Abschlussprüfung Berufsoberschule 2017
Mathematik

Aufgabenvorschlag C

1 Exponentialfunktionen /34

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x$.
Der Graph der Funktion ist G_f.

1.1 Geben Sie den Definitionsbereich und den Wertebereich der Funktion *f* an. **/2**

1.2 Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen. **/4**

1.3 Bestimmen Sie die Lage und Art der lokalen Extrempunkte von G_f. **/8**
[zur Kontrolle: $f'(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$]

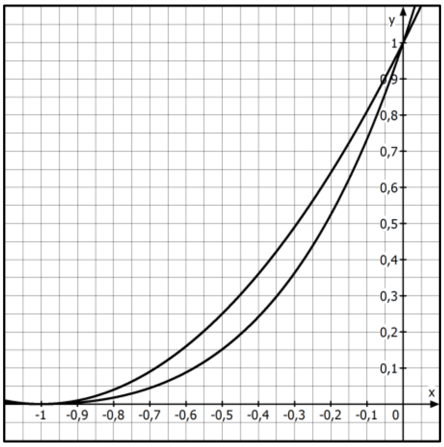
1.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

x	– 3,2	–1	– 0,8	– 0,6	– 0,4	– 0,2	0
$f(x)$	0,197		0,018		0,241		

Zeichnen Sie mit Hilfe aller berechneten Ergebnisse den Graphen von *f* im Intervall $-3{,}2 \le x \le 0$. Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

1.5 Der Graph einer quadratischen Funktion *g* mit $g(x) = ax^2 + bx + c$ soll ebenfalls bei $T(-1\,|\,0)$ einen Tiefpunkt haben und auch im Punkt $S_y(0\,|\,1)$ die *y*-Achse schneiden. **/7**
Geben Sie drei Bedingungen an, die *g* erfüllen muss und ermitteln Sie die Werte von *a*, *b* und *c* und geben Sie die Funktionsgleichung an.
[zur Kontrolle: $g(x) = (x+1)^2$]

1.6 In der Abbildung sind Ausschnitte der Graphen von *f* und *g* dargestellt. Begründen Sie, dass der obere Graph zur Funktion *g* gehört. **/2**

