Abschlussprüfung Berufsoberschule 2018
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Exponentialfunktionen /34

Zum Kühlen von Getränken können Stäbchen verwendet werden, die mit einer besonderen Kühlflüssigkeit gefüllt sind und im Tiefkühlschrank gekühlt werden. Bei Bedarf kann ein Stäbchen in ein Getränkeglas gesteckt werden. Dann kühlt es das Getränk, dabei erwärmt sich das Stäbchen im Laufe der Zeit. Der Erwärmungsvorgang des Stäbchens kann beschrieben werden durch die Funktion *f* mit

$$f(x) = 20 - 38e^{-\frac{1}{20}x}.$$

Dabei gibt *x* die Zeit in Minuten an, die seit dem Herausnehmen verstrichen ist, und *f(x)* die Temperatur in Grad Celsius. Der Graph der Funktion ist G_f.

1.1 Bestimmen Sie die Anfangstemperatur des Stäbchens. **/3**
Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion für den Erwärmungsprozess an.

1.2 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

x in Minuten	5	10	15	20	30	40	50	60
$f(x)$ in °C	-9,59		2,05		11,52		16,88	

Zeichnen Sie mit Hilfe der ermittelten Werte den Graphen von *f* im Intervall $0 \le x \le 60$. Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der folgenden Seite. Beschriften Sie die Koordinatenachsen.

1.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion *f* für *x* im Unendlichen. **/3**

1.4 Weisen Sie nach, dass die Erwärmungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $x = 10$ ca. 1,15 °C/Minute beträgt. Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem die Erwärmungsgeschwindigkeit (in °C pro Minute) halb so groß ist wie für $x = 10$. **/8**

1.5 Einige Stäbchen erwärmen sich für 30 Minuten wie durch die Wertetabelle zu 1.2 beschrieben. Dann werden sie wieder in den Tiefkühlschrank gelegt. Der Abkühlungsprozess, der ab $x = 30$ beginnt, kann beschrieben werden mit Hilfe der Funktion *k* mit **/8**

$$k(x) = a \cdot e^{b \cdot x} - 18\,;\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Die Stäbchen haben nach weiteren 16,5 Minuten im Tiefkühlschrank eine Temperatur von null Grad Celsius.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion *k* im nachfolgenden Koordinatensystem.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion *k.*

