabelle in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**. /5

x	0	10	20	30	40	50	60
***z*(*x*)**					7,39		20,09

1.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $Z(x) = \left(0{,}2x^2 - 28x + 1060\right)e^{0{,}05x}$ eine mögliche Stammfunktion von $z(x)$ ist. /7
Berechnen Sie die Wassermenge, die innerhalb des ersten Jahres insgesamt in den Stausee fließt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5



2 Gebrochenrationale Funktion /33

Gegeben ist die Funktion *f* durch die Gleichung $f(x) = \frac{x^2 + 8}{2x + 2}$.

Der Graph der Funktion ist G_f.

2.1 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion *f* eine Polstelle besitzt. **/4**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion *f* in der Umgebung der Polstelle.
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von *f* an.

2.2 Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen der Funktion *f* mit den Koordinatenachsen. **/2**

2.3 Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen der Funktion *f* im Unendlichen. **/5**
Bestimmen Sie die Gleichung *a* der Asymptote von G_f .

2.4 Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x - 16}{(2x + 2)^2}$ die Gleichung der ersten Ableitung von *f* ist. **/3**

2.5 Bestimmen Sie rechnerisch die Lage und Art der Extrempunkte der Funktion *f*. **/6**
[Hinweis: Ohne Herleitung dürfen Sie verwenden: $f''(x) = \frac{72}{(2x+2)^3}$ *.]*

2.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

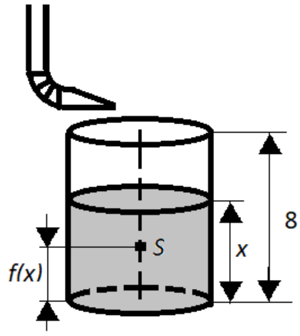
x	-8	-6	-3	-2	1	4	6	8
***f*(*x*)**	-5,1		-4,3		2,3		3,1	

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion *f* im Intervall $-8 \leq x \leq 8$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

Zeichnen Sie auch die Asymptote *a* ein.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Im Folgenden soll nun der Sachzusammenhang betrachtet werden:
Eine Regentonne hat die Form eines geraden Zylinders.
Die Lage des gemeinsamen Schwerpunktes *S* von der Tonne und dem darin befindlichen Regenwasser hängt von der Füllhöhe *x* des Wassers über dem Boden der Tonne ab.
Ist die Regentonne vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe $x = 8$ dm.



Abbildung

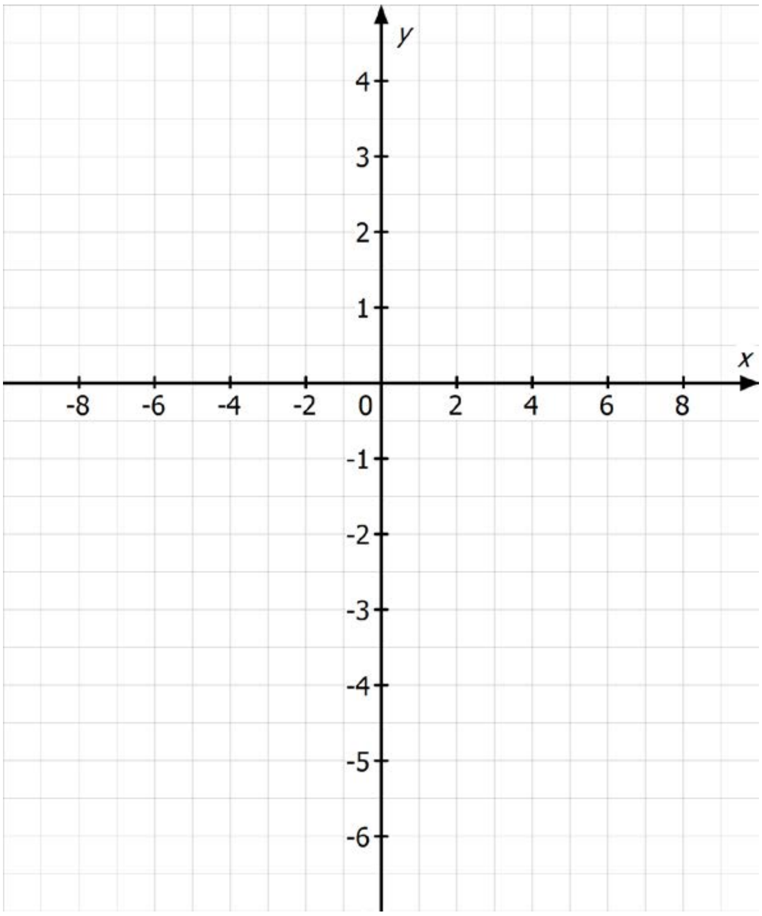
Die bisher betrachtete Funktion *f* gibt für $0 \leq x \leq 8$ die Höhe des Schwerpunktes *S* über dem Boden in Dezimetern an. Dabei ist *x* die Füllhöhe in Dezimetern (siehe Abbildung).

