Abschlussprüfung Berufsoberschule 2020
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Exponentialfunktionen **/34**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2e^{-0,5x} - 2e^{-3x}$.

1.1 Zeigen Sie, dass **/6**
$f'(x) = -e^{-0,5x} + 6e^{-3x}$ die 1. Ableitung der Funktion f ist und
$f''(x) = 0,5e^{-0,5x} - 18e^{-3x}$ die 2. Ableitung der Funktion f ist.

1.2 Der Graph von f hat einen Extrempunkt. **/6**
Ermitteln Sie Lage und Art dieses Extrempunkts.
[Zur Kontrolle: H (0,72|1,16)]

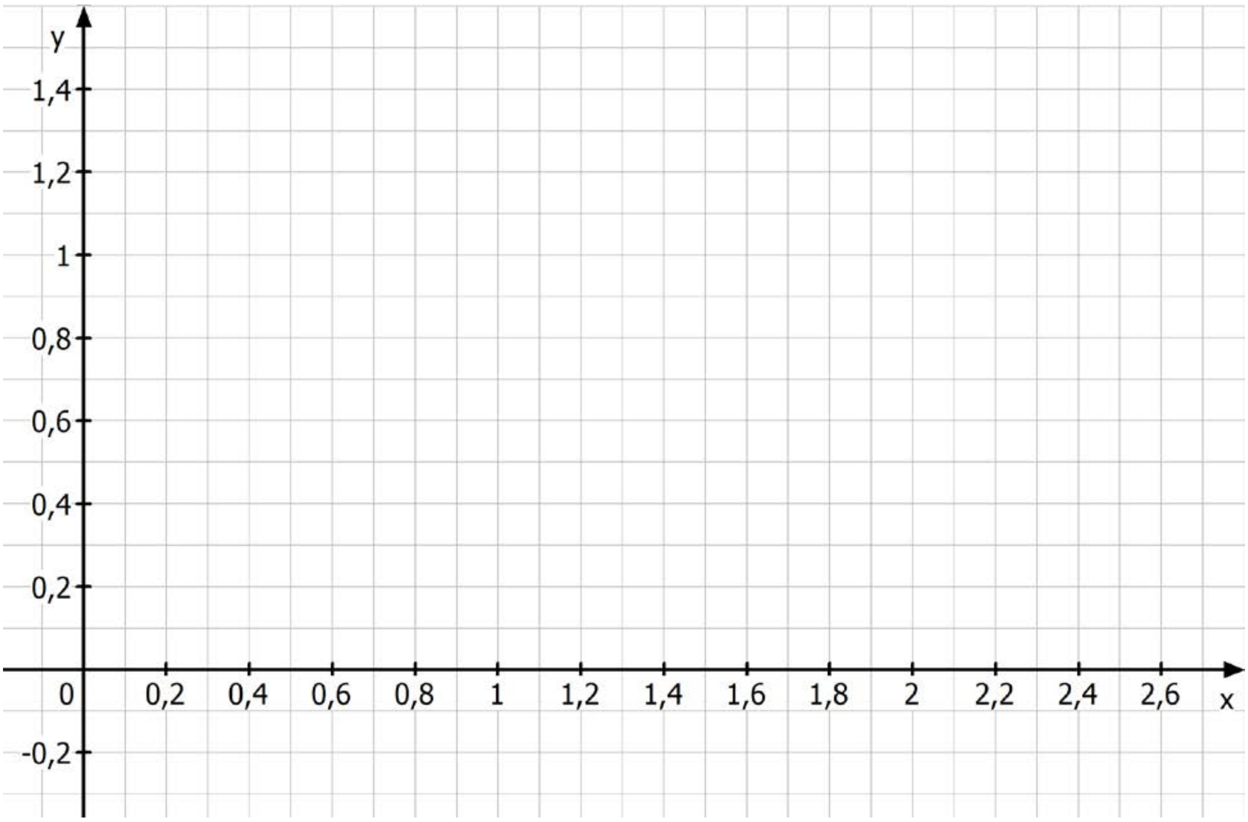
1.3 Zeigen Sie, dass der Wendepunkt des Graphen von f an der Stelle $x_w \approx 1,43$ liegt. **/3**
Ermitteln Sie die y-Koordinate des Wendepunkts.
[Hinweis: Auf den Nachweis mit Hilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

1.4 Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f im Intervall [0; 2,5] mit Hilfe Ihrer Ergebnisse sowie der folgenden Wertetabelle. **/6**

Wertetabelle zu 1.4:

x	0	0,1	0,5	1	1,5	2	2,5
***f*(*x*)**			1,11		0,92		0,57

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4:



Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Ein Medikament wird nach der Einnahme ($x = 0$) langsam vom Körper aufgenommen und dann im Laufe der Zeit wieder abgebaut. Die Konzentration des Medikaments im Blut (in mg / l) kann durch die Funktion f beschrieben werden. Dabei ist x die Zeit in Stunden nach der Einnahme.