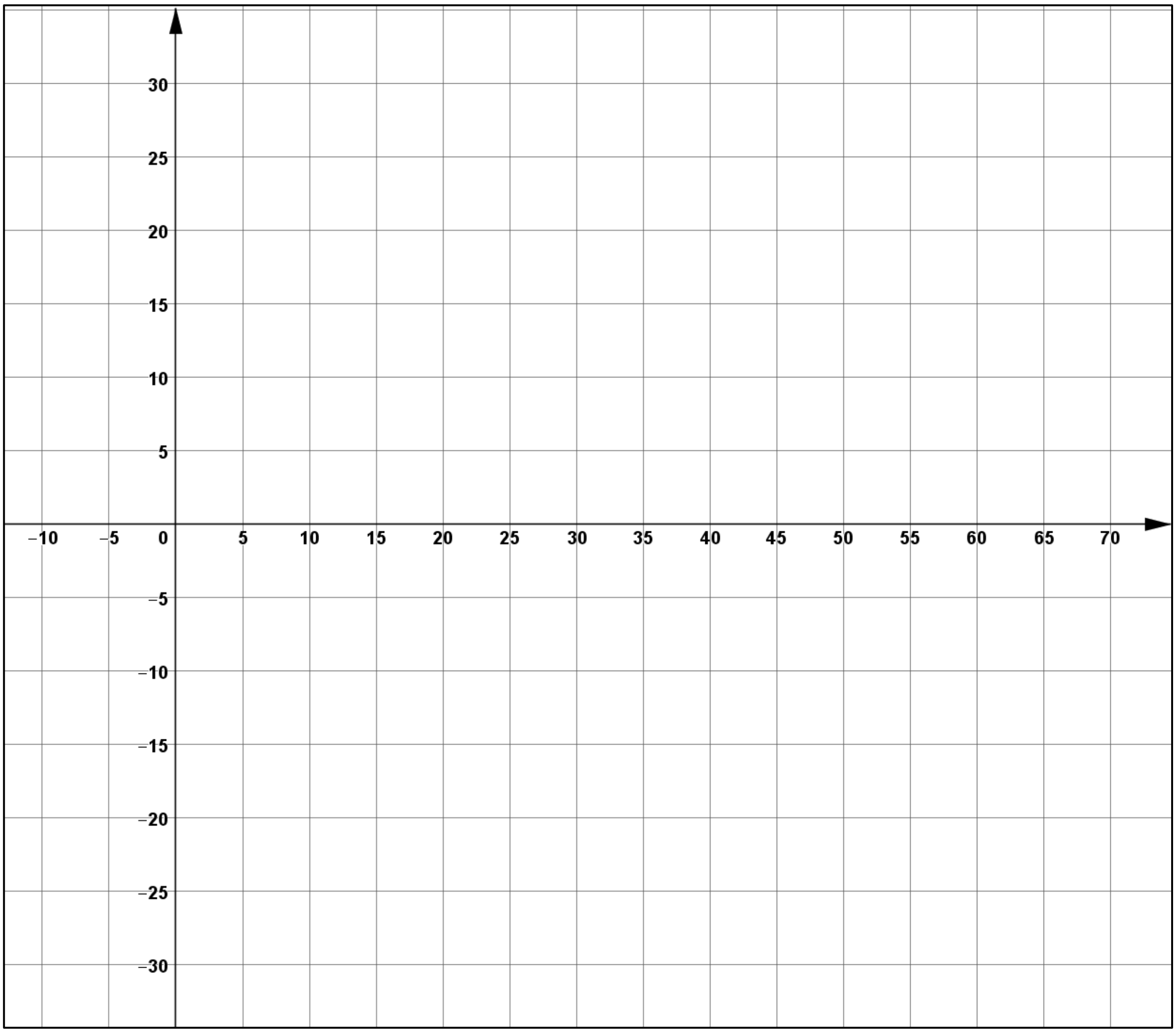
Fortsetzung auf der nächsten Seite →

1.6 Für den Fall, dass die Umgebungstemperatur im Laufe der Zeit sinkt, kann die Temperatur der Flüssigkeit näherungsweise durch die Funktion h mit **/6**

$$h(x) = (20 - 0{,}1x) - 38e^{-0{,}05x}$$

beschrieben werden.
Berechnen Sie, wann die Temperatur der Flüssigkeit maximal wird.
Ermitteln Sie die maximale Temperatur.
(Hinweis: Dass es sich um ein Maximum handelt, muss nicht nachgewiesen werden.)

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.2 und 1.5:



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x)=\dfrac{-x^2+7x+8}{x+3}$.

2.1 Bestimmen Sie die Polstelle der Funktion *f*. **/3**
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion *f* in der Umgebung der Polstelle.
Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von *f* an.

2.2 Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion *f* mit den Koordinatenachsen. **/3**

2.3 Die Asymptote von *f* ist eine fallende Gerade *a*. **/3**
Bestimmen Sie die Gleichung dieser Asymptote *a*.

2.4 Berechnen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f. **/7**

[Hinweis: Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden $f''(x)=\dfrac{-44}{(x+3)^3}$.]

Im Folgenden soll nun der Sachzusammenhang beachtet werden:
Ein Marktforschungsunternehmen hat in einem Kaufhaus untersucht, wie sich die Lautstärke der Hintergrundmusik auf die Einnahmen auswirkt. Dieser Zusammenhang kann gut durch die Funktion *f* beschrieben werden.
Dabei stellt *x* die Lautstärke der Musik auf einer Skala dar, die bei 0 beginnt. *f*(*x*) sind dann die stündlichen Einnahmen des Kaufhauses in 1000 € bei der eingestellten Lautstärke.

2.5 Entscheiden Sie, welcher Definitionsbereich für die Beschreibung des untersuchten Zusammenhanges verwendet werden sollte. Begründen Sie Ihre Entscheidung. **/2**

2.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

x	0	0,5	1	2	4	6	8
$f(x)$		3,21					

Ergänzen Sie die Achsenbezeichnungen im Koordinatensystem auf der folgenden Seite.
Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer oben berechneten Ergebnisse und der Wertetabelle den Graphen von *f* in das Koordinatensystem ein.

