Abschlussprüfung Berufsoberschule 2019
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Exponentialfunktionen /34

Gegeben ist die Funktion *f* durch die Gleichung $f(x) = 3x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x}$ sowie eine zugehörige Stammfunktion mit $F(x) = \left(-3x^2 - 6x - 6\right) \cdot \mathrm{e}^{-x}$.
Der Graph der Funktion sei G_f.

1.1 Geben Sie das Verhalten von G_f für $x \to \pm\infty$ an. **/4**
Bestimmen Sie den Schnittpunkt von *f* mit der *x* – Achse.

1.2 Zeigen Sie, dass gilt: $f'(x) = \left(6x - 3x^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-x}$. **/3**

1.3 Bestimmen Sie die Art und Lage der Extrempunkte von G_f. **/6**
Verwenden Sie ohne Nachweis: $f''(x) = \left(3x^2 - 12x + 6\right) \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

1.4 Die Graphen der Funktion *f* und deren Ableitungsfunktion f' schneiden sich an zwei Stellen. **/3**
Bestimmen Sie diese Schnittstellen.

1.5 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**
Zeichnen Sie mit Hilfe aller berechneten Ergebnisse den Graphen von *f* im Intervall $-0{,}5 \le x \le 6$ in das vorbereitete Koordinatensystem **auf der nächsten Seite**.
Der Graph der Ableitungsfunktion *f ´* ist bereits gegeben.

