**Abschlussprüfung Berufsoberschule 2018**
**Mathematik**

**Aufgabenvorschlag B**

## 1 Exponentialfunktionen /34

In St. Louis, USA, steht der Gateway Arch („Torbogen“) als Denkmal für die Besiedlung des US-amerikanischen Westens.

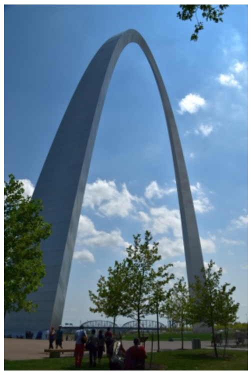


**Foto: AEG**

Die Innenkante des Bogens wird annähernd durch die Funktionsgleichung

$$f(x) = 217 - 15\left(e^{\frac{x}{30}} + e^{-\frac{x}{30}}\right)$$

dargestellt (siehe Koordinatensystem auf der folgenden Seite).

Alle Längenangaben erfolgen ganzzahlig in Metern.

**1.1** Untersuchen Sie den Graphen von $f$ auf Symmetrie und begründen Sie Ihre Aussage.
Bestimmen Sie die innere Höhe des Torbogens. /4

**1.2** Ermitteln Sie die Funktionsgleichung für die Steigung der Innenkante. /6

(*zur Kontrolle:* $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{30}} - e^{-\frac{x}{30}}\right)$ )

Berechnen Sie den Winkel, den die Innenkante mit dem waagerechten Untergrund einschließt.
Lesen Sie für die benötigten *x*-Werte ganzzahlige Werte aus der Abbildung des Graphen auf der folgenden Seite ab.

**1.3** Ermitteln Sie eine Stammfunktion *F* zur Funktion *f* durch Anwendung der Regel /9

$$\int f(mx+n)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m} \cdot F(mx+n) + C \quad .$$

Vereinfachen Sie den Term für *F* soweit wie möglich und kommentieren Sie die notwendigen Arbeitsschritte.

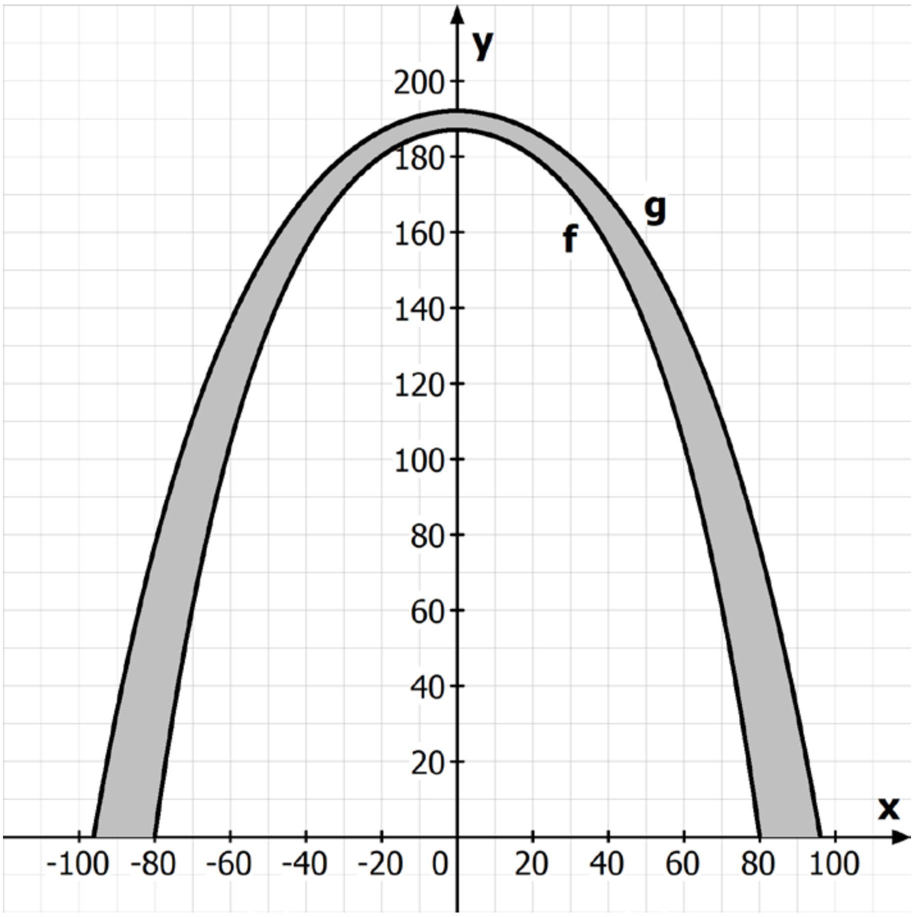
Weisen Sie nach, dass die Funktion $F_2$ mit $F_2(x) = 217x - 450\left(e^{\frac{x}{30}} - e^{-\frac{x}{30}}\right) + 2$