2.7 Beantworten Sie unter Verwendung Ihrer Rechenergebnisse folgende Fragen: **/5**

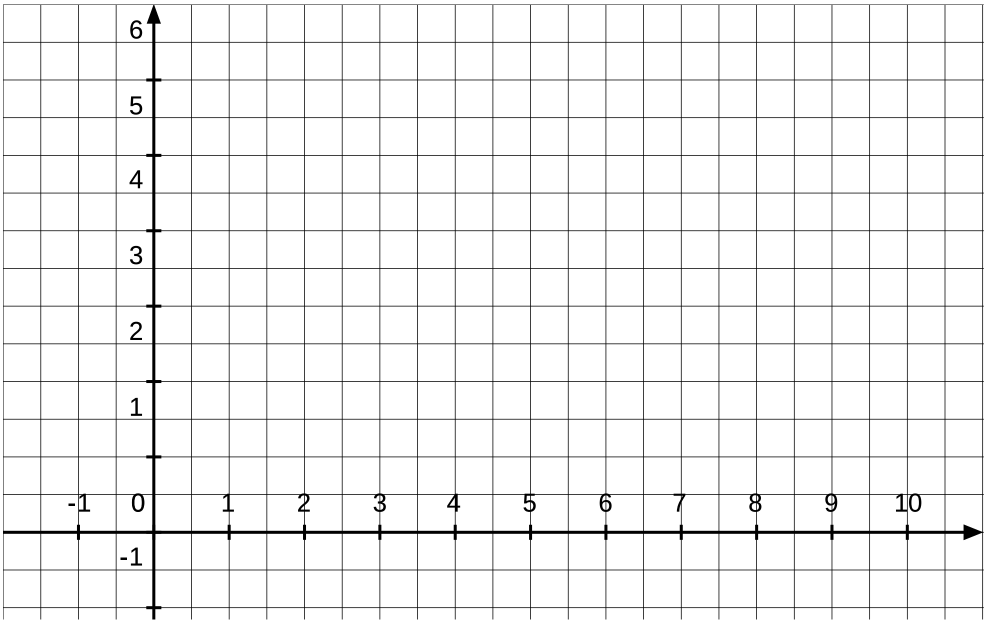
- Wie hoch sind die stündlichen Einnahmen des Kaufhauses ohne Hintergrundmusik?
- Bei welcher Lautstärke ist davon auszugehen, dass die Kunden nichts mehr kaufen?
- Bei welcher Lautstärke sind die höchsten Einnahmen zu erwarten?
- Um wie viel Prozent lassen sich die Einnahmen durch den Einsatz von Musik maximal steigern?

2.8 Einer früheren Studie zufolge soll der Zusammenhang zwischen den Einnahmen und der Lautstärke *x* durch die Funktion *g* mit **/4**

$$g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \quad (0 \le x \le 4)$$

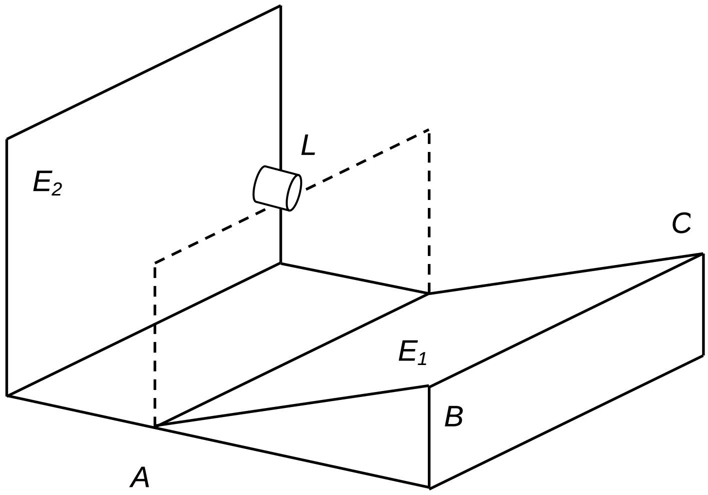
erfasst werden. Berechnen Sie die Stellen *x* der Lautstärke, für die beide Studien die gleichen Einnahmen ergeben.

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.6:



3 Analytische Geometrie /33

Eine Event-Agentur bereitet ein Konzert vor.
Die Zuschauertribüne befindet sich auf einer ansteigenden rechteckigen Fläche. Drei Eckpunkte dieser Fläche sind bekannt: $A(7|5|0)$, $B(19|2|6)$ und $C(23|18|6)$,
1 LE = 1 m.



Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.