2.7 Vergleichen Sie $f(0)$ und $f(8)$. **/2**
Interpretieren Sie beide Ergebnisse im Sachzusammenhang.

2.8 Die anfänglich leere Regentonne füllt sich langsam mit Regenwasser, bis die maximale Füllhöhe von 8 dm erreicht ist. **/2**
Beschreiben Sie mithilfe Ihres Graphen G_f die Bewegung des Schwerpunktes *S* während des Füllvorgangs.
Erläutern Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Punktes $P(2|2)$.

2.9 Ermitteln Sie rechnerisch den Bereich der Füllhöhe *x*, bei der der Schwerpunkt *S* höchstens 2,4 dm hoch ist. **/3**

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.6



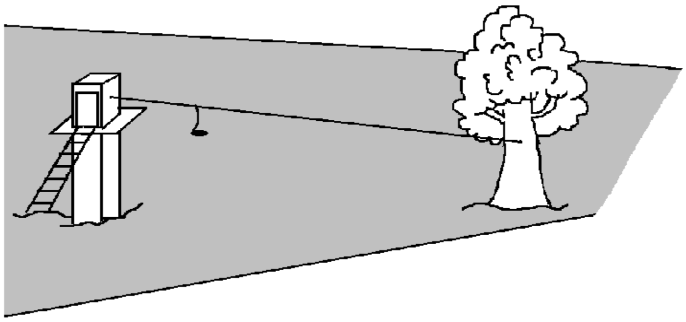
3 Analytische Geometrie /33

Für ein Kinderfest wird auf einem Hang ein Bereich zwischen drei Punkten abgesteckt. In einem Koordinatensystem haben diese Punkte die Koordinaten $A(0\,|\,0\,|\,2{,}7)$, $B(60\,|\,70\,|\,4{,}2)$ und $C(-30\,|\,90\,|\,4{,}7)$. Die Punkte *A*, *B* und *C* liegen in der Ebene *E*.
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.

3.1 Stellen Sie für die Ebene *E* sowohl eine Gleichung in Parameterform als auch eine Gleichung in Koordinatenform auf. **/6**
[*Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist E:* $5x - 165y + 7500z = 20250$]

3.2 Untersuchen Sie, ob das Dreieck *ABC* annähernd gleichschenklig ist. **/5**

Auf dem Hang wird eine Seilrutsche für Kinder aufgebaut (siehe Abbildung). Das dafür benötigte Stahlseil wird zwischen einem Kletterturm und einem Baum in den Punkten $P_K(42\,|\,74\,|\,7{,}4)$ und $P_B(12\,|\,64\,|\,5{,}2)$ befestigt.
[Hinweis: Das gespannte Seil kann als Gerade betrachtet werden.]



Abbildung

3.3 Untersuchen Sie rechnerisch, ob das Stahlseil parallel zur Ebene *E* verläuft. **/8**

Ermitteln Sie den Winkel α, den das Stahlseil gegenüber der *x*-*y*-Ebene besitzt.

Geben Sie auch das daraus resultierende Gefälle des Stahlseiles gegenüber der *x*-*y*-Ebene in Prozent an.

3.4 Um einen Aufprall an dem Baum zu verhindern, befindet sich am Stahlseil eine Abbremsvorrichtung im Punkt $S(18\,|\,66\,|\,5{,}64)$. **/4**

Berechnen Sie den Abstand des Punktes *S* zur Ebene *E*.