ebenfalls eine Stammfunktion von $f$ ist.

**1.4** Der Verlauf der Außenkante soll zur Vereinfachung durch eine quadratische Funktion $g$ beschrieben werden. Ermitteln Sie die Gleichung von $g$, wenn bekannt ist, dass Breite und Höhe des Bogens an der Außenkante jeweils 192 m betragen. /7

**1.5** Berechnen Sie die auf der folgenden Seite im Koordinatensystem grau markierte Querschnittsfläche des Bogens. /8
(*Hinweis: Falls Sie 1.4 nicht bearbeitet haben, verwenden Sie für die Außenkante die Ersatzfunktion $g_1$ mit* $g_1(x) = \frac{9216 - x^2}{48}$ )

**Koordinatensystem zu Aufgabe 1.1, 1.2 und 1.5**



## 2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion $W$ mit $W(x)=\dfrac{25x}{x^2+150}$.

**2.1** Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion $W$ an und untersuchen Sie den Graphen von $W$ auf Symmetrie. **/5**

**2.2** Berechnen Sie die Nullstellen von $W$. **/5**
Ermitteln Sie die Stellen, an denen die Funktion $W$ den Wert 1 annimmt.

**2.3** Weisen Sie nach, dass für die erste Ableitung der Funktion $W$ gilt: **/3**
$W'(x)=\dfrac{-25x^2+3750}{x^4+300x^2+22500}$.

**2.4** Berechnen Sie die lokalen Extrempunkte des Graphen von $W$. **/4**
[Hinweis: Auf den Nachweis mit Hilfe der 2. Ableitung kann verzichtet werden.]

**2.5** Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

| $x$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W(x)$ | | | 1 | 0,91 | | | 0,57 | 0,47 | 0,40 |

Ergänzen Sie die Achsenbezeichnungen im Koordinatensystem auf der folgenden Seite.
Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von $W$ in das Koordinatensystem ein.