1.5 Geben Sie an, nach welcher Zeit (nach der Einnahme) die Konzentration des Medikaments am höchsten ist. **/3**

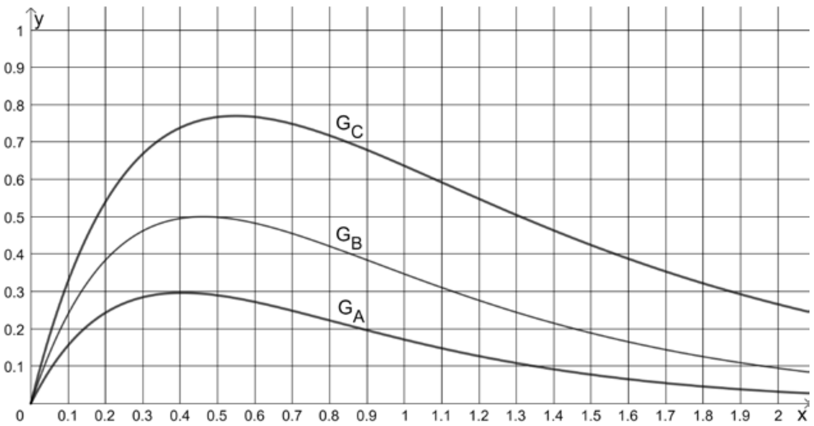
Geben Sie an, nach welcher Zeit (nach der Einnahme) die Konzentration des Medikaments am stärksten abnimmt.

Beschriften Sie den Einnahmezeitpunkt im Koordinatensystem.

1.6 Das Medikament wirkt, wenn die Konzentration mindestens 0,6 mg/l beträgt. Bestimmen Sie anhand des Graphen den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt. Kennzeichnen Sie diesen Zeitraum auf der x-Achse. **/4**

Die Funktion f ist eine Funktion vom Typ $f_a(x) = 2\,(e^{-ax} - e^{-3x})$ mit $a \geq 0$.

Die Abbildung zeigt einige Scharkurven zu $f_a(x) = 2\,(e^{-ax} - e^{-3x})$.



1.7 Ordnen Sie zu, welcher der Graphen G_A, G_B und G_C zu den Parametern $a = 1$, $a = 1{,}5$ und $a = 2$ gehört. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. **/6**

2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion *f* durch die Gleichung $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{6x^4 + 2}$.

Der Graph der Funktion ist G_f.

2.1 Begründen Sie, dass die Funktion *f* für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert werden kann. /4
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion *f* achsensymmetrisch zur *y*-Achse ist.
Geben Sie das Verhalten von G_f für $x \to \pm\infty$ an.

2.2 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion *f* mit den Koordinatenachsen. /4
Geben Sie diese an.

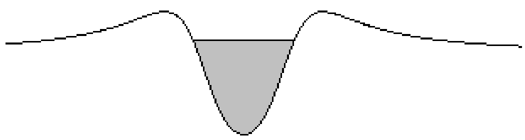
2.3 Zeigen Sie, dass gilt: $f'(x) = \dfrac{-36x \cdot \left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}\right)}{(6x^4 + 2)^2}$. /11
Berechnen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f.
[*Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden:* $f''(x) = \dfrac{24 \cdot (27x^8 - 30x^6 - 36x^4 + 6x^2 + 1)}{(6x^4 + 2)^3}$]

2.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. /6

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)		- 0,11		0,18			0,05

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion *f* im Intervall $-3 \le x \le 3$ in das **Koordinatensystem auf der nächsten Seite**.

Der Graph der Funktion *f* kann als Querschnitt eines Kanals interpretiert werden.
Der Abstand zwischen der Wasseroberfläche und dem tiefsten Punkt des Kanals wird als Wassertiefe bezeichnet.
(siehe Abbildung, nicht maßstabsgerecht; 1 LE = 10 m).