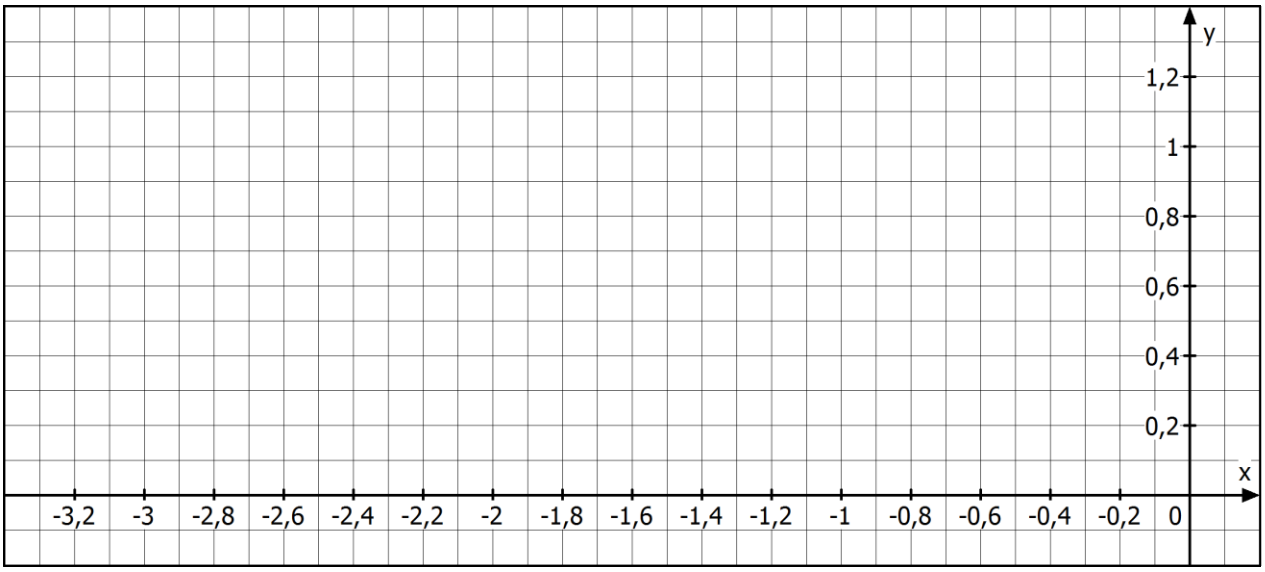


1.7 Für $-1 \le x \le 0$ schließen die Graphen G_f und G_g im zweiten Quadranten eine Fläche ein. **/5**
Berechnen Sie unter Verwendung des nachfolgenden Integrals, wie groß diese Fläche ist.

$$\int (x+1)^2 \cdot e^x dx = (x^2+1) \cdot e^x + C$$

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4:



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion *f* mit der Gleichung $f(x)=\frac{x^3+x^2-4x-4}{4x^2-6x-10}$.

Der Graph ist G_f.

2.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion *f*. **/6**
Geben Sie die Art der Definitionslücken der Funktion *f* an und untersuchen Sie das Verhalten von G_f in der Umgebung dieser Stellen.

2.2 Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen. **/5**

2.3 Die Funktion *g* mit $g(x)=\frac{x^2-4}{4x-10}$ besitzt die gleichen Nullstellen, Polstellen und Extrema wie die Funktion *f*. **/9**
Berechnen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_g.

[Hinweis: Ein Nachweis, dass *g* die gleichen Nullstellen und Polstellen hat wie *f*, ist nicht erforderlich.]

[Zur Kontrolle: $g'(x)=\frac{4x^2-20x+16}{(4x-10)^2}$]

2.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten der Funktion *g*. **/3**

2.5 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/6**

x	– 4	– 3	– 1	3	5	6
g(*x*)	– 0,46		0,21			

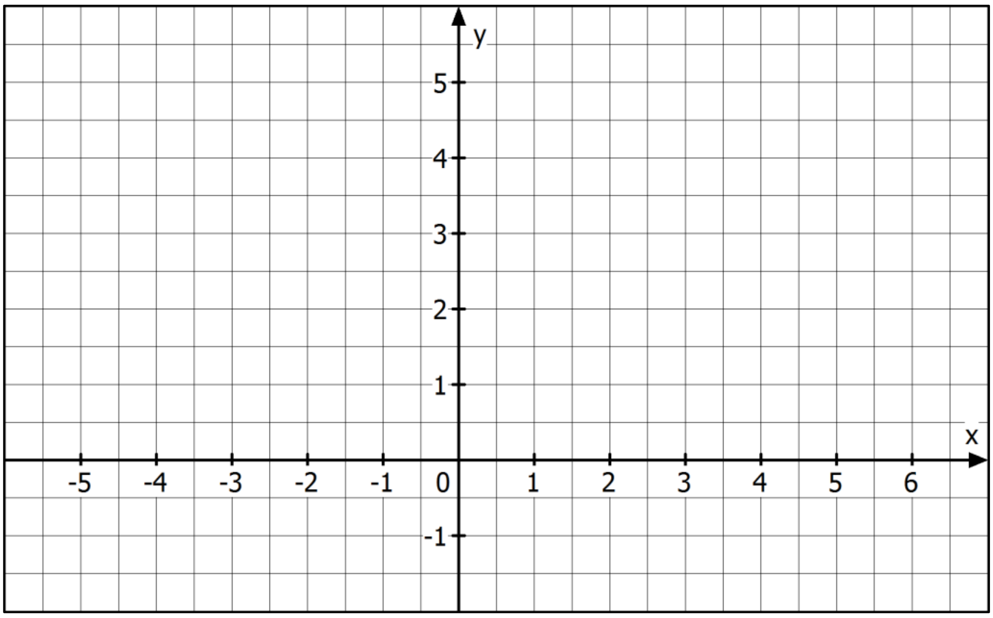
Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer berechneten Ergebnisse die Graphen der Funktion *g* und der Asymptote im Intervall $-4\le x\le 6$ in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

2.6 Die Funktion *g* wird jetzt durch Einführung eines Parameters *k* zur Funktion *h* mit **/4**
$h(x)=\frac{x^2-4}{kx-10}$ verändert.