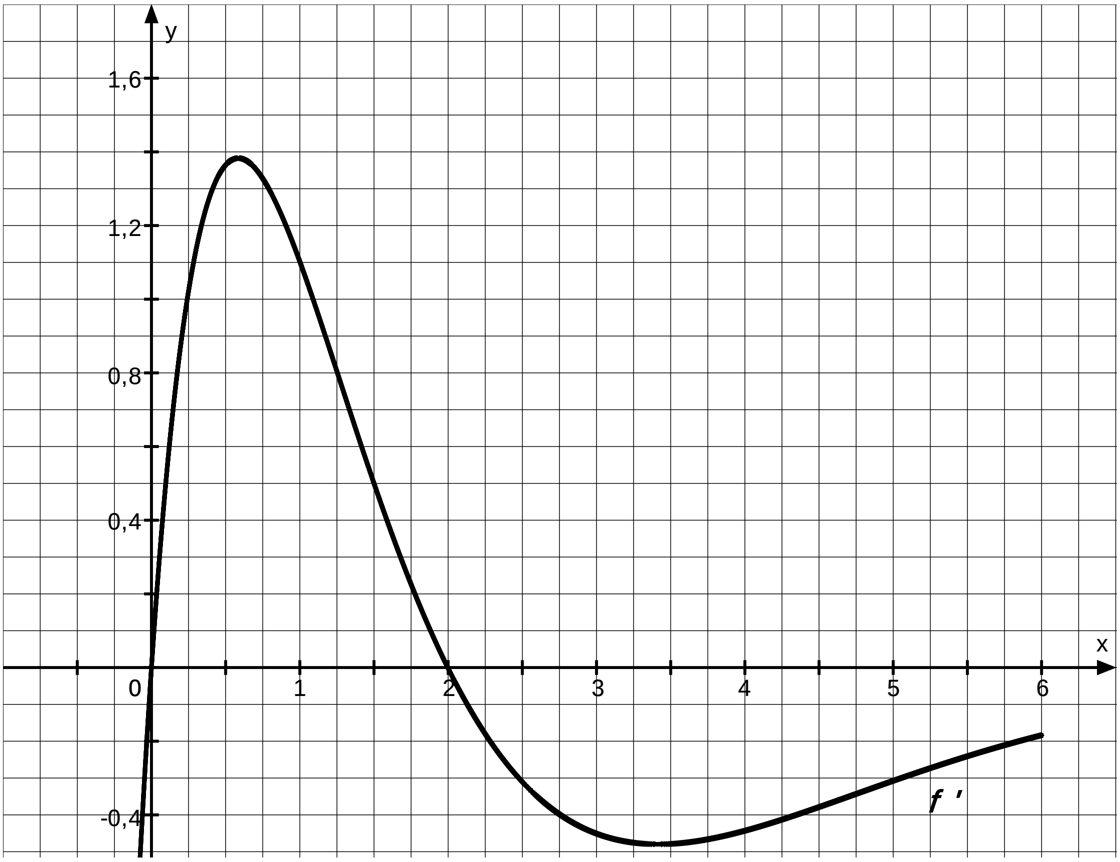
x	- 0,5	1	3	4	5	6
$f(x)$	1,24				0,51	

1.6 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen *f* und *f ´* vollständig eingeschlossen wird. **/6**
Falls Sie die Schnittstellen unter 1.4 nicht bestimmen konnten, lesen Sie diese aus der Grafik ab.

1.7 Begründen Sie nur auf der Basis Ihrer bisherigen Ergebnisse der Funktionsuntersuchung für die Funktion *f* (also ohne weitere Rechnungen) die Richtigkeit der folgenden Aussagen: **/6**
(I) Der Graph der Funktion *F* besitzt keine Extremstellen.
(II) Der Graph der Funktion *F* hat an der Stelle *x* = 0 einen Sattelpunkt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.5



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$.

2.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von *f*. Begründen Sie. Untersuchen Sie den Graphen von *f* auf Symmetrie. **/4**

2.2 Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen der Funktion *f* mit der *y*-Achse an. Weisen Sie nach, dass *f* keine Nullstellen besitzt. **/3**

2.3 Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2+4)^2}$ gilt. **/7**

Berechnen Sie Lage und Art des Extrempunkts von G_f.

[*Hinweis: Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden* $f''(x) = \frac{12x^2-16}{(x^2+4)^3}$.]

2.4 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von G_f. **/4**

[*Hinweis: Ein Nachweis mit Hilfe der 3. Ableitung oder des Vorzeichenwechselkriteriums ist nicht erforderlich.*]

2.5 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/5**

x	0	0,5	1	2	3	4	5
$f(x)$			0,40		0,15	0,10	

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von *f* im Intervall $[-5;+5]$ in das **Koordinatensystem auf der folgenden Seite** ein.

Im Folgenden soll diese Funktion im Sachzusammenhang beachtet werden:

Auf Autobahnen stellen große Steigungen oder Gefälle ein besonderes Gefahrenpotential für die Verkehrsteilnehmer dar. Aus diesem Grund sollen beim Bau von neuen Autobahnen die Steigungen nicht größer als 6% sein.
Das Höhenprofil eines neu zu errichtenden Autobahnabschnitts wird durch die oben genannte Funktion *f* beschrieben.

2.6 Begründen Sie rechnerisch, warum der neue Autobahnabschnitt mit diesem Höhenprofil nicht gebaut werden kann. **/3**

2.7 Um die Autobahn bauen zu können, soll das Höhenprofil im Intervall [-4;+4] durch den Graphen der Funktion *p* mit $p(x) = -0{,}005x^2 + 0{,}18$ festgelegt werden. **/2**