2.5 Geben Sie an, wie groß die Wassertiefe maximal sein kann. /4
In diesem Fall kann die Querschnittsfläche in grober Näherung als ein Dreieck angesehen werden.
Berechnen Sie einen Näherungswert für den Inhalt der Querschnittsfläche.

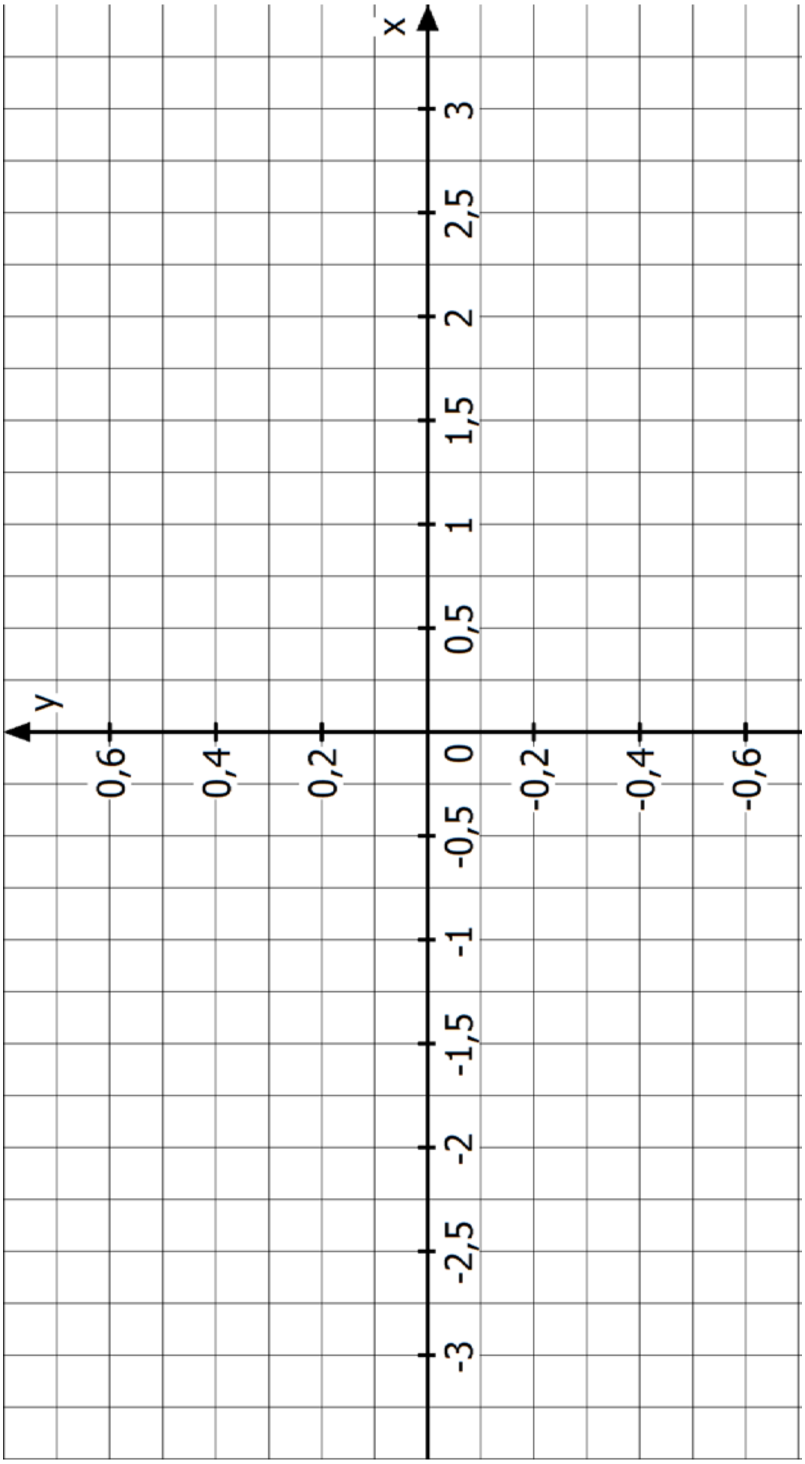
Fortsetzung auf der nächsten Seite →

2.6 Um die Breite der Wasseroberfläche zu bestimmen, wenn der Kanal eine Wassertiefe von 6,4 m besitzt, wird der folgende Ansatz gewählt: $f(x) = 0{,}14$. Begründen Sie, dass dieser Ansatz richtig ist. **/4**

Die Gleichung, die aus diesem Ansatz folgt, hat vier Lösungen:
$x \approx \pm 1{,}75$ und $x \approx \pm 0{,}70$ (Dies müssen Sie nicht nachweisen.).