Berechnen Sie den Wert des Parameters *k*, so dass die Funktion *h* an der Stelle $x=0$ ein Extremum aufweist.
Ein Nachweis des Extremums ist nicht gefordert.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.5



3 Analytische Geometrie /33

Die Abbildung zeigt eine Zielscheibe, wie sie beim Bogenschießen verwendet wird. In der Scheibe liegen die Punkte $A(-5005\,|\,100\,|\,150)$, $B(-5000\,|\,200\,|\,100)$ und das Zentrum $Z(-5000\,|\,150\,|\,100)$.
Der Erdboden liegt in der x-y-Ebene.

[Hinweise: Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht
1 LE = 1 cm.]

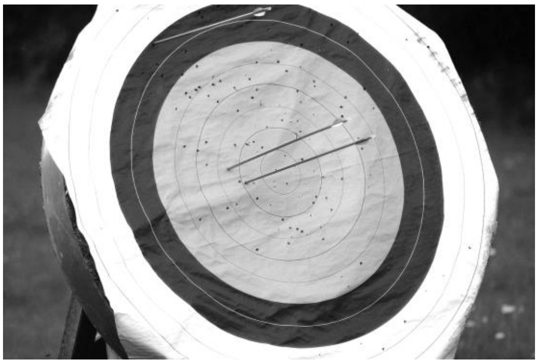


Abbildung: Zielscheibe beim Bogenschießen

3.1 Bestimmen Sie den Abstand der Punkte A und B zum Zentrum Z der Scheibe. **/5**

3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die drei Punkte A, B und Z gebildet wird. **/4**

3.3 Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform an, in der die Zielscheibe liegt. **/5**
[mögliches Ergebnis für E in Koordinatenform: $E: -10x - z = 49900$]

3.4 Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E (siehe 3.3) zum Koordinatenursprung. **/5**

3.5 Die Flugbahn eines Pfeils wird durch eine Gerade angenähert. **/4**
Ein Pfeil trifft genau senkrecht in das Zentrum der Scheibe.
Stellen Sie eine Gleichung für diese Gerade g auf, auf der dieser Pfeil fliegt.

Zwei Schützen schießen zum Zeitpunkt $u = 0$ bzw. $v = 0$ jeweils einen Pfeil ab. Für den Ort der Pfeilspitze zum Zeitpunkt u (bzw. v) in Sekunden gilt in vereinfachter Darstellung:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 170 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -10004 \\ 360 \\ -100 \end{pmatrix}; u \geq 0$$

Bogenschütze 1

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -10006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix}; v \geq 0$$

Bogenschütze 2

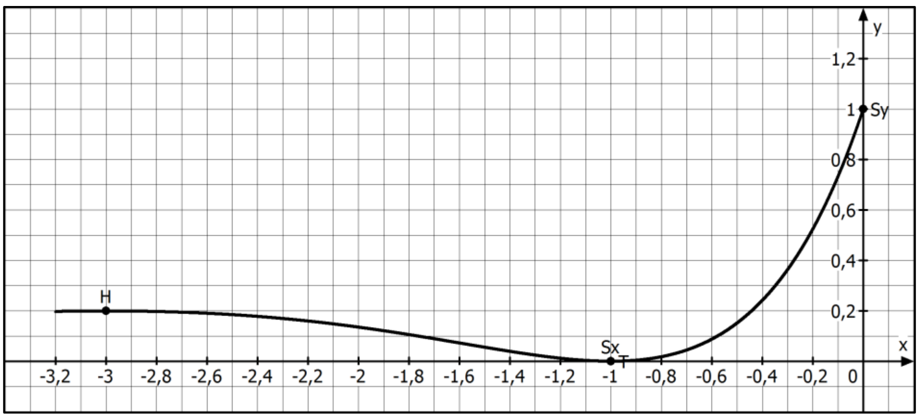
3.6 Begründen Sie, welcher Schütze vermutlich der Größere ist. **/3**