3.1 Weisen Sie nach, dass die Zuschauertribüne im Punkt B einen rechten Winkel besitzt. **/4**

3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Zuschauertribüne. **/4**

3.3 Die Zuschauertribüne liegt in der Ebene E_1. Geben Sie eine Gleichung für E_1 in Parameterform und in Koordinatenform an. **/7**

[Zur Kontrolle: Eine mögliche Form der Gleichung lautet: $8x - 2y - 17z = 46$]

3.4 Der Erdboden liegt in der x-y-Ebene. Berechnen Sie den Winkel, welchen die Zuschauertribüne mit dem Erdboden bildet. **/4**

Im Punkt $L(9|13|10{,}5)$ soll an einem Gerüst ein Projektor angebracht werden. Er projiziert u. a. an eine Leinwand, die in der Ebene E_2 angebracht ist.

Eine Gleichung dieser Ebene lautet: E_2: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

In einer Einstellung hat der Lichtstrahl die Richtung $\vec{m} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

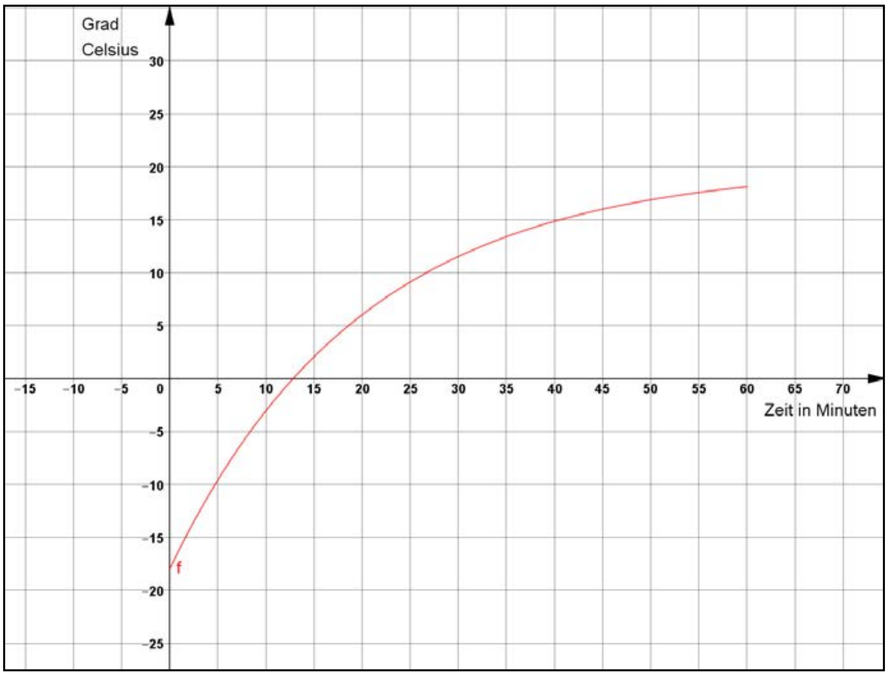
3.5 Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der der Lichtstrahl verläuft. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q, in welchem der Lichtstrahl auf die Leinwand E_2 trifft. **/7**

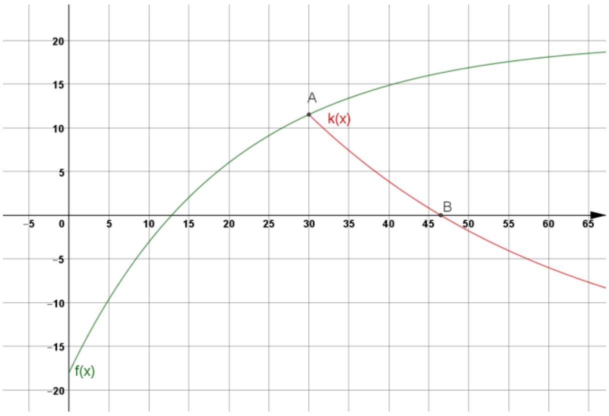
3.6 Der Projektor L muss aus Sicherheitsgründen einen Abstand von mindestens 10 Metern von der Zuschauertribüne haben.
Berechnen Sie die die Koordinaten des Punktes P_0 auf der Zuschauertribüne, der den geringsten Abstand zum Projektor L hat.
Prüfen Sie durch Rechnung, ob der geforderte Mindestabstand eingehalten wird. **/7**

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2018
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$f(0) = -18$
Die Anfangstemperatur der Eiswürfel beträgt -18 °C.