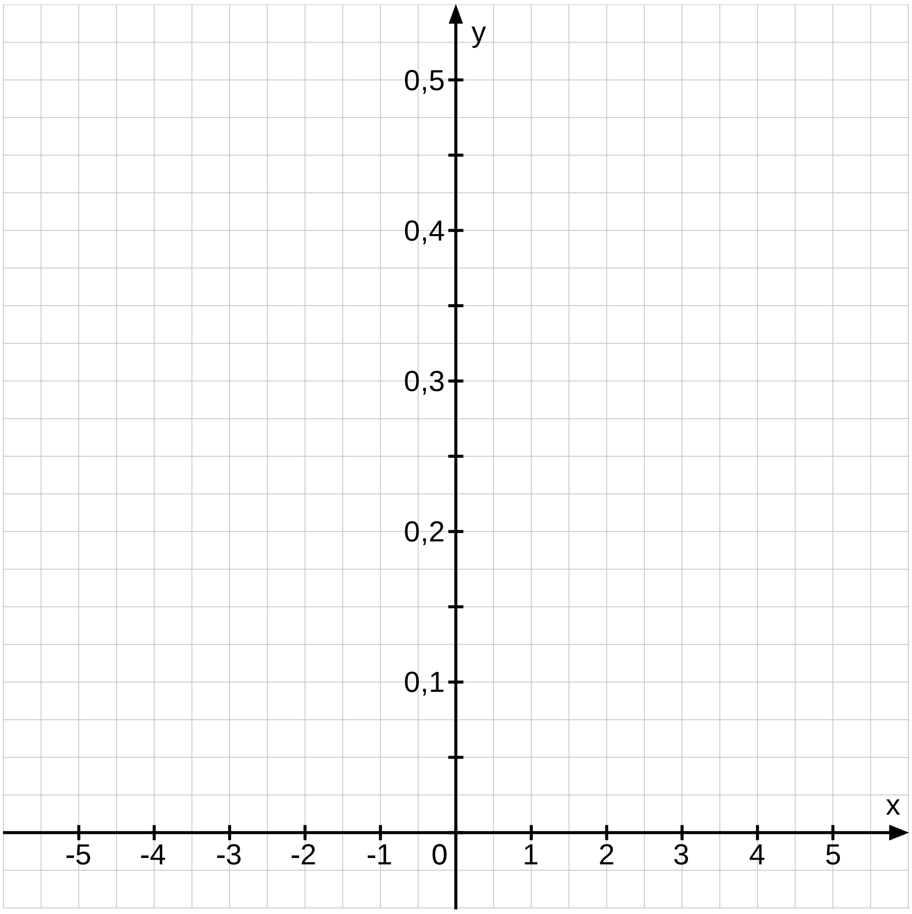
Skizzieren Sie den Verlauf des Autobahnabschnitts in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

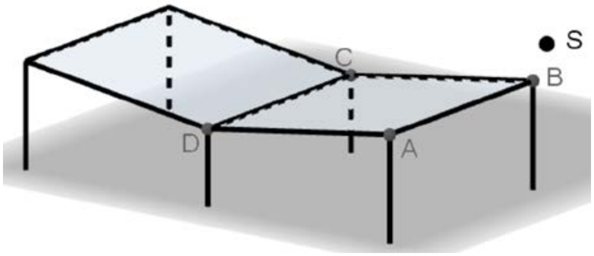
2.8 Weisen Sie nach, dass sich die Graphen der Funktionen *f* und *p* an den Stellen $x_1 = -4$ und $x_2 = +4$ berühren. **/5**

Begründen Sie, dass der Autobahnabschnitt mit diesem neuen Verlauf jetzt gebaut werden kann.

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.5 und 2.7:



3 Analytische Geometrie /33



Im Sportunterricht wird Tischtennis gespielt. Beim „Funny Ping Pong" werden die Tischtennisplatten abweichend von der normalen Anordnung aufgestellt (siehe Darstellung). Die Eckpunkte der rechten Tischtennisplatte sind $A(15|14|7)$, $B(0|14|7)$, $C(0|0|5)$ und $D(15|0|5)$.
Es gilt: 1 LE = 10 cm. Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.