Der Veranstalter des Kinderfestes plant, im Punkt $M(27\,|\,69\,|\,4{,}0)$ einen 8 m hohen Mast mit seinem Logo aufzustellen. Der Mast soll senkrecht zur *x*-*y*-Ebene stehen.

3.5 Untersuchen Sie, ob sich der Mast und die Seilrutsche berühren würden. **/5**

3.6 Zeigen Sie, dass der Punkt *M* nicht in der Ebene *E* liegt. **/5**

Untersuchen Sie, ob der Punkt *M* unterhalb oder oberhalb der Ebene *E* liegt.

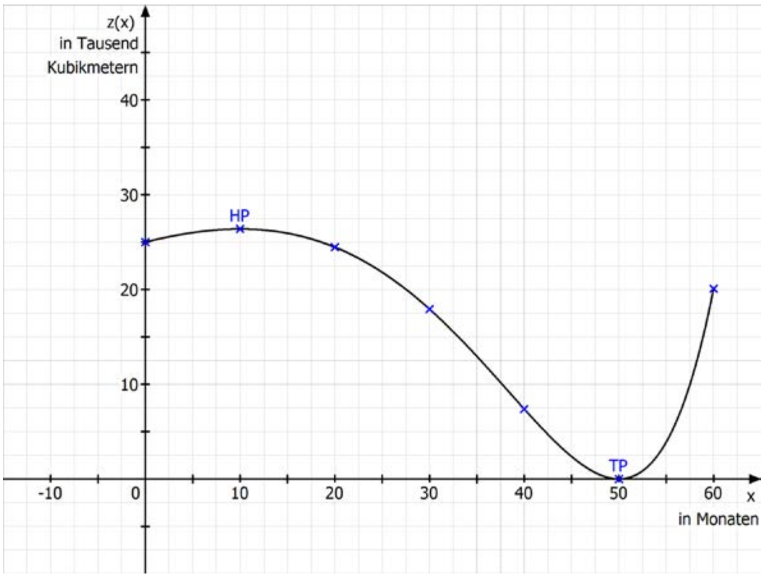
Abschlussprüfung Berufsoberschule 2021
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.1	$z(x)=0$ $(0{,}01x^2-x+25)\underbrace{e^{0{,}05x}}_{\text{wird nie Null}}=0$ $0{,}01x^2-x+25=0$ $x^2-100x+2500=0$ $x=50$ Im 50. Monat nach Beginn der Beobachtung läuft kein Wasser im Stausee hinzu.	4		2
1.2	$z'(x)=\left(0{,}02x-1\right)e^{0{,}05}+0{,}05\left(0{,}01x^2-x+25\right)e^{0{,}05x}$ $=\left(0{,}0005x^2-0{,}03x+0{,}25\right)e^{0{,}05x}$		3	
1.3	$z'(x)=0$ $0=\left(0{,}0005x^2-0{,}03x+0{,}25\right)\underbrace{e^{0{,}05x}}_{\text{wird nie Null}}$ $0=0{,}0005x^2-0{,}03x+0{,}25$ $0=x^2-60x+500$ $x_{1/2}=30\pm\sqrt{900-500}$ $x_1=10$ $x_2=50$ $z''(10)<0\Rightarrow$ Maximum $z''(50)>0\Rightarrow$ Minimum $z(10)\approx 26{,}38$ Im 10. Monat läuft die maximale Wassermenge von etwa 26.380 Kubikmetern Wasser hinzu.	4	4	
1.4	$z''(x)=0$ $0=(0{,}000025x^2-0{,}0005x-0{,}0175)\underbrace{e^{0{,}05x}}_{\text{wird nie Null}}$ $0=0{,}000025x^2-0{,}0005x-0{,}0175$ $0=x^2-20x-700$ $x_{1/2}=10\pm\sqrt{100+700}$ $x_1\approx 38{,}28$ $x_2\approx -18{,}28$ entfällt Der Zulauf nimmt nach Ablauf des 38. Monat, d.h. im 39. Monat, am stärksten ab.		5	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.5</td><td>

x	0	10	20	30	40	50	60
$z(x)$	**25**	**26,38**	**24,46**	**17,93**	7,39	**0**	20,09



</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>

$Z'(x) = \left(0{,}2x^2 - 28x + 1060\right)e^{0{,}05x}$

$= (0{,}4x - 28)e^{0{,}05x} + 0{,}05\left(0{,}2x^2 - 28x + 1060\right)e^{0{,}05x}$