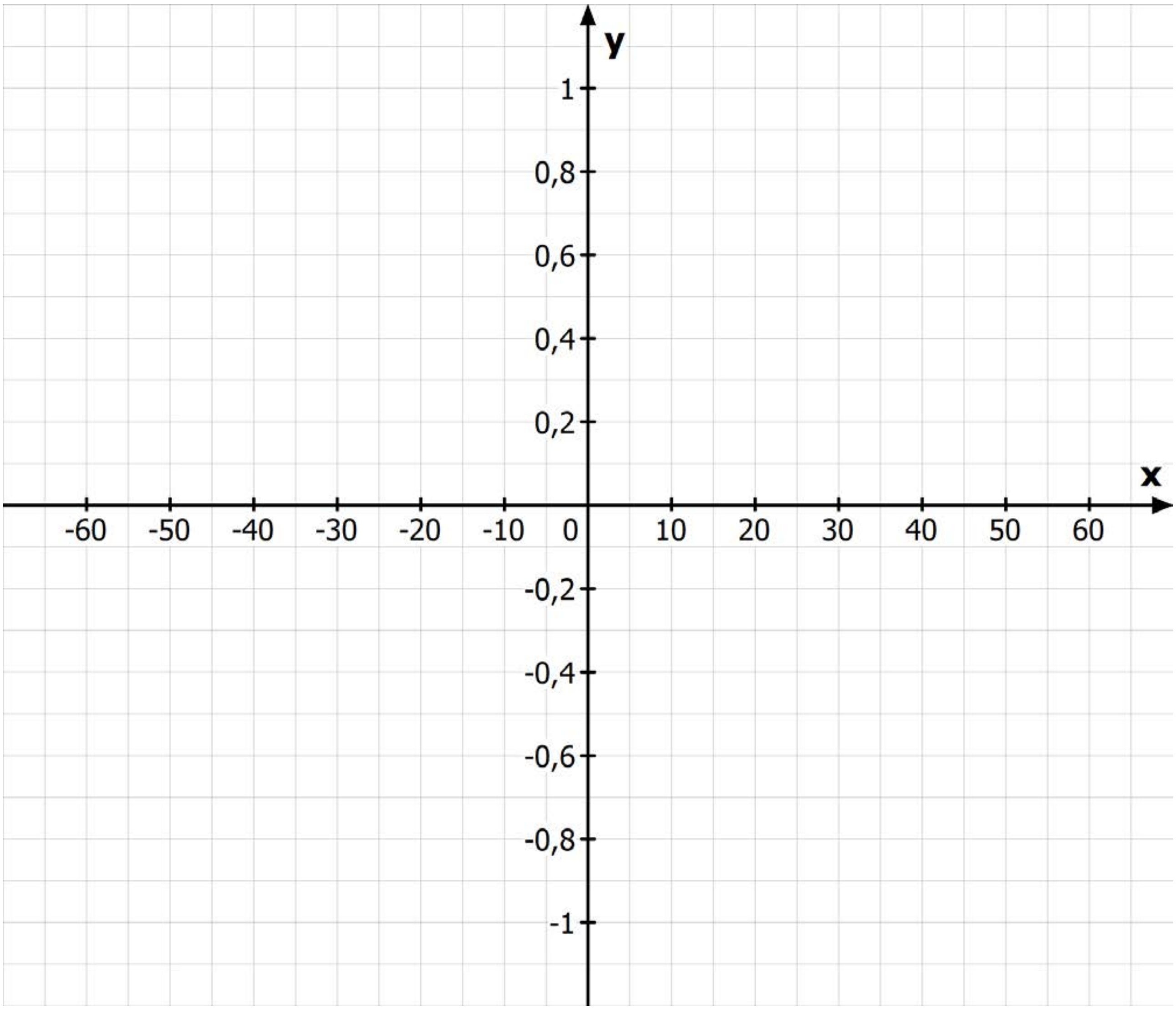
Die Wirtschaftlichkeit eines Unternehmens wird durch das Verhältnis der Erlöse (Einnahmen) zu den Kosten (Ausgaben) ausgedrückt. Für ein bestimmtes Unternehmen werden die Erlöse durch $E(x)=25x$ und die Kosten durch $K(x)=x^2+150$ beschrieben, wobei $x$ die Produktionsmenge bezeichnet. Also beschreibt die gegebene Funktion $W(x)$ die Wirtschaftlichkeit dieses Unternehmens in Abhängigkeit von x. Die Wirtschaftlichkeit eines Betriebes wird durch den Quotienten aus Erlös und Kosten gemessen. Eine Produktion ist wirtschaftlich, wenn die Erlöse größer sind als die Kosten, d. h. wenn der Quotient aus Erlösen und Kosten größer als 1 ist.

**2.6** Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an und begründen Sie Ihre Entscheidung. **/2**

**2.7** Ermitteln Sie die Produktionsmengen, bei denen der Betrieb wirtschaftlich arbeitet und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. **/4**

**2.8** Für ein anderes Unternehmen können die Kosten durch die Funktion $\tilde{K}$ mit $\tilde{K}(x)=20\sqrt{x^2+150}$ beschrieben werden, die Erlöse ebenfalls durch $E(x)=25x$. **/4**
Ermitteln Sie für dieses Unternehmen den Bereich, in dem es wirtschaftlich arbeitet.