3.1 Berechnen Sie die Breite $\overline{AB}$ und die Länge $\overline{CB}$ der einen Platte. **/4**

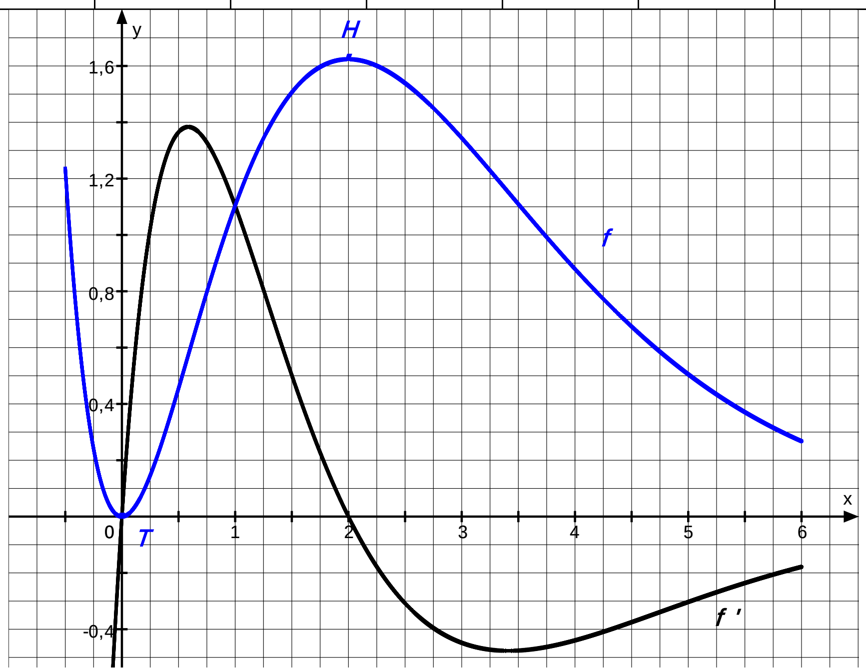
3.2 Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_R auf, in der die rechte Platte mit den Eckpunkten *A, B, C* und *D* liegt. Geben Sie diese Gleichung in Parameterform und in Koordinatenform an. **/5**
[Zur Kontrolle: Ein mögliches Ergebnis für E_R in Koordinatenform lautet:
E_R: $y - 7z = -35$.]

3.3 Die linke Platte liegt in der Ebene E_L und kann beschrieben werden durch die Gleichung: E_L: $-y - 7z = -35$. **/6**
Weisen Sie nach, dass die Kante $\overline{CD}$ der rechten Tischtennisplatte auch in der Ebene E_L liegt.
Berechnen Sie den Winkel α, welchen die beiden Tischtennisplatten bilden.

3.4 Ein Spieler, der an der rechten Plattenseite steht, trifft einen Ball im Punkt $S(4|18|11)$ und spielt diesen mit hoher Geschwindigkeit zurück in Richtung Punkt $Z(20|-32|1)$. **/11**
Die Fluglinie kann näherungsweise durch eine Gerade *g* beschrieben werden.
Zeigen Sie, dass $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 11 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 16 \\ -50 \\ -10 \end{pmatrix}$ eine mögliche Geradengleichung der Gerade g ist.
Bestätigen Sie durch eine Rechnung, dass der Ball im Punkt $K(12|-7|6)$ auf der linken Platte auftrifft.
Ermitteln Sie den Winkel β, in dem der Ball auf der linken Platte auftrifft.

