Abschlussprüfung Berufsoberschule 2020
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Exponentialfunktionen /34

Für eine Tanne wurde aufgezeichnet, wie groß ihre Höhe im Laufe der Jahre wurde.
Dieser Zusammenhang kann beschrieben werden mit der Funktion

$$h(t) = 31 - (3t + 30) \cdot e^{-0,1t} .$$

(Dabei ist *t* der Zeitpunkt in Jahren und *h(t)* die Höhe in Metern zum Zeitpunkt *t.*)

1.1 Ermitteln Sie, wie groß die Tanne zu Beginn der Aufzeichnung ($t = 0$) war. **/2**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten von $h(t)$ für $t \to +\infty$.
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **/4**

1.3 Gegeben ist die Funktion $f(t) = 0,3te^{-0,1t}$.
Weisen Sie nach, dass *f* die erste Ableitung von *h* ist. **/4**

Die Funktion *f* beschreibt die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Tanne in Abhängigkeit von der Zeit.
(*t*: Zeit in Jahren; *f*(*t*): momentane Wachstumsgeschwindigkeit in Meter/Jahr)

1.4 Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit für $t = 2$ und $t = 30$ an. **/3**

1.5 Die erste Ableitung der Funktion *f* lautet: $f'(t) = (0,3 - 0,03t) \cdot e^{-0,1t}$. **/6**
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Wachstumsgeschwindigkeit der Tanne maximal ist.
Geben Sie die maximale Wachstumsgeschwindigkeit an.
[Hinweis: Ohne Herleitung dürfen Sie verwenden: $f''(t) = (-0,06 + 0,003t) \cdot e^{-0,1t}$.]

1.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle auf der **nachfolgenden Seite**. **/6**
Zeichen Sie den Graphen von *f* im Intervall $[0; 40]$ mit Hilfe der bisher ermittelten Werte und der Wertetabelle.

Die Beschreibung der Wachstumsgeschwindigkeit durch die Funktion *f* ist nur im Bereich $0 \le t \le 30$ zutreffend. Ab $t = 30$ wird die Wachstumsgeschwindigkeit durch die Tangente *g* an den Graphen von *f* im Punkt $T(30|f(30))$ beschrieben.

1.7 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente *g*. **/4**
[Zur Kontrolle: $g(t) = -0,03t + 1,35$]

1.8 Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem das Wachstum der Tanne zum Stillstand kommt. **/3**