**Koordinatensystem zu Aufgabe 2.5:**



## 3 Analytische Geometrie /33

Gegeben sind die Punkte $A(2|10|-2)$, $B(8|4|-1)$ und $C(6|2|-1)$ sowie die Ebene $E_1$: $x - y - 4z = 8$.

**3.1** Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene $E_2$, in der die Punkte *A*, *B* und *C* liegen. **/6**

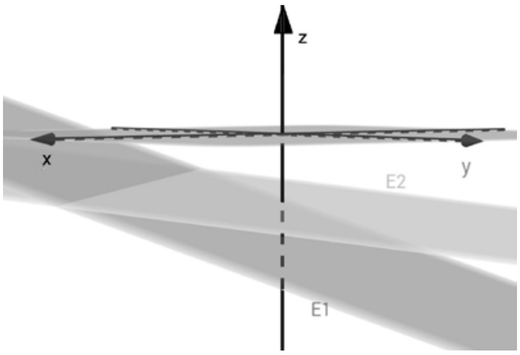
*Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung lautet* $E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} = 0$

**3.2** Berechnen Sie den Schnittwinkel *α* der Ebenen $E_1$ und $E_2$. **/4**

**3.3** Berechnen Sie den Abstand des Punktes *A* von der Ebene $E_1$. **/4**

**3.4** Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch die Punkte B und C geht. Weisen Sie nach, dass diese Gerade die Schnittgerade der Ebenen $E_1$ und $E_2$ ist. **/5**

**3.5** Die Lage von zwei dünnen, wasserundurchlässigen Erdschichten kann durch die Ebenen $E_1$ und $E_2$ beschrieben werden. Dazwischen liegt wasserführendes Erdreich. Die Erdoberfläche liegt in der *x*-*y*-Ebene. Eine Längeneinheit beträgt 1 km. Im Punkt $P(6|14|0)$ wird eine senkrecht zur Erdoberfläche nach unten führende Probebohrung angesetzt. **/7**



Skizze nicht maßstabsgerecht.

Berechnen Sie, in welchen beiden Punkten diese Bohrung auf die beiden Ebenen treffen wird.
Ermitteln Sie den Abstand dieser beiden Punkte.

**3.6** Eine zweite Bohrung soll so ausgeführt werden, dass sie im Punkt $Q(6|14|-4)$ im rechten Winkel auf die Ebene $E_1$ trifft. **/7**
Bestimmen Sie den Punkt R auf der Erdoberfläche, in dem diese Bohrung beginnen muss.
Bei dieser Bohrung wird das Bohrgestänge 3 km lang vorwärts getrieben.
Untersuchen Sie, ob sich die Spitze der Bohrung dann in dem wasserführenden Erdreich befindet.