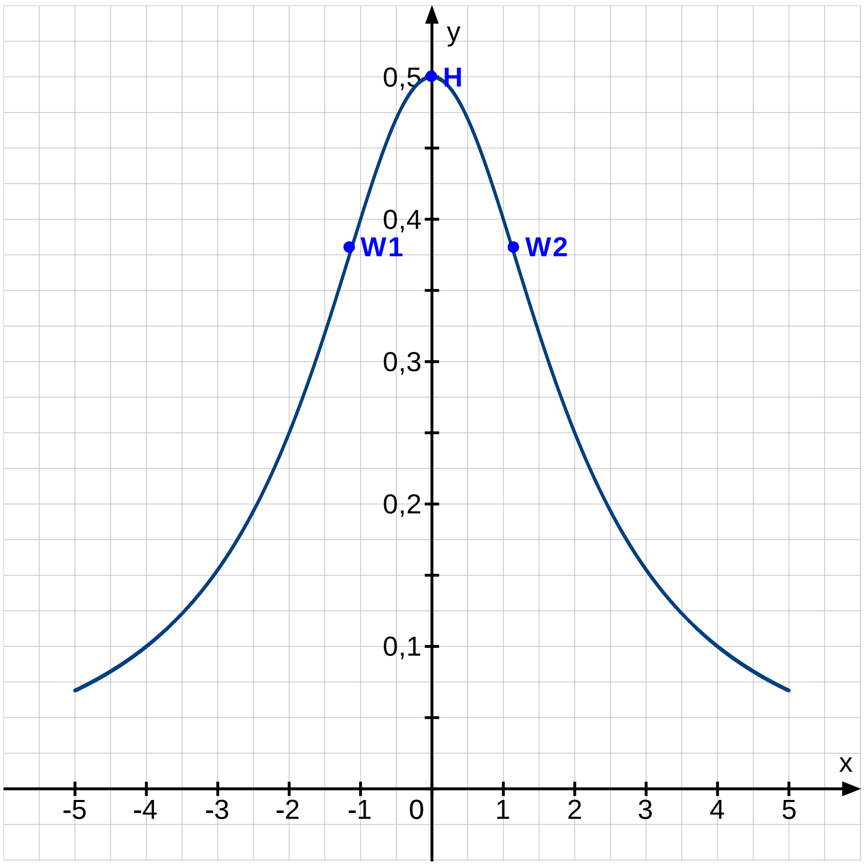
3.5 Ein Tischtennisnetz hat eine Höhe von 15,25 cm und wird zwischen beiden Platten angebracht. Ein Spieler, der am rechten Plattenrand steht, trifft einen Ball im Punkt $T(2|20|11)$ und schlägt ihn mit hoher Geschwindigkeit zurück. Die Fluglinie kann näherungsweise durch die Gerade *h* mit der Gleichung $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 10 \\ -25 \\ -6 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. **/7**
Der Punkt N liegt auf der Fluglinie des Balls und genau senkrecht über der Kante $\overline{CD}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes N.
Untersuchen Sie, ob der Ball das Netz trifft.

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

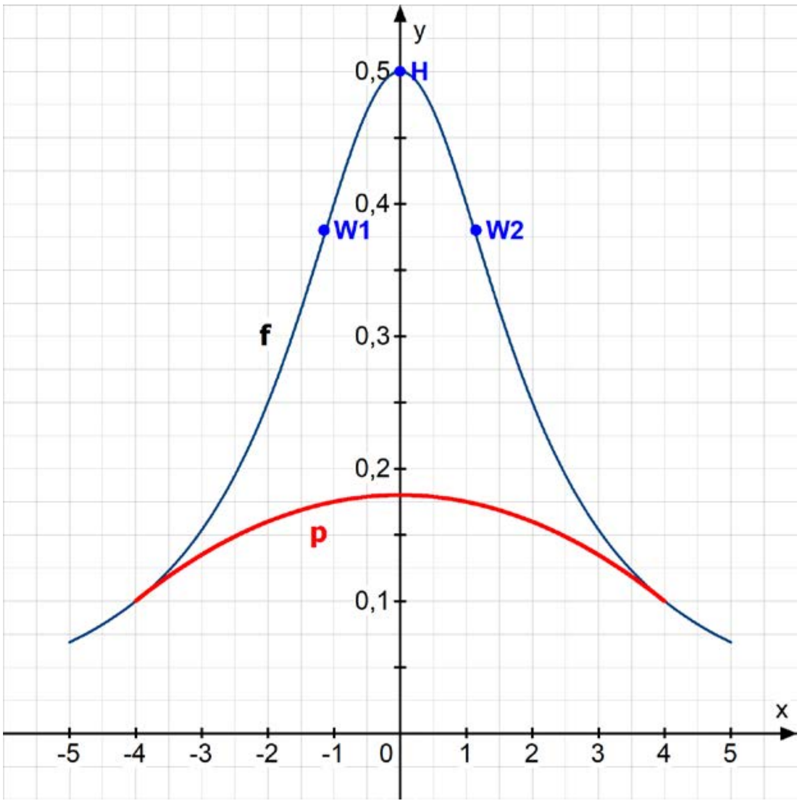
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
$f(x_0)=0 \Rightarrow$ wegen $e^{-x}\neq 0$ für $x\in$ IR folgt $x=0 \Rightarrow S(0\mid 0)$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>$f'(x)=6x\cdot e^{-x}+3x^2\cdot\left(-e^{-x}\right)=\left(6x-3x^2\right)\cdot e^{-x}$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f'(x_E)=0 \Rightarrow (6x-3x^2)\cdot e^{x}=0 \Rightarrow 6x-3x^2=0$
$x_{E1}=0$ und $f''(0)>0 \Rightarrow T(0\mid 0)$
$x_{E2}=2$ und $f''(2)<0 \Rightarrow H(2\mid 12e^{-2})$ bzw. $H(2\mid 1{,}62)$</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>$f'(x)=f(x) \Rightarrow \left(6x-3x^2\right)\cdot e^{-x}=3x^2\cdot e^{-x} \Rightarrow 6x-6x^2=0$
$x_1=0$ und $x_2=1$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>- 0,5</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>1,24</td><td>1,10</td><td>1,34</td><td>0,88</td><td>0,51</td><td>0,27</td></tr>
</table>