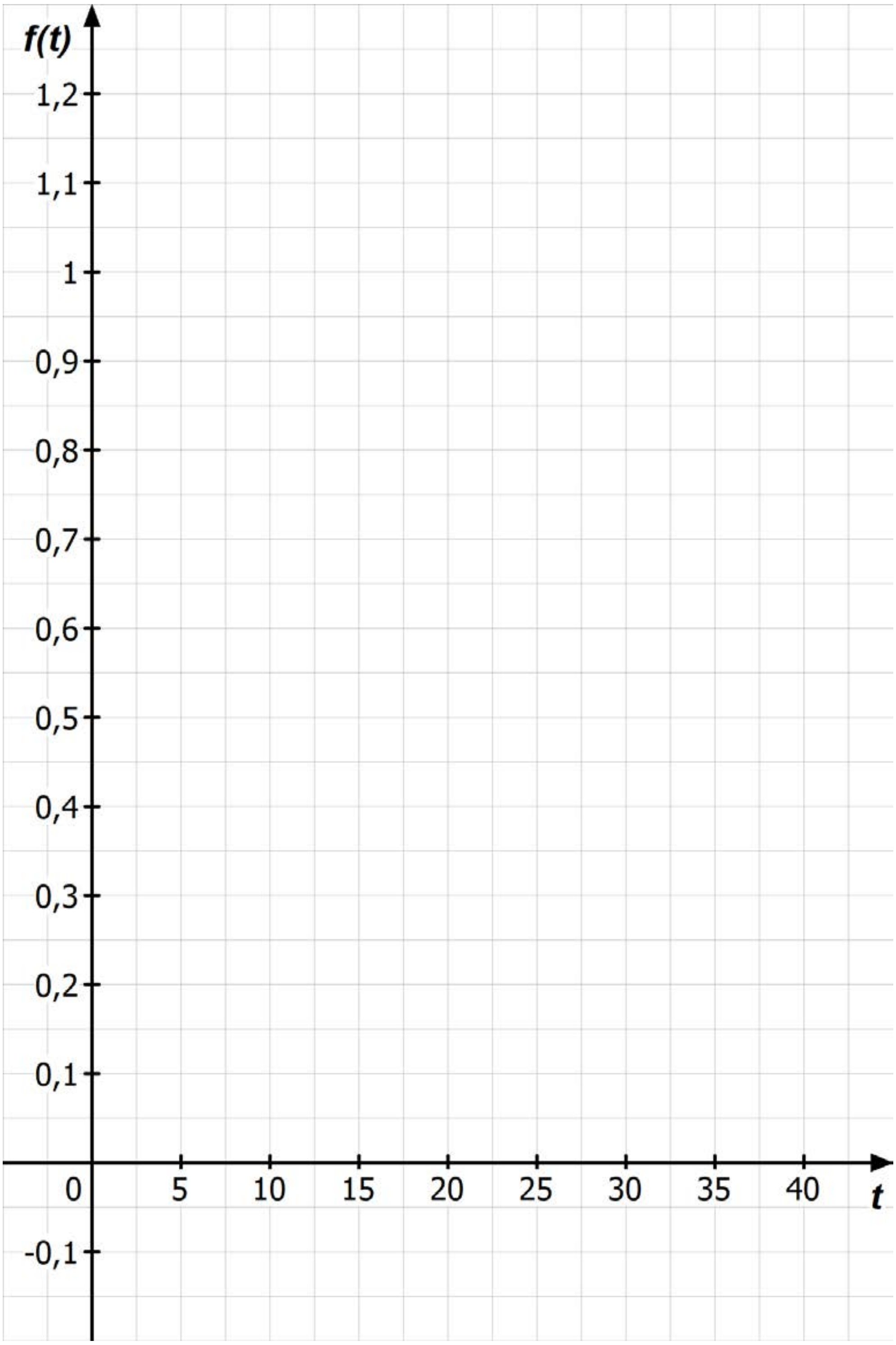
1.9 Für $t \ge 30$ verläuft die Tangente *g* unterhalb des Graphen von *f*. **/2**
Erläutern Sie, welche Schlussfolgerungen man daraus für die Höhe der Tanne ziehen kann.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Wertetabelle zu 1.6:

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
***f*(*t*)**		0,91		1,00	0,81		0,45	0,32	

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.6:



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion *f* durch die Gleichung $f(x) = \frac{x^4 + 14x^2 - 51}{6x^2 - 24}$.

Der Graph der Funktion ist G_f.

2.1 Zeigen Sie, dass der Graph achsensymmetrisch ist. **/2**

2.2 Zeigen Sie, dass die Schnittpunkte des Graphen von *f* mit der *x*-Achse die Koordinaten $\left(\sqrt{3}\middle|0\right)$ und $\left(-\sqrt{3}\middle|0\right)$ haben. **/2**

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der *y*-Achse an.

2.3 Zeigen Sie, dass die Funktion *f* zwei Polstellen besitzt. **/5**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion *f* in der Umgebung der Polstellen.
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von *f* an.

2.4 Zeigen Sie, dass gilt: $f'(x) = \frac{12x^5 - 96x^3 - 60x}{(6x^2 - 24)^2}$.

Berechnen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f. **/11**

[*Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden:* $f''(x) = \frac{x^6 - 12x^4 + 111x^2 + 20}{3\left(x^2 - 4\right)^3}$]

2.5 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/2**

x	0	1	1,75	2,25	2,5	4	5	6
$f(x)$			-0,22	7,14				9,11

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion *f* im Intervall $-6 \le x \le 6$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**. **/4**