Berechnen Sie, wie breit die Wasseroberfläche im Kanal ist, wenn die Wassertiefe 6,4 m beträgt.

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.4:



3 Analytische Geometrie /33

In Rostock gibt es die Wohnanlage „Sägezahnhaus“ (siehe Abbildung 1).
Die nach Süden ausgerichteten schrägen Dachflächen bestehen komplett aus Sonnenkollektoren zur Wärmegewinnung, zwischen den Dächern befinden sich in 11 m Höhe über der Grundfläche 5,50 m breite Terrassen.

Abbildung 1

In der stark vereinfachten Modellzeichnung der letzten beiden Hauselemente (Abbildung 2) liegen die Hausgrundfläche in der *x*-*y*-Ebene sowie die Rückseite in der *y*-*z*-Ebene.

Die *y*-Achse zeigt genau in Südrichtung.
(1 LE = 1 m)
Folgende Punkte sind gegeben:

A (11|13,5|19) *B* (11|21,5|12,5)
C (0|21,5|12,5) *D* (0|13,5|19)
K (11|27|11) *I*(0|27|11)

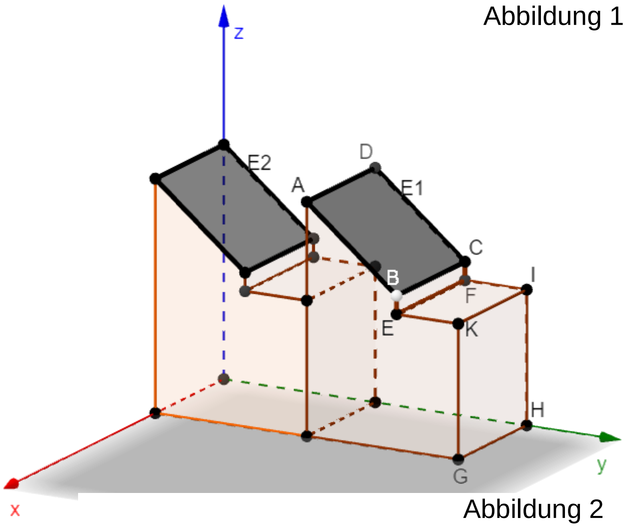


Abbildung 2

3.1 Das Viereck *ABCD* wird komplett mit Sonnenkollektoren ausgefüllt. /7
Weisen Sie nach, dass *ABCD* ein Rechteck ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks.

3.2 Die Sonnenkollektoren des einen Hauselements liegen in der Ebene E_1, die durch die Punkte *A*, *B* und *D* bestimmt wird. /7
Ermitteln Sie für diese Ebene sowohl eine Gleichung in Parameterform als auch eine Gleichung in Koordinatenform.
[*Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist* $E_1 : 71{,}5y + 88z = 2637{,}25$]

3.3 Weisen Sie nach, dass der Punkt *I* nicht in der Ebene E_1 liegt. /2

3.4 Die Dachfläche des anderen Hauselements liegt in der Ebene E_2 mit der Gleichung /5

$$E_2 : \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 143 \\ 176 \end{pmatrix} = 0 .$$

Zeigen Sie, dass beide Dachflächen parallel zueinander sind.
Ermitteln Sie den Abstand der beiden Ebenen, in denen die Dachflächen liegen.

3.5 Berechnen Sie den Neigungswinkel α der Dachflächen gegenüber der Erdoberfläche. /5

3.6 Entlang der *y*-Achse läuft ein Kind aus Richtung Süden auf das Haus zu. Die Augen des Kindes befinden sich dabei stets in einer Höhe von 1,40 m. /7
Bis zu welcher Entfernung vom Haus kann das Kind den oberen Rand der Kollektorfläche noch sehen?