$D = \{x \in \mathrm{IR} : x \geq 0\}$</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td><table><tr><td>x in Minuten</td><td>5</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td></tr><tr><td>f(x) in °C</td><td>-9,59</td><td>-3,05</td><td>2,05</td><td>6,02</td><td>11,52</td><td>14,86</td><td>16,88</td><td>18,11</td></tr></table>

</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Der $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ muss nicht untersucht werden.
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 20$
Die Temperatur der Eiswürfel nähert sich der Zimmertemperatur von 20°C an.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>$f'(x) = 1{,}9 \cdot e^{-\frac{1}{20}x}$
$f'(10) = 1{,}15$
Zum Zeitpunkt $x = 10$ beträgt die Erwärmungsgeschwindigkeit 1,15 °C pro Minute.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

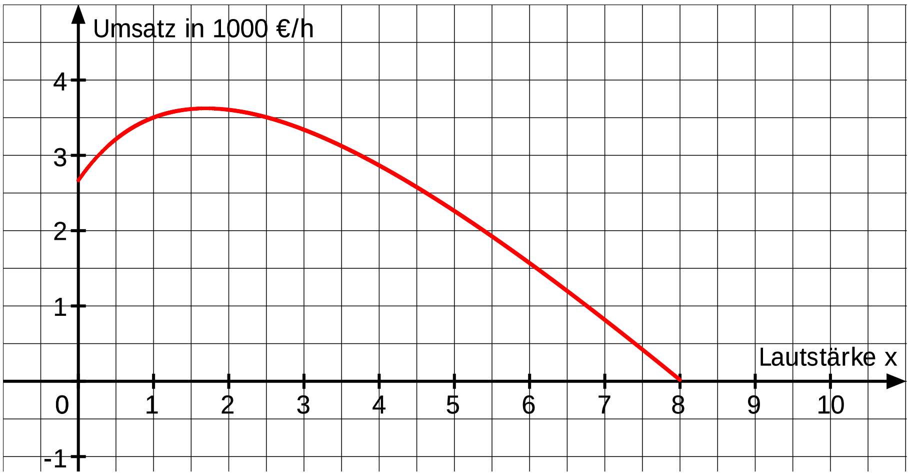
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>$f'(x)=\frac{1}{2}f'(10)$
$1{,}9\cdot e^{-\frac{1}{20}x}=0{,}575$
$e^{-\frac{1}{20}x}=0{,}3026$
$-\frac{1}{20}x=-1{,}1952$
$x=23{,}9$
Nach etwa 23,9 Minuten ist die Erwärmungsgeschwindigkeit nur halb so groß wie zur Zeit $x=10$.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>

Ansatz:
$k(30)=11{,}52$
$k(46{,}5)=0$
I $\quad 11{,}52=a\cdot e^{b\cdot 30}-18$
II $\quad 0=a\cdot e^{b\cdot 46{,}5}-18$
I $\quad 29{,}52=a\cdot e^{b\cdot 30}$
II $\quad 18=a\cdot e^{b\cdot 46{,}5}$
$0{,}60976=e^{16{,}5\cdot b}$
$b=-0{,}03$
in II: $a=72{,}63$
$k(x)=72{,}63\cdot e^{-0{,}03\cdot x}-18$</td><td></td><td>3</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>$h'(x)=-0{,}1+1{,}9e^{-0{,}05x}$
$0=-0{,}1+1{,}9e^{-0{,}05x}$
$\frac{1}{19}=e^{-0{,}05x}$
$-2{,}9444=-0{,}05x$
$x_{max}=58{,}89$
Nach 58,89 Minuten beträgt die maximale Temperatur 12,11°C.</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>5</td><td>24</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">34</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>D = IR \ {-3}
$f(-3{,}01) = 2213$
$f(-2{,}99) = -2187$
$x_1 = -3$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel + → -.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>x_N ist eine Nullstelle $\Leftrightarrow$ $f(x_N) = 0$
$\frac{-x^2+7x+8}{x+3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2+7x+8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -1; x_3 = 8$
$S_{x2}(-1 \mid 0); S_{x3}(8 \mid 0)$
$f(0) = \frac{8}{3}$; $S_y(0 \mid \frac{8}{3})$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>$(-x^2+7x+8):(x+3) = -x+10-\frac{22}{x+3}$
$-(-x^2-3x)$
$10x+8$
$-(10x+30)$
-22
$a(x) = -x+10$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>$f'(x) = \frac{(-2x+7)(x+3)-(-x^2+7x+8)}{(x+3)^2}$
$= \frac{-2x^2-6x+7x+21+x^2-7x-8}{(x+3)^2} = \frac{-x^2-6x+13}{(x+3)^2}$