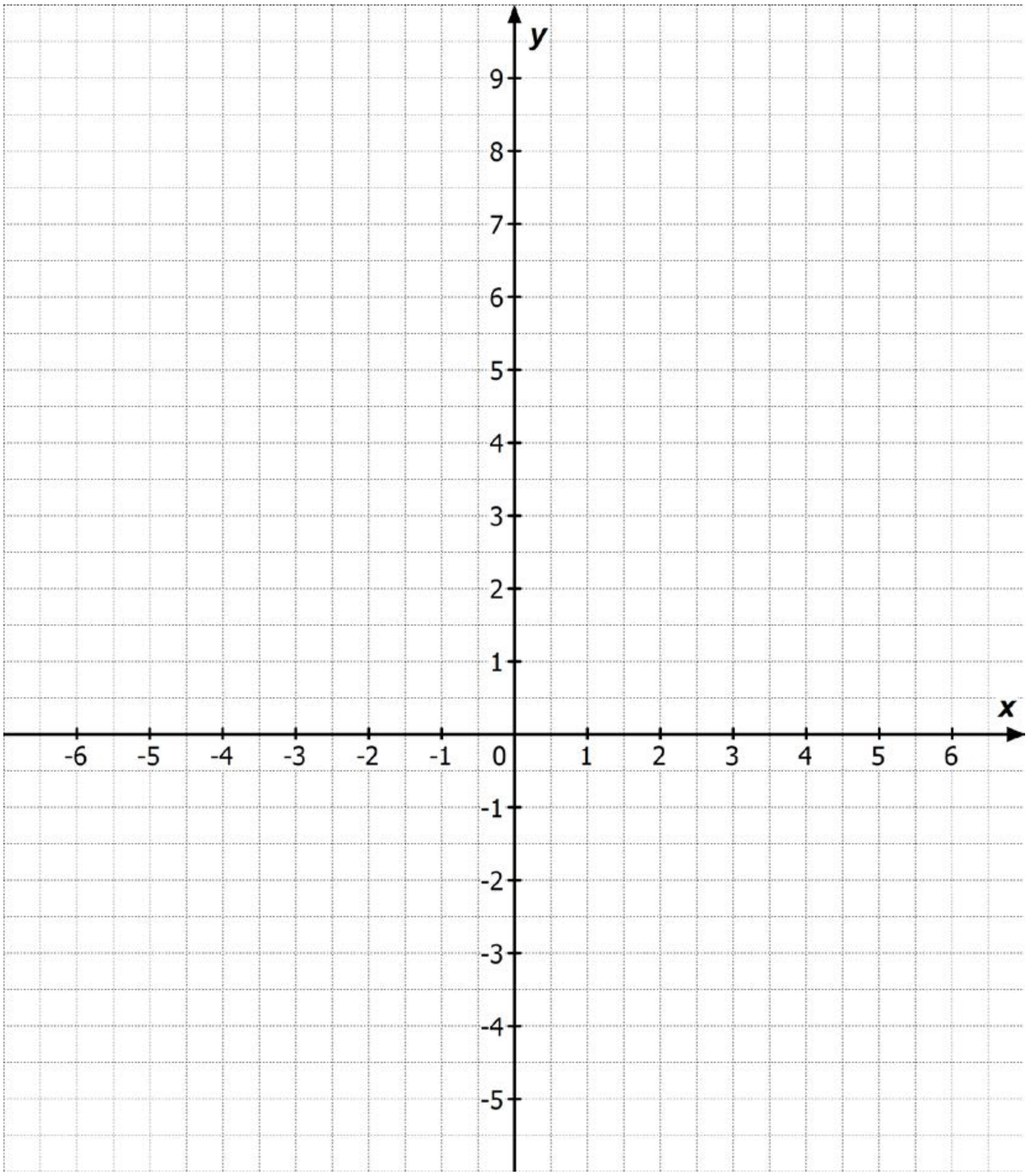
Der Graph von *f* und die Gerade $y = -5$ schließen eine Fläche ein.

2.6 Markieren Sie die gesuchte Fläche im Koordinatensystem. **/4**
Schätzen Sie, wie groß der Flächeninhalt dieser Fläche höchstens sein kann (in FE).
Erläutern Sie Ihr Vorgehen für diese Schätzung.