</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>$A=\int_0^1\left(f'(x)-f(x)\right)dx=\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$
$A=\left[f(x)\right]_0^1-\left[F(x)\right]_0^1=1{,}10-0{,}48=0{,}62$ FE
(Eine Berechnung mittels Differenzfunktion ist möglich, erfordert aber die Herleitung einer Stammfunktion der Differenzfunktion.)</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.7	(I) $F'(x) = f(x) \geq 0$ für $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ F ist monoton steigend $\Rightarrow$ F besitzt keine Extremstellen. (II) Weil $F'(0) = 0$ ist, hat der Graph von F bei $x = 0$ eine waagerechte Tangente. Da F zusätzlich monoton steigend ist, muss hier ein Sattelpunkt liegen. (auch Alternativbegründungen sind möglich)			6
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	6	22	6
	Summe der BE	34		

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>D = $\mathbb{R}$, da $N(x) \neq 0$ für alle reellen x
Nachweis $f(x) = f(-x) \Rightarrow f$ ist achsensymmetrisch.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>$f(0) = 0{,}5 \;\Rightarrow\; S_y(\,0 \mid 0{,}5\,)$
$f(x) = 0$ hat keine Lösungen, da $Z(x) = 2 \neq 0$, also existieren keine Nullstellen.</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>Ableitung: $f'(x) = \dfrac{0 - 2 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-4x}{(x^2+4)^2}$
Bedingung für Extremstelle: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -4x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ist mögliche Extremstelle.
$f''(0) = -0{,}25 < 0 \;\Rightarrow$ Hochpunkt $H(\,0 \mid 0{,}5\,)$ (y-Wert siehe 2.2)</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>Notwendige Bedingung für Wendestelle: $f''(x) = 0$
$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12x^2 - 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}} \approx \pm 1{,}15$ sind Wendestellen
$f\left(\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = \dfrac{2}{\tfrac{4}{3}+4} = \dfrac{3}{8} \approx 0{,}38$
Wendepunkte: W_1 (-1,15 | 0,38) und W_2 (1,15 | 0,38)</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>0,50</td><td>0,47</td><td>0,40</td><td>0,25</td><td>0,15</td><td>0,10</td><td>0,07</td></tr>
</table>