$= \left(0{,}01x^2 - x + 25\right)e^{0{,}05x}$

$= z(x)$

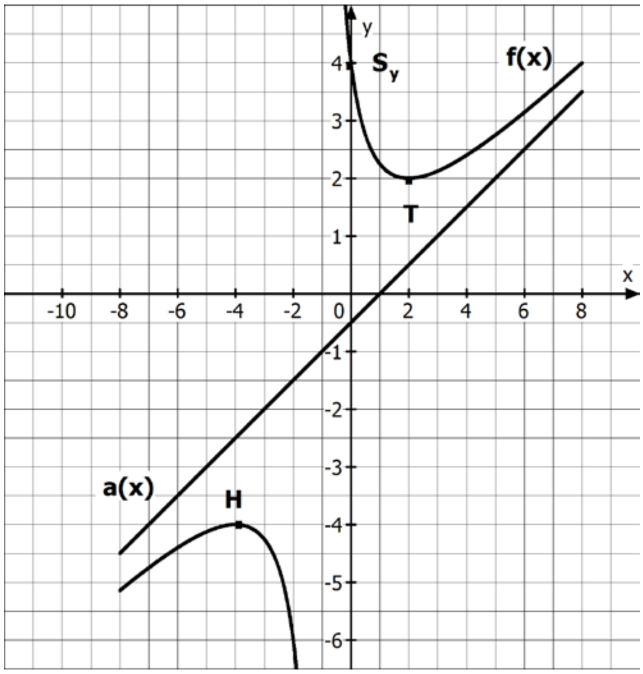
$Z(0) = 1060$

$Z(12) = 1371{,}69$

$\int_0^{12} z(x)dx = Z(12) - Z(0) = 311{,}69$

Es fließen im ersten Jahr 311.690 Kubikmeter Wasser hinzu.
</td><td></td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>10</td><td>18</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">34</td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.1	Polstelle: $N(x)=0$ und $Z(x)\neq 0$ $N(x)=0 \;\Leftrightarrow\; 2x+2=0 \;\Leftrightarrow\; x=-1$ $Z(-1)=9\neq 0 \;\Rightarrow$ es gibt eine Polstelle. Verhalten an der Polstelle $x=-1$ (Testeinsetzungen): VZW von - nach + $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	1 2 1		
2.2	Schnittpunkt mit *x*-Achse: $f(x_0)=0 \Rightarrow 0=x_0^{\,2}+8 \Rightarrow$ nicht lösbar $\Rightarrow S_x$ existiert nicht Schnittpunkt mit *y*-Achse: $f(0)=4 \Rightarrow S_y(0\|4)$	1 1		
2.3	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ Polynomdivision: $(x^2+8):(2x+2)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{9}{2x+2}$ $\underline{x^2+x}$ $-x+8$ $\underline{-x-1}$ 9 $\Rightarrow \quad a(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$	2	3	
2.4	$f'(x)=\frac{2x\cdot(2x+2)-2\cdot(x^2+8)}{(2x+2)^2}=\frac{4x^2+4x-2x^2-16}{(2x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-16}{(2x+2)^2}$		3	
2.5	$f'(x_E)=0 \Rightarrow 2x^2+4x-16=0 \Rightarrow x^2+2x-8=0$ $\Rightarrow x_1=2$ und $f''(2)>0 \Rightarrow T(2\|2)$ $\Rightarrow x_2=-4$ und $f''(-4)<0 \Rightarrow H(-4\|-4)$		6	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.6</td><td>Ergänzung der Wertetabelle:
<table>
<tr><td>x</td><td>-8</td><td>-6</td><td>-3</td><td>-2</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>-5,1</td><td>-4,4</td><td>-4,3</td><td>-6,0</td><td>2,3</td><td>2,4</td><td>3,1</td><td>4,0</td></tr>
</table>