2.7 Der Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche soll exakt berechnet werden.
Benennen Sie die notwendigen Schritte, die zur Berechnung des exakten Flächeninhaltes notwendig sind. **/3**
[*Hinweis: Sie sollen die Berechnungen nicht ausführen.*]

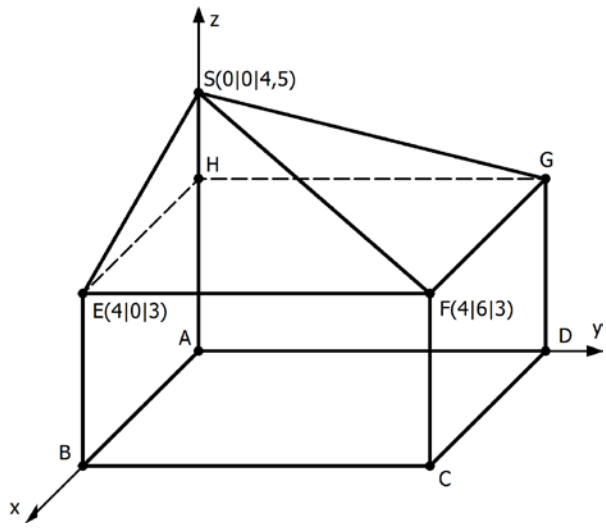
Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.5 und 2.6:



3 Analytische Geometrie /33

Die Abbildung zeigt ein Gebäude, das aus einem quaderförmigen Raum mit einem aufgesetzten Dach besteht.
Die Seitenflächen des Quaders liegen parallel zu den Koordinatenebenen. Der Punkt *A* ist der Koordinatenursprung. Die beiden dreieckigen Dachflächen berühren sich entlang der Geraden $\overline{SF}$, der Punkt *S* liegt auf der *z*-Achse.
Gegeben sind die Punkte $E(4 \mid 0 \mid 3)$, $F(4 \mid 6 \mid 3)$ und $S(0 \mid 0 \mid 4{,}5)$.
Es gilt: 1 LE = 1 m.
Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.



3.1 Geben Sie die Koordinaten der Punkte *C* und *G* an. /2

3.2 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene W_1, in der sich die Dachfläche *EFS* befindet, in Parameter- und in Koordinatenform. /7

[Mögliches Ergebnis für W_1: $9x + 24z = 108$]

Die zweite Dachfläche W_2 kann durch die Gleichung W_2: $6y + 24z = 108$ beschrieben werden.
Weisen Sie nach, dass der Punkt *F* in dieser Ebene liegt.

3.3 Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den beiden Dachflächen *EFS* und *FGS.* /5

3.4 Untersuchen Sie, welche der beiden Dachflächen *EFS* und *FGS* den größeren Flächeninhalt hat. /5

3.5 Ermitteln Sie das Gesamtvolumen des Gebäudes. /3

3.6 Im Punkt $K(1 \mid 5 \mid 0)$ wird ein Schornstein errichtet, der senkrecht nach oben verläuft und 1,5 m über die Dachfläche *FGS* herausragen soll. /4

Ermitteln Sie, wie lang der Schornstein sein muss.

[Hinweis: Der Schornstein kann als Gerade betrachtet werden.]

Eine Drohne fliegt geradlinig vom Punkt $P(10 \mid 2 \mid 9{,}3)$ zum Punkt $Q(-3 \mid 8 \mid z)$.

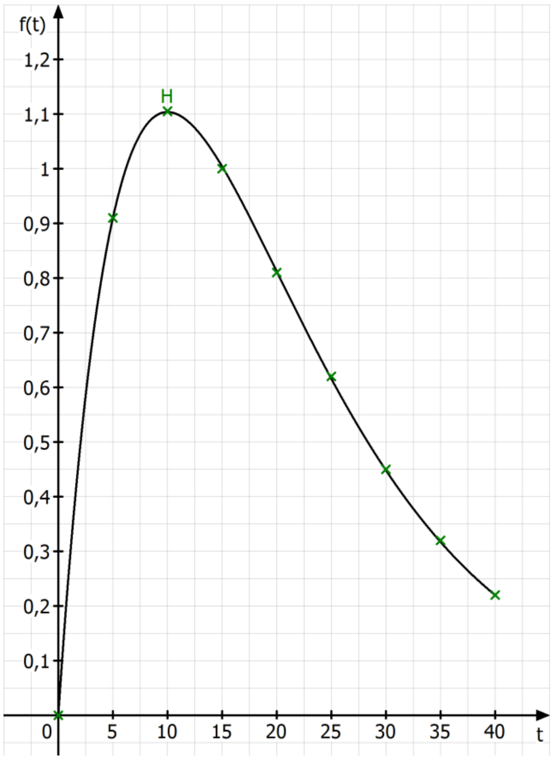
3.7 Die Flugbahn der Drohne soll parallel zur Dachfläche *FGS* verlaufen. /4
Bestimmen Sie für diesen Fall die *z*-Koordinate des Punktes *Q*.