Berechnen der Extrempunkte:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2-6x+13 = 0 \Leftrightarrow x_{E1} = -7{,}69;\ x_{E2} = 1{,}69$
$f''(x_{E1}) = 0{,}43 > 0 \Rightarrow T(-7{,}69 \mid 22{,}4)$
$f''(x_{E2}) = -0{,}43 < 0 \Rightarrow H(1{,}69 \mid 3{,}62)$</td><td></td><td>2

5</td><td></td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>Sinnvoll ist der Bereich $0 \le x \le 8$, danach wird $f(x)$ negativ.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>2,67</td><td>3,21</td><td>3,5</td><td>3,6</td><td>2,86</td><td>1,56</td><td>0</td></tr>
</table>
</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	II	III
			4	
2.7	Die stündlichen Einnahmen betragen ohne Musik 2667 €. Bei Lautstärke „8“ wird nichts mehr verkauft. Die größten Einnahmen sind bei einer Lautstärke „1,69“ zu erwarten. maximale Einnahmen: 3620 €; ohne Musik: 2667 € $\frac{3620}{2667} = 1{,}357 \approx 136\%$ Es ist also möglich, den Umsatz durch den Einsatz von Musik um 36% zu steigern.			5
2.8	Der Ansatz: $\frac{-x^2+7x+8}{x+3} = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$ führt auf die Gleichung $0 = \frac{4}{3}x^2 - \frac{10}{3}x$ mit den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2{,}5$. Die beiden Studien liefern für die Lautstärken 0 und 2,5 die gleichen Ergebnisse.			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	14	9
	Summe der BE		33	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}12\\-3\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\16\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BC}=48-48+0=0\Rightarrow$
$\overrightarrow{AB}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{BC}$.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{189}\approx 13,75$
$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{272}\approx 16,49$
$A=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|=226,7$
Die Zuschauertribüne hat eine Fläche von ungefähr 227 m².</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>$E_1: \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\5\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}12\\-3\\6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\16\\0\end{pmatrix}$
Normalenvektor:
$\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}12\\-3\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\16\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-96\\24\\204\end{pmatrix}$
$E_1:\ -96x+24y+204z=d$
A einsetzen: $-96\cdot 7+24\cdot 5=d$
$-552=d$
$E_1:\ -96x+24y+204z=-552 \mid :(-12)$
$E_1:\ 8x-2y-17z=46$</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>3.4</td><td>$\overrightarrow{n_1}=\begin{pmatrix}8\\-2\\-17\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_2}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
$\cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{17}{\sqrt{357}}=0,8997$
$\alpha=\arccos 0,8997\approx 25,9°$</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Geradengleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 9 - 4r \\ y = 13 + r \\ z = 10{,}5 - 4r \end{array}$$

$$E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4x - y = -11$$

Einsetzen von g in E_2:
$4(9-4r)-(13+r) = -11 \quad \Rightarrow \quad r = 2$
Berechnen des Schnittpunktes:

$$\overrightarrow{x_Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

Der Lichtstrahl trifft im Punkt $Q(1|15|2{,}5)$ auf die Leinwand.</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>3.6</td><td>Der nächstgelegene Punkt der Ebene wird durch den Schnitt der Lotgeraden l mit der Ebene E_1 bestimmt.

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -17 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in E_1:
$8x - 2y - 17z = 46$
$8(9+8r) - 2(13-2r) - 17(10{,}5 - 17r) = 46$
$357r = 178{,}5$
$r = 0{,}5$

$$P_0: \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 10{,}5 \end{pmatrix} + 0{,}5 \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$ damit gilt: $P_0\ (13|12|2)$.

Abstand: $\left|\overrightarrow{P_0L}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{89{,}25} \approx 9{,}45$

Der Projektor ist 9,45m von der Zuschauertribüne entfernt. Der erforderliche Mindestabstand wird bei diesem Aufbau nicht eingehalten.</td><td></td><td></td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>8</td><td>18</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>