</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.6	Größte Steigung (bzw. größtes Gefälle) am Wendepunkt: $f'(-1{,}15) \approx 0{,}16 = 16\%$ Die größte Steigung beträgt rund 16%, das ist deutlich mehr als zulässig. [*Hinweis: Alternative Lösungen, z.B. mit geschickten Testeinsetzungen, sind möglich.*]		3	
2.7			2	
2.8	Berühren heißt gleicher Funktionswert und gleiche Steigung $f(-4) = 0{,}10$ $p(-4) = -0{,}005 \cdot (-4)^2 + 0{,}18 = 0{,}10$ $\Rightarrow f(-4) = p(-4)$ $f'(-4) = \frac{16}{20^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$ $p'(-4) = 2 \cdot (-0{,}005) \cdot (-4) = 0{,}04$ $\Rightarrow f'(-4) = p'(-4)$ Für $x = +4$ sind diese Bedingungen wegen der Symmetrie erfüllt. Die maximale Steigung des Tunnels ist an den Tunnelenden, sie beträgt +0,04 = 4% (bzw. 4% Gefälle an der anderen Seite). Damit ist der Grenzwert nicht überschritten und der Bau ist zulässig.			5
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	18	5
	Summe der BE	33		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.1	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 15 \text{ LE} = 150 \text{ cm}$, $\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \sqrt{200} \approx 14{,}14 \text{ LE} = 141{,}1 \text{ cm}$	2	2	
3.2	$E_R\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\overrightarrow{n_R} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -210 \end{pmatrix}$, somit gilt: $E_R\colon 30y - 210z = d$ Einsetzen der Koordinaten liefert: $d = -1050$. $E_R\colon 30y - 210z = -1050$ $E_R\colon y - 7z = -35$	1	4	
3.3	Nachweis durch Punktprobe Bestimmung des Schnittwinkels: Der Winkel zwischen den Ebenen E_R und E_L ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$. $cos\,\tilde{\alpha} = \frac{\overrightarrow{n_R} \cdot \overrightarrow{n_L}}{\left\|\overrightarrow{n_R}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{n_L}\right\|} = \frac{48}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = 0{,}96 \Rightarrow \quad \tilde{\alpha} \approx 16{,}26°$ $\Rightarrow \quad \alpha \approx 163{,}74°$	2	4	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.4</td><td>Geradengleichung:
Stützvektor ist $\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}4\\18\\11\end{pmatrix}$, Richtungsvektor ist $\overrightarrow{SZ}=\begin{pmatrix}20\\-32\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\18\\11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16\\-50\\-10\end{pmatrix}$,
also: $g\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\18\\11\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}16\\-50\\-10\end{pmatrix}$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Bestätigung Ball trifft in K auf:
$E_L\colon\ -y-7z=-35$
Einsetzen von g in die Koordinatenform ergibt:
$-(18-50u)-7(11-10u)=-35$
$120u-95=-35$
$u=1/2$
Punkt K berechnen:
$\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}4\\18\\11\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}16\\-50\\-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-7\\6\end{pmatrix}$, also Punkt $K\left(12\middle|-7\middle|6\right)$.</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Winkel berechnen:
Normalenvektor von E_L bestimmen, z.B. $\overrightarrow{n_L}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-7\end{pmatrix}$.
$sin\,\beta=\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{n_L}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_L}\right|}=\frac{120}{\sqrt{2856}\cdot\sqrt{50}}=0{,}3176$
$\beta\approx 18{,}52^\circ$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Ebene Netz: $y=0$.
Die Gleichung für h ergibt für den Schnittpunkt $20-25v=0$, also $v=\frac{4}{5}$.
Somit ist $N(10\,|\,0\,|\,\frac{31}{5})$.
Die x-Koordinate von N liegt im Bereich des Netzes. Die Höhe der Platte (in $\overline{CD}$) beträgt 5 LE also 50 cm. Die Höhe des Netzes beträgt 15,25 cm. Daraus ergibt sich eine Gesamthöhe Platte und Netz von 65,25 cm. Der Ball hat eine Flughöhe (vom Boden aus) von 62 cm (z- Koordinate von N), wenn er über die Gerade $\overline{CD}$ fliegt.
Der Ball bleibt demnach im Netz hängen.</td><td></td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>7</td><td>19</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>