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2020
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$f(x) = 2e^{-0,5x} - 2e^{-3x}$
$f'(x) = 2(-0,5)e^{-0,5x} - 2(-3)e^{-3x}$
$f'(x) = -e^{-0,5x} + 6e^{-3x}$

$f'(x) = -e^{-0,5x} + 6e^{-3x}$
$f''(x) = -1(-0,5)e^{-0,5x} + 6(-3)e^{-3x}$
$f''(x) = 0,5\, e^{-0,5x} - 18e^{-3x}$</td><td>3

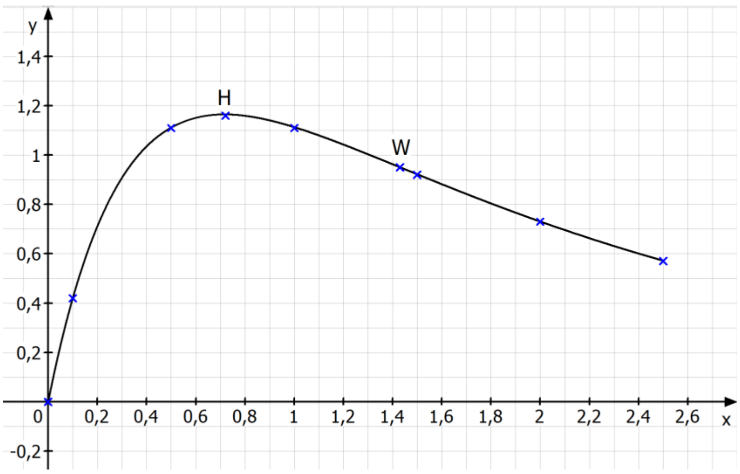
3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>x_E ist Extremstelle von f, wenn $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$ ist.

$f'(x_E) = 0$
$0 = -e^{-0,5x} + 6e^{-3x}$
$e^{-0,5x} = 6e^{-3x}$
$e^{2,5x} = 6$
$2,5x = \ln(6)$
$x_E \approx 0,72$

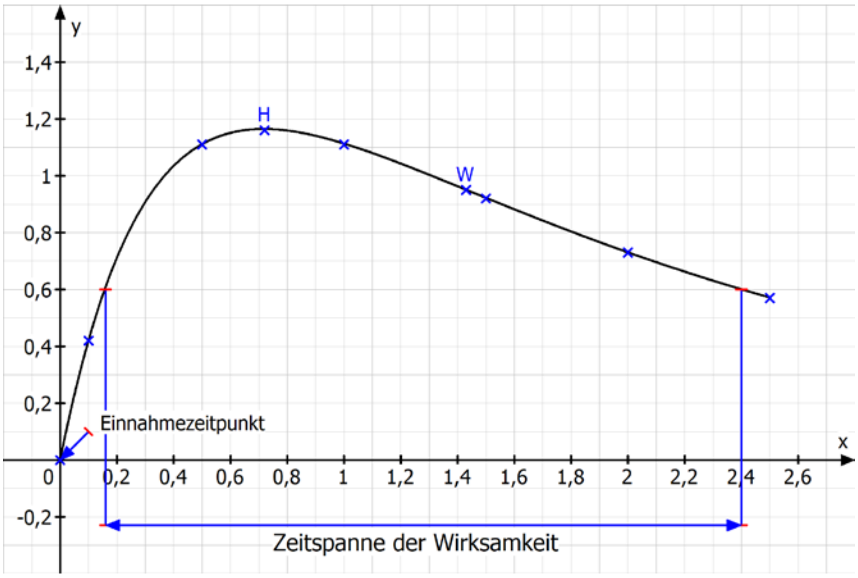
$f''(0,72) \approx -1,73 < 0 \Rightarrow$ HP