3.8 Zu einem bestimmten Zeitpunkt befindet sich die Drohne im Punkt $R(2{,}2|5{,}6|8{,}4)$. /3
Berechnen Sie den Abstand der Drohne zur Dachfläche *FGS* zu diesem Zeitpunkt.

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2020
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.1	$h(0)=1$ Die Tanne war zu Beginn der Aufzeichnung 1 Meter hoch.	2		
1.2	$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=31$ Die Tanne wächst bis zu einer Höhe von 31 Metern. Probeeinsetzung ist ebenfalls möglich.			4
1.3	$h'(t)=-\left(3e^{-0,1t}+(3t+30)\cdot(-0,1)e^{-0,1t}\right)$ $h'(t)=-3e^{-0,1t}+0,3te^{-0,1t}+3e^{-0,1t}$ $h'(t)=0,3te^{-0,1t}=f(t)$		4	
1.4	$f(2)\approx 0,49$ $f(30)\approx 0,45$ Die Tanne wächst im 2. Jahr um 0,49 Meter pro Jahr und im 30. Jahr um 0,45 Meter pro Jahr.	3		
1.5	$f'(t)=0$ $0=(0,3-0,03t)\cdot\underbrace{e^{-0,1t}}_{\text{wird nicht Null}}$ $0=0,3-0,03t$ $t_E=10$ $f''(10)=-0,01<0\Rightarrow$ HP $H(10\mid 1,10)$ Im 10. Jahr ist die Wachstumsgeschwindigkeit der Tanne maximal mit einem Wert von 1,10 Metern pro Jahr.		6	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.6</td><td>
<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td><td>35</td><td>40</td></tr>
<tr><td>f(t)</td><td>0</td><td>0,91</td><td>1,10</td><td>1,00</td><td>0,81</td><td>0,62</td><td>0,45</td><td>0,32</td><td>0,22</td></tr>
</table>


</td><td>2

4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>$T(30|0,45)$
$f'(30)=(0,3-0,9)e^{-3}\approx -0,03$
$0,45=-0,03\cdot 30+n$
$n=1,35$
$g(t)=-0,03t+1,35$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.8</td><td>$g(t)=0$
$0=-0,03t+1,35$
$t=45$
Das Wachstum kommt nach 45 Jahren zum Stillstand.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>1.9</td><td>Da die Tangente unterhalb des Graphen für die Wachstumsgeschwindigkeit liegt, ist die Wachstumsgeschwindigkeit geringer. Die Tanne erreicht also eine Höhe, die geringer ist als 31 m.</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>11</td><td>14</td><td>9</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">34</td></tr>
</table>