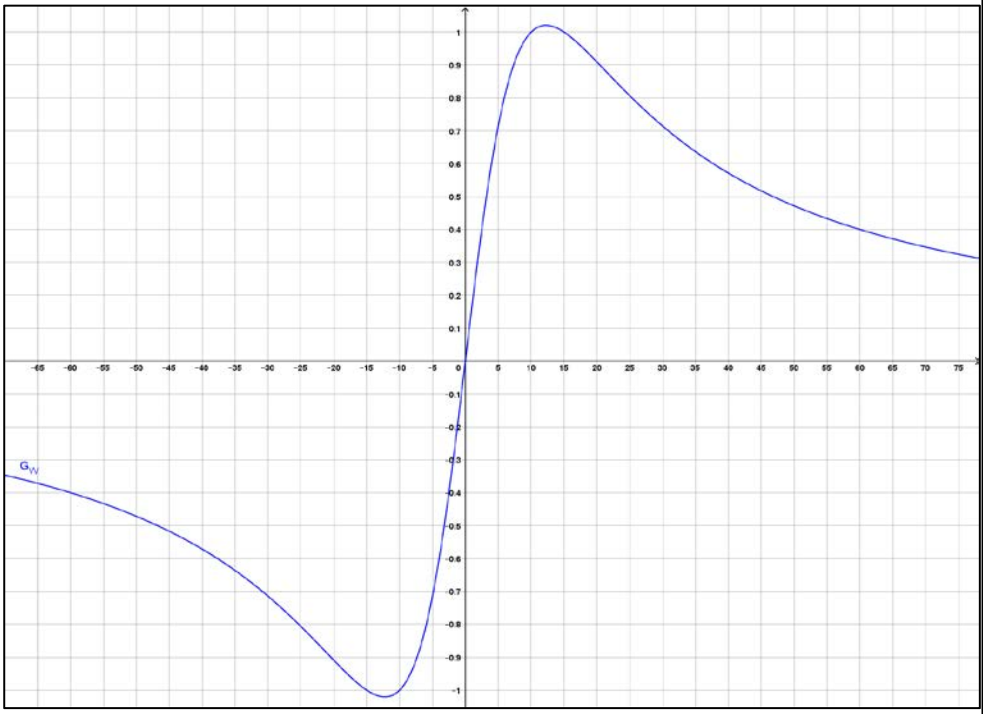
**Abschlussprüfung Berufsoberschule 2018**
**Mathematik**

**Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B**

| Teilaufgabe | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| **1.1** | Nachweis der Achsensymmetrie:<br>$f(-x)=217-15\left(e^{-\frac{x}{30}}+e^{\frac{x}{30}}\right)=f(x)$<br>Berechnung der inneren Höhe:<br>$f(0)=217-15\left(e^{0}+e^{0}\right)=217-30=187$<br>Der Bogen ist innen 187 m hoch. | 2<br>2 | | |
| **1.2** | Ableitung bilden:<br>$f'(x)=0-15\left(\frac{1}{30}e^{\frac{x}{30}}-\frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}\right)=-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{30}}-e^{-\frac{x}{30}}\right)$<br>Nullstellen ablesen: $x_N=\pm 80$<br>Anstieg an der Nullstelle berechnen:<br>$f'(80)=-\frac{1}{2}\left(e^{\frac{80}{30}}-e^{-\frac{80}{30}}\right)\approx -7{,}16$ (Alternativ kann $f'(-80)$ berechnet werden.)<br>Winkel ermitteln: $\alpha=\arctan(-7{,}16)\approx 98°$<br>Der berechnete Winkel ist der größere der beiden auftretenden Winkel.<br>Die Innenkante bildet mit dem Untergrund einen Winkel von 82°.<br>→ Eine umfangreiche Begründung für die Angabe des kleineren Winkels wird nicht erwartet. | | 6 | |
| **1.3** | $f(x)=217-15\left(e^{\frac{x}{30}}+e^{-\frac{x}{30}}\right)$<br>$F(x)=217x-15\left(\frac{1}{\frac{1}{30}}\cdot e^{\frac{x}{30}}+\left(\frac{1}{-\frac{1}{30}}\right)\cdot e^{-\frac{x}{30}}\right)$ Anwenden der Integrationsregeln<br>$F(x)=217x-15\left(30\cdot e^{\frac{x}{30}}+(-30)\cdot e^{-\frac{x}{30}}\right)$ Brüche vereinfachen<br>$F(x)=217x-450\left(e^{\frac{x}{30}}-e^{-\frac{x}{30}}\right)$ Ausklammern und Kürzen<br>Nachweis der Stammfunktion: $F'(x)=f(x)$<br>$F'(x)=217-450\left(\frac{1}{30}\cdot e^{\frac{x}{30}}-\left(-\frac{1}{30}\right)\cdot e^{-\frac{x}{30}}\right)+0$<br>$F'(x)=217-450\cdot\frac{1}{30}\left(e^{\frac{x}{30}}+e^{-\frac{x}{30}}\right)$<br>$F'(x)=217-15\left(e^{\frac{x}{30}}+e^{-\frac{x}{30}}\right)=f(x)$ | | 3 | 6 |