$H(0,72 \mid 1,16)$</td><td></td><td>3

2

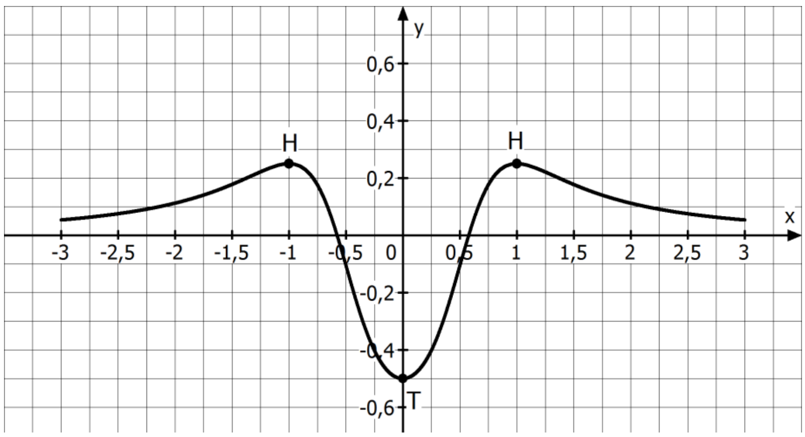
1</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f''(x_W) = 0,5e^{-0,5\cdot 1,43} - 18e^{-3\cdot 1,43} \approx 0 \Rightarrow$ WP
$f(x_W) = 2e^{-0,5\cdot 1,43} - 2e^{-3\cdot 1,43} \approx 0,95 \Rightarrow y_W \approx 0,95$
Alternative Lösung mit dem Ansatz $f''(x) = 0$ und Lösung der Exponentialgleichung ist ebenfalls möglich.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>0,1</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>0</td><td>0,42</td><td>1,11</td><td>1,11</td><td>0,92</td><td>0,73</td><td>0,57</td></tr></table>

</td><td>2

4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>Höchste Konzentration: nach 0,72 Stunden
Stärkste Abnahme der Konzentration: nach 1,43 Stunden
Kennzeichnung siehe Abbildung bei 1.6</td><td></td><td>1
1
1</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.6</td><td>Beginn: nach ca. 0,16 Stunden
Ende: nach ca. 2,4 Stunden
Zeichnung für 1.5 und 1.6

</td><td></td><td>2

2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.7</td><td>Ich habe frei gewählte x-Werte eingesetzt z.B. $x=1$:
für $a=1$: $f_1(1)=2\,(e^{-1}-e^{-3})\approx 0{,}64$
für $a=1{,}5$: $f_{1,5}(1)=2\,(e^{-1,5}-e^{-3})\approx 0{,}35$
für $a=2$: $f_2(1)=2\,(e^{-2}-e^{-3})\approx 0{,}17$
Diese habe ich mit der Abbildung verglichen, daraus ergibt sich:
$f_1(x)$ also $a=1$ ist G_C
$f_{1,5}(x)$ also $a=1{,}5$ ist G_B
$f_2(x)$ also $a=2$ ist G_A
Alternative Vorgehensweisen sind ebenfalls zulässig.</td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>12</td><td>16</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">34</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.1	Die Nennerfunktion kann nie Null werden, da für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt: $6x^4 + 2 > 0$	1		
	$f(-x) = \frac{3(-x)^2 - 1}{6(-x)^4 + 2} = \frac{3x^2 - 1}{6x^4 + 2} = f(x) \quad \Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse	2		
	(auch alternative Begründungen sind möglich) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$	1		
2.2	$f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_y\left(0 \middle\vert -\frac{1}{2}\right)$	1		
	$f(x_0) = 0 \Rightarrow 0 = 3x^2 - 1 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow S_x\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}} \middle\vert 0\right)$	3		
2.3	$f'(x) = \frac{6x \cdot (6x^4 + 2) - 24x^3 \cdot (3x^2 - 1)}{(6x^4 + 2)^2} = \frac{-36x^5 + 24x^3 + 12x}{(6x^4 + 2)^2}$ $f'(x) = \frac{-36x\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}\right)}{(6x^4 + 2)^2}$		3	
	$f'(x_E) = 0 \Rightarrow -36x\left(x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ Aus $x^4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{3}$ entfällt $\Rightarrow x_{2,3} = \pm 1$ und $f''(\pm 1) < 0 \Rightarrow H\left(\pm 1 \middle\vert \frac{1}{4}\right)$ $\Rightarrow x_1 = 0$ und $f''(0) > 0 \Rightarrow T\left(0 \middle\vert -\frac{1}{2}\right)$		8	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.4</td><td>Ergänzung der Wertetabelle:
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>- 0,5</td><td>- 0,11</td><td>0,25</td><td>0,18</td><td>0,11</td><td>0,08</td><td>0,05</td></tr>
</table>


</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>$\Delta y = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$
Die Wassertiefe kann maximal 7,5 m betragen.
Aus $A = \frac{g \cdot h}{2}$ mit $g = 2 \cdot x_H = 2$ und $h = \Delta y = 0{,}75$ folgt $A = 0{,}75$ und somit eine Querschnittsfläche von 75 m^2.</td><td></td><td>2