</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.7</td><td>$f(0)=f(8)=4$
Der Schwerpunkt S befindet sich sowohl bei dem leeren als auch bei dem vollständig gefüllten Gefäß in derselben Höhe von 4 dm.
[Auch Alternativaussagen sind möglich.]</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.8</td><td>Bis zu einer Füllhöhe von 2 dm sinkt der Schwerpunkt S in Richtung Gefäßboden, danach steigt er wieder an.
Bei einer Füllhöhe von 2 dm liegt der Schwerpunkt S genau auf der Wasseroberfläche.
[Auch Alternativaussagen sind möglich.]</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.9</td><td>$2{,}4 = f(x) \quad \Rightarrow 2{,}4 = \dfrac{x^2+8}{2x+2}$
$\Rightarrow \quad 4{,}8x + 4{,}8 = x^2 + 8$
$\Leftrightarrow \; x^2 - 4{,}8x + 3{,}2 = 0$
$\Rightarrow x_1 = 4$ und $x_2 = 0{,}8$
Bei einer Füllhöhe von mindestens 0,8 dm bis maximal 4,0 dm liegt der Schwerpunkt S höchstens 2,4 dm über dem Gefäßboden.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>10</td><td>16</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -165 \\ 7500 \end{pmatrix}$, somit gilt: $E\colon 5x - 165y + 7500z = d$ Einsetzen der Koordinaten liefert: $d = 20250$. $E\colon 5x - 165y + 7500z = 20250$	2	4	
3.2	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -30 \\ 90 \\ 2{,}0 \end{pmatrix}$ (aus 3.1) und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -90 \\ 20 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{8502{,}25} \approx 92{,}2$ LE, entspricht $92{,}2$ m $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{9004} \approx 94{,}9$ LE, entspricht $94{,}9$ m $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{8500{,}25} \approx 92{,}2$ LE, entspricht $92{,}2$ m Das Dreieck *ABC* ist nahezu gleichschenklig.	1 3 1		
3.3	Parallelitätsbedingung: $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{P_K P_B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -165 \\ 7500 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ -2{,}2 \end{pmatrix} = -15000 \neq 0$ Das Stahlseil verläuft <u>nicht</u> parallel zur Ebene *E*. Bestimmung des Winkels zwischen Stahlseil und *x*-*y*-Ebene: $\sin\alpha = \frac{\lvert\overrightarrow{P_K P_B} \circ \overrightarrow{n_{xy}}\rvert}{\lvert\overrightarrow{P_K P_B}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n_{xy}}\rvert} = \frac{2{,}2}{31{,}7 \cdot 1} = 0{,}0694 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 4°$ Bestimmung des Gefälles des Stahlseiles: $\tan\alpha \approx 0{,}0699 \quad \Rightarrow \quad 7\,\%$		3 4	1
3.4	Abstand des Punktes $S(18 \mid 66 \mid 5{,}64)$ zur Ebene *E*: $d = \left\lvert \frac{20250 - (5 \cdot 18 - 165 \cdot 66 + 7500 \cdot 5{,}64)}{7502} \right\rvert = \frac{11250}{7502} \approx 1{,}5$ LE $d \approx 1{,}5$ LE, entspricht $1{,}5$ m Der Abstand von Punkt *S* zur Ebene *E* beträgt 1,5 m.		4	

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.5	Aufstellen der Geradengleichung für die Seilrutsche und den Mast: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}42\\74\\7{,}4\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-30\\-10\\-2{,}2\end{pmatrix} \qquad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}27\\69\\4{,}0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Die Untersuchung der Lagebeziehung zwischen *g* und *h* ergibt eine eindeutige Lösung mit $u = 0{,}5$ und $v = 2{,}3$. Der Mast würde die Seilrutsche berühren, da $0 \le u \le 1$ und $0 \le v \le 8$ gilt.	2	2	1
3.6	Punkt *M* in *E* einsetzen: $E\colon 5 \cdot 27 - 165 \cdot 69 + 7500 \cdot 4{,}0 = 18750 \neq 20250$ *M* liegt nicht in *E*. *M** mit $M^*(27 \mid 69 \mid z)$ sei ein Punkt der Ebene *E*: $E\colon 5 \cdot 27 - 165 \cdot 69 + 7500 \cdot z = 20250 \quad \Rightarrow \quad z = 4{,}2$ Da die *z*-Koordinate von *M** größer ist als die *z*-Koordinate von *M*, liegt *M* unterhalb der Ebene *E*.	1		4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**10**	**17**	**6**
	Summe der BE	**33**		