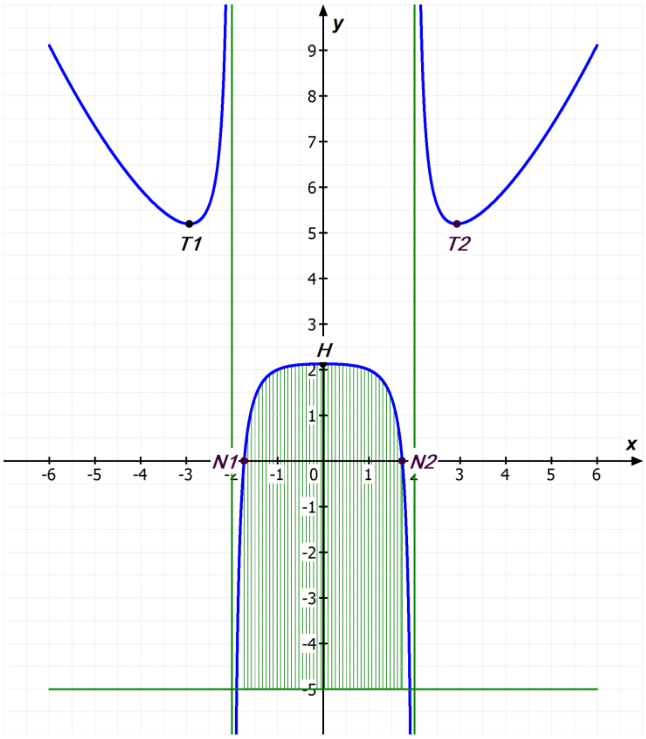
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ Der Graph von f ist achsensymmetrisch.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Schnittpunkt mit y-Achse:
$f(0) = \frac{-51}{-24} = \frac{17}{8} \approx 2{,}13 \quad \Rightarrow \quad S_y\left(0 \middle| 2{,}13\right)$
Schnittpunkte mit x-Achse:
$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{\left(\pm\sqrt{3}\right)^4 + 14\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 - 51}{6\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 - 24} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{x1}\left(+\sqrt{3} \middle| 0\right) \text{ , } S_{x2}\left(-\sqrt{3} \middle| 0\right)$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>Polstelle: $N(x) = 0$ und $Z(x) \neq 0$
$N(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2$
$Z(\pm 2) = 21 \neq 0 \quad \Rightarrow$ es gibt zwei Polstellen.
Verhalten an der Polstelle $x_1 = +2$ (Testeinsetzungen): VZW von – nach +
Verhalten an der Polstelle $x_2 = -2$ (Symmetrie): VZW von + nach -

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;+2\}$</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>Ableitung:
$f(x) = \frac{x^4 + 14x^2 - 51}{6x^2 - 24}$
$f'(x) = \frac{(4x^3 + 28x) \cdot (6x^2 - 24) - (x^4 + 14x^2 - 51) \cdot 12x}{(6x^2 - 24)^2}$
$f'(x) = \frac{12x^5 - 96x^3 - 60x}{(6x^2 - 24)^2}$
Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f'(x) = \frac{12x^5 - 96x^3 - 60x}{(6x^2 - 24)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12x^5 - 96x^3 - 60x = 0$
$12x \cdot (x^4 - 8x^2 - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{E1} = 0$
Substitution: $z^2 - 8z - 5 = 0$
$z_1 \approx 8{,}58 \quad \Rightarrow \quad x_{E2/3} \approx \pm 2{,}93$
$z_2 \approx -0{,}58$ entfällt
Nachweis, Art und Lage der Extrempunkte:
$f''(0) < 0 \quad \Rightarrow$ Hochpunkt $H(0 \mid 2{,}13)$
$f''(\pm 2{,}93) > 0$ und $f(\pm 2{,}93) = 5{,}19$
$\Rightarrow$ Tiefpunkte $T_1(-2{,}93 \mid 5{,}19)$ und $T_2(+2{,}93 \mid 5{,}19)$</td><td></td><td>3

8</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.5</td><td>

x	0	1	1,75	2,25	2,5	4	5	6
$f(x)$	**2,13**	**2,00**	-0,22	7,14	**5,60**	**5,96**	**7,33**	9,11



</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>Markieren der Fläche (siehe 2.5)

Die Fläche kann in ein Rechteck einbeschrieben werden.
Das Rechteck kann etwas weniger als 4 LE breit sein.
Das Rechteck muss 5+ $f(0)$ = 7,25 LE hoch sein.
Die Fläche hat also einen Flächeninhalt, der sicher kleiner als 29 FE ist.