3.7 Bogenschütze 1 trifft die Zielscheibe im Punkt $S_1(-5002\,|\,180\,|\,120)$. **/7**
Berechnen Sie den Auftreffpunkt des Pfeils auf die Zielscheibe für Bogenschütze 2.
Begründen Sie, welcher Schütze bei diesem Schuss der Bessere ist.

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2017
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag C

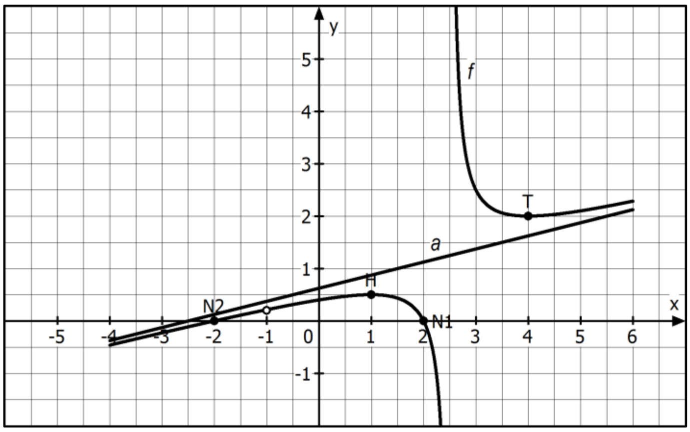
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
Wertebereich: $W = \mathbb{R}_0^+$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Schnittpunkt mit der y-Achse
Es gilt: $x = 0$
$x = f(0) = (0+1)^2 \cdot e^0 = 1;\ S_y(0 \mid 1)$
Schnittpunkte mit der x-Achse
Es gilt: $y = 0$
$(x+1)^2 \cdot e^x = 0$
Da $e^x = 0$ keine Lösung liefert:
$(x+1)^2 = 0$
$x = -1;\ S_x(-1 \mid 0)$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>$f'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot e^x + (x+1)^2 \cdot e^x$
$\quad = e^x \cdot (2x + 2 + x^2 + 2x + 1)$
$\quad = e^x \cdot (x^2 + 4x + 3)$
$f'(x) = 0;\ e^x \cdot (x^2 + 4x + 3) = 0$
Da $e^x = 0$ keine Lösung liefert:
$x^2 + 4x + 3 = 0$
$x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4-3};\ x_1 = -1;\ x_2 = -3$
$f''(x) = (2x+4) \cdot e^x + (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$
$\quad = (x^2 + 6x + 7) \cdot e^x$
$f''(-1) = 2 \cdot e^{-1} > 0;$ Tiefpunkt bei $T(-1 \mid 0)$
$f''(-3) = -2 \cdot e^{-3} < 0;$ Hochpunkt bei $H(-3 \mid 0{,}2)$</td><td></td><td>3

5</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td><table><tr><td>x</td><td>– 3,2</td><td>–1</td><td>– 0,8</td><td>– 0,6</td><td>– 0,4</td><td>– 0,2</td><td>0</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0,197</td><td>0</td><td>0,018</td><td>0,088</td><td>0,241</td><td>0,524</td><td>1</td></tr></table>