| Teil-aufgabe | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| **1.4** | Ansatz:<br>$g$ ist symmetrisch und nach unten geöffnet, also gilt $g(x) = -a_2x^2 + a_0$ .<br><br>Höhe 192 m $\Rightarrow$ $a_0 = 192$<br>Breite 192 m $\Rightarrow$ Nullstellen $x_{1/2} = \pm 96$<br>$\Rightarrow$ $0 = -a_2 \cdot 96^2 + 192$ $\Rightarrow$ $a_2 = \frac{1}{48}$<br>$\Rightarrow$ $g(x) = -\frac{1}{48}x^2 + 192$ | | 2<br><br>5 | |
| **1.5** | $A_{Quer} = A_g - A_f$<br>Stammfunktion zu $g$: $G(x) = -\frac{1}{3 \cdot 48}x^3 + 192x = -\frac{1}{144}x^3 + 192x$<br>$A_g = 2 \cdot \int_0^{96} g(x)dx = 2 \cdot \left(G(96) - G(0)\right)$<br>$A_g = 2 \cdot \left(12288 - 0\right) = 24576$<br>$A_f = 2 \cdot \int_0^{80} f(x)dx = 2 \cdot \left(F(80) - F(0)\right)$<br>$A_f = 2 \cdot \left(10915 - 0\right) = 21830$<br>$A_{Quer} = A_g - A_f = 24576 - 21830 = 2746$<br>Der Querschnitt des Bogens hat einen Flächeninhalt von 2746 m$^2$. | 1 | <br><br>7 | |
| | Summen der BE in den Anforderungsbereichen | 5 | 23 | 6 |
| | Summe der BE | 34 | | |

| Teil-aufgabe | Beschreibung der erwarteten Schülerleistung | BE/AB I | BE/AB II | BE/AB III |
|---|---|---|---|---|
| **2.1** | $W(x)=\frac{25x}{x^2+150}$<br>Untersuchung ob eine Definitionslücke oder Polstelle vorliegt.<br>Die Gleichung $0=x^2+150$ hat keine Lösung, daher existieren weder Lücken noch Polstellen.<br><br>D = IR<br><br>$W(x)$ ist punktsymmetrisch da, $W(x)=-W(-x)$.<br>(Alternative Begründungen sind ebenfalls zulässig.) | 3 | 2 | |
| **2.2** | $x_N$ ist eine Nullstelle $\Leftrightarrow W(x_N)=0$<br>$\frac{25x}{x^2+150}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 25x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_N=0$<br><br>Ansatz: $W(x)=1$<br>$0=x^2-25x+150$<br>$x_{1/2}=12{,}5\pm\sqrt{156{,}25-150}$<br>$x_1=15$ und $x_2=10$ | 2 | 3 | |
| **2.3** | $W'(x)=\frac{25(x^2+150)-25x(2x)}{x^4+300x^2+22500}$<br>$=\frac{-25x^2+3750}{x^4+300x^2+22500}$ | | 3 | |
| **2.4** | Berechnen der Extrempunkte:<br>$W'(x)=0 \Leftrightarrow -25x^2+3750=0 \Leftrightarrow x_{E1}\approx-12{,}25; x_{E2}\approx 12{,}25$<br>$E_1(-12{,}25 \mid -1{,}02)$<br>$E_2(12{,}25 \mid 1{,}02)$<br>Begründungen mit Hilfe der Symmetrie sind ebenfalls zulässig. | | 4 | |

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.5</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>25</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td></tr>
<tr><td>W(x)</td><td>0,71</td><td>1</td><td>1</td><td>0,91</td><td>0,81</td><td>0,71</td><td>0,57</td><td>0,47</td><td>0,40</td></tr>
</table>