Alternative Wege wie z.B. das Zählen der Kästchen sind auch zugelassen.</td><td></td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2.7</td><td>Schrittfolge:
- Ermitteln der Integrationsgrenzen x_{S1} und x_{S2} (Schnittstellen der Gerade $y=-5$ und der Funktion f)
- Aufstellen der Differenzfunktion k mit $k(x)=f(x)-(-5)$
- Ermitteln einer Stammfunktion K
- Berechnen des bestimmten Integrals $\int_{x_{S1}}^{x_{S2}} k(x)dx = K(x_{S2})-K(x_{S1})$

Nach der Ermittlung der Integrationsgrenzen gibt es mehrere mögliche Lösungswege, z.B. Berücksichtigen der Rechtecksfläche statt Aufstellen der Differenzfunktion</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>11</td><td>16</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	$C(4 \mid 6 \mid 0)$, $G(0 \mid 6 \mid 3)$	2		
3.2	$W_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\overrightarrow{n_{W_1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$, somit gilt: $W_1\colon 9x + 24z = d$ Einsetzen der Koordinaten liefert: $d = 108$. $W_1\colon 9x + 24z = 108$ Einsetzen der Koordinaten von F in $W_2\colon 6y + 24z = 108$ ergibt eine wahre Aussage.	2 1	4	
3.3	Bestimmung des Winkels zwischen den Dachflächen: Der Winkel zwischen den Ebenen W_1 und W_2 ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_{W_1}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_{W_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$. $cos\,\tilde{\alpha} = \frac{\lvert \overrightarrow{n_{W_1}} \circ \overrightarrow{n_{W_2}} \rvert}{\lvert \overrightarrow{n_{W_1}} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{n_{W_2}} \rvert} = \frac{576}{3\sqrt{73} \cdot 6\sqrt{17}} = 0{,}9084 \Rightarrow \quad \tilde{\alpha} \approx 24{,}7°$ Wegen des stumpfen Winkels gilt: $\alpha \approx 155{,}3°$ Die Dachflächen schließen einen Winkel von 155,3° ein. <u>Hinweis:</u> Auch die Angabe von 155° ist korrekt.		5	
3.4	Dachflächenberechnung: $A_{EFS} = \frac{1}{2}\lvert \overrightarrow{n_{W_1}} \rvert = \frac{3}{2}\sqrt{73} \approx 12{,}82\,FE, entspricht\ 12{,}83\,m^2$ $A_{FGS} = \frac{1}{2}\lvert \overrightarrow{n_{W_2}} \rvert = \frac{6}{2}\sqrt{17} \approx 12{,}37\,FE, entspricht\ 12{,}37\,m^2$ Die Dachfläche *EFS* ist größer.		5	
3.5	Volumenberechnung: $V_{gesamt} = V_{Quader} + V_{Pyramide} = 4 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1{,}5$ $V_{gesamt} = 72VE + 12VE = 84VE \mathrel{\hat{=}} 84\,m^3$	3		

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.6	Aufstellen der Geradengleichung für den Schornstein: $k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Berechnung des Durchstoßpunktes mit W_2: $6\cdot 5 + 24\cdot u = 108 \Rightarrow u = 3{,}25$ $L(1 \mid 5 \mid 3{,}25)$ Die Länge des Schornsteins ergibt sich durch 3,25 m+1,5 m =4,75 m		4	
3.7	Flugrichtung der Drohne: $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}-13\\6\\z-9{,}3\end{pmatrix}$ Parallelitätsbedingung: $\begin{pmatrix}-13\\6\\z-9{,}3\end{pmatrix} \circ \overrightarrow{n_{W_2}} = \begin{pmatrix}-13\\6\\z-9{,}3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\6\\24\end{pmatrix} = 0$ $36 + 24(z-9{,}3) = 0 \Rightarrow z = 7{,}8$			1 3
3.8	Abstand zwischen Punkt R und der Dachfläche FGS entspricht Abstand von R zu W_2: $\mathrm{d} = \left\lvert \frac{108-(6\cdot 5{,}6 + 24\cdot 8{,}4)}{6\sqrt{17}} \right\rvert = \frac{127{,}2}{6\sqrt{17}} = 5{,}1LE \mathrel{\hat{=}} 5{,}1\mathrm{m}$		3	
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	**8**	**21**	**4**
	Summe der BE		**33**	