2</td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>$6{,}4\,\text{m} \mathrel{\hat{=}} 0{,}64\,\text{LE} \Rightarrow 0{,}64 - y_T = 0{,}64 - 0{,}5 = 0{,}14 \Rightarrow f(x) = 0{,}14$
Die geeigneten Lösungen sind $x \approx \pm 0{,}70$, da sie im Innenbereich des Kanals liegen.
Wenn die Wassertiefe 6,4 m beträgt, ist die Wasseroberfläche ca. 14 m breit.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>10</td><td>19</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	Rechteck: gegenüberliegende Seiten gleichlang und parallel, rechter Winkel Parallelität: $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0-0\\21{,}5-13{,}5\\12{,}5-19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\\-6{,}5\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ die gegenüberliegenden Vektoren sind gleichlang und parallel Winkel: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\8\\-6{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-11\\0\\0\end{pmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ Das Viereck ist ein Rechteck. Flächeninhalt: $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\sqrt{8^2+(-6{,}5)^2}\approx 10{,}31$ LE $\hat{=}$ 10,31m $\left\lvert\overrightarrow{AD}\right\rvert=\sqrt{(-11)^2}=11$ LE $\hat{=}$ 11 m $\Rightarrow \quad A_{\text{Rechteck}}=\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert\cdot\left\lvert\overrightarrow{AD}\right\rvert\approx 113{,}4\ \text{m}^2$	3	4	
3.2	Richtungsvektoren der Ebene: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\8\\-6{,}5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-11\\0\\0\end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Parameterform: $E_1:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}11\\13{,}5\\19\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\-6{,}5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-11\\0\\0\end{pmatrix}$ Ebenengleichung in Koordinatenform: Normalenvektor: $\vec{n}_1=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\71{,}5\\88\end{pmatrix}$ $\vec{n}_1\cdot\vec{x}=\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{OA}$ $E_1:\ 71{,}5y+88z=2637{,}25$	7		
3.3	Punktprobe für $I(0\,\vert\,27\,\vert\,11)$: I in E_1: $71{,}5\cdot 27+88\cdot 11=1930{,}5+968=2898{,}5\neq 2637{,}25$ I liegt nicht in der Ebene E_1.	2		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.4</td><td>Gegeben: $E_2: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}0\\0\\19\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}0\\143\\176\end{pmatrix} = 0$
$\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}0\\143\\176\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\71{,}5\\88\end{pmatrix} = 2 \cdot \overrightarrow{n_1} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \Rightarrow E_1 \parallel E_2$
Abstand der Ebenen:
$A \in E_1 \Rightarrow d(E_1, E_2) = d(A, E_2)$
$d(A, E_2) = \left(\begin{pmatrix}11\\13{,}5\\19\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\19\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}0\\143\\176\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{143^2 + 176^2}} \approx 8{,}51\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 8{,}51\text{m}$
Der Abstand der beiden Dachflächen beträgt ca. 8,51m.</td><td></td><td>2

3</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Der Winkel zwischen der Erdoberflächen-Normale (also z-Achse) und der Ebenennormalen ist zu berechnen.
$\alpha = \angle(\overrightarrow{n_2}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$
$\cos\alpha = \cos\left(\angle\left(\begin{pmatrix}0\\143\\176\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = \frac{0+0+176}{\sqrt{143^2 + 176^2} \cdot \sqrt{1^2}} \approx 0{,}776$
$\alpha \approx 39{,}1°$
Die Dachflächen haben eine Neigung von 39,1° gegenüber der Erdoberfläche.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>3.6</td><td>Übergang Sichtbarkeit zu Nicht-Sichtbarkeit: Die Augen des Kindes befinden sich genau auf der Geraden durch die Punkte I und D, es ist gerade so noch die obere Kante der Dachfläche zu sehen.
Geradengleichung:
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\13{,}5\\19\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0-0\\27-13{,}5\\11-19\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\13{,}5\\19\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\13{,}5\\-8\end{pmatrix}$
Fragestellung:
Für welchen y- Wert liegt der entsprechende Geradenpunkt in einer Höhe von 1,40 m, d. h. z= 1,4
$z = 19 + r \cdot (-8) \Rightarrow r = 2{,}2$
$y = 13{,}5 + 2{,}2 \cdot 13{,}5 = 43{,}2$
Der gesuchte Abstand zum Haus beträgt 43,20 m – 27,00 m = 16,20 m.</td><td></td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>12</td><td>14</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>