</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>$D = \{x \in IR : x \geq 0\}$<br>Es können keine negativen Produktionsmengen produziert werden.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.7</td><td>$x < 10 \Rightarrow W(x) < 1$<br>$x > 15 \Rightarrow W(x) < 1$<br>$10 < x < 15 \Rightarrow W(x) > 1$<br>Die Produktion ist im Bereich der Produktionsmengen von mehr als 10 und weniger als 15 wirtschaftlich.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>2.8</td><td>$\tilde{W}(x) = 1$<br>$\Leftrightarrow 25x = 20\sqrt{x^2 + 150}$<br>$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{800}{3}} \approx \pm 16,33$<br>Die negative Lösung entfällt, da nicht im Definitionsbereich.<br>Dieses Unternehmen arbeitet wirtschaftlich, wenn mindestens 17 Stück produziert werden.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>9</td><td>16</td><td>8</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

| Teilaufgabe | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| **3.1** | 2 Richtungsvektoren angeben, z.B. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\-6\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\-8\\1\end{pmatrix}$ | 2 | | |
| | Normalenvektor bestimmen, z.B. $\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-12\end{pmatrix}$ <br> Normalenform von $E_2$: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\10\\-2\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-12\end{pmatrix}=0$ | | 4 | |
| **3.2** | Bestimmung des Schnittwinkels: <br> Der Winkel zwischen den Ebenen $E_1$ und $E_2$ ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-12\end{pmatrix}$. <br> $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left\lvert\overrightarrow{n_1}\right\rvert\cdot\left\lvert\overrightarrow{n_2}\right\rvert}=\frac{50}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{146}}\approx 0{,}975 \quad\Rightarrow\quad \alpha\approx 13°$ | | 4 | |
| **3.3** | Hesse´sche Normalenform von $E_1$: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}=0$ <br> Abstandsberechnung: <br> $d(A,E_1)=\left\lvert\left[\begin{pmatrix}2\\10\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{18}}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert-\frac{4}{3}\sqrt{2}\right\rvert\approx 1{,}89$ LE | | 4 | |
| **3.4** | Angabe der Geradengleichung: <br> $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\4\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ | 2 | | |
| | Begründung für Schnittgerade: <br> $B$ und $C$ liegen in $E_2$, also liegt auch $h$ in $E_2$. <br> Punktprobe für $B$ und C in $E_1$ ergibt <br> $8-4-4\cdot(-1)=8$ (wahre Aussage) für $B$ und <br> $6-2-4\cdot(-1)=8$ (wahre Aussage) für C. <br> Damit liegt $h$ auch in $E_1$ und ist somit die Schnittgerade beider Ebenen. | | 3 | |

| Teil-aufgabe | Erwartete Teilleistung | BE in AB I | II | III |
|---|---|---|---|---|
| **3.5** | Punkt $S(6\,\vert\,14\,\vert\,z)$ in $E_1$ und $E_2$ einsetzen ergibt $z=-4$ für $E_1$ und $z=-2$ für $E_2$;<br>$S_1(6\,\vert\,14\,\vert\,-4), S_2(6\,\vert\,14\,\vert\,-2)$<br>Der Abstand der Punkte beträgt 2 km. | | 7 | |
| **3.6** | Aufstellen der Geradengleichung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$<br>$z=0$ für $r=-1$ $\Rightarrow$ Die Bohrung muss in $R(5\,\vert\,15\,\vert\,0)$ ansetzen.<br><br>Abstand $R$ zu $E_2$:<br>$R \cap E_2: \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow s = \frac{26}{50} \Rightarrow$ d($R$, $E_2$) $\approx$ 2,2<br><br>Abstand $R$ zu $E_1$:<br>$d(R,E_1) = \left\vert\overrightarrow{RQ}\right\vert = \sqrt{18} \approx 4{,}2$<br>Die Spitze der Bohrung geht durch $E_2$ hindurch, hat aber $E_1$ noch nicht erreicht – sie befindet sich also im wasserführenden Erdreich. | | | 7 |
| | Summen der BE in den Anforderungsbereichen | 4 | 22 | 7 |
| | Summe der BE | 33 | | |