</td><td>2

4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.5	Ansatz: $g(x) = ax^2 + bx + c$ Bedingungsgefüge: 1. $g(-1) = 0$ (Punkt $T(-1\|0)$) 2. $g'(-1) = 0$ (Tiefpunkt T) 3. $g(0) = 1$ (Punkt $S_y(0\|1)$) Gleichungssystem: Aus $g(0) = 1$ folgt $c = 1$. I. $-1 = a - b$ II. $0 = -2a + b$ Lösen des Gleichungssystems ergibt: $a = 1; b = 2; c = 1$ Für die Funktionsgleichung gilt: $g(x) = x^2 + 2x + 1$ oder $g(x) = (x+1)^2$ Alternative: Vergleich der Punkte durch Einsetzen und Nachweis für den Tiefpunkt.		3 4	
1.6	Berechnung der jeweiligen Funktionswerte an einer bestimmten Stelle, z. B. $x = -0{,}4$ $f(-0{,}4) \approx 0{,}24$; $g(-0{,}4) = 0{,}36$ Daher ist der obere Graph der Graph der Funktion *g*.		2	
1.7	$A = \int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ $\int_{-1}^{0} (x+1)^2 \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \left[(x^2+1)\cdot \mathrm{e}^x\right]_{-1}^{0} = \mathrm{e}^0 - 2\cdot \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}264$ $\int_{-1}^{0} (x+1)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = 0 + \frac{1}{3} + 1 - 1 = \frac{1}{3}$ Der Größe der Fläche beträgt ca. 0,069 FE.			5
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	12	17	5
	Summe der BE	34		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.1	x ist eine Definitionslücke, wenn $N(x)=0$ gilt. $4x^2-6x-10=0$ $x^2-1{,}5x-2{,}5=0$ $x_1=2{,}5\;\; x_2=-1$ Zählerpolynom überprüfen: $x_1^{\,3}+x_1^{\,2}-4x_1-4\neq 0$; $x_2^{\,3}+x_2^{\,2}-4x_2-4=0$ D = $\mathbb{R}\setminus\{-1;\,2{,}5\}$ Untersuchung der Umgebung durch Testeinsetzungen: $f(-1{,}01)=0{,}212$; $f(-0{,}99)=0{,}216$; $f(2{,}49)=-55$; $f(2{,}51)=57{,}5$ $x_1=2{,}5$ ist eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel $-\to+$, $x_2=-1$ ist eine hebbare Lücke	4	2	
2.2	Nullstelle: $0=\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{4x^2-6x-10}$ $x^3+x^2-4x-4=0$ Erste Lösung z. B. mittels Horner-Schema: $x_3=2$, weitere über Untersuchung des Restpolynoms: $x^2+3x+2=0$ mit den Lösungen $x_2=-1$ (hebbare Lücke) $x_4=-2$ Die Nullstellen sind $x_{N1/2}=\pm 2$. $S_1(2\,\vert\,0)$; $S_2(-2\,\vert\,0)$ Die y-Achse wird bei $f(0)=\dfrac{2}{5}$ geschnitten. $S_y(0\,\vert\,\tfrac{2}{5})$		5	
2.3	Berechnung der Extrema von $g(x)=\dfrac{x^2-4}{4x-10}$ $g'(x)=\dfrac{2x(4x-10)-(x^2-4)\cdot 4}{(4x-10)^2}=\dfrac{4x^2-20x+16}{(4x-10)^2}$ $g''(x)=\dfrac{(8x-20)(4x-10)^2-(4x^2-20x+16)\cdot 2(4x-10)\cdot 4}{(4x-10)^4}$ $g''(x)=\dfrac{(8x-20)(4x-10)-(4x^2-20x+16)\cdot 2\cdot 4}{(4x-10)^3}$ $g''(x)=\dfrac{72}{(4x-10)^3}$ Notwendige Bedingung: $0=\dfrac{4x^2-20x+16}{(4x-10)^2}\Leftrightarrow 4x^2-20x+16=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$ $x_5=4; x_6=1$ $g''(4)=0{,}33>0\Rightarrow T(4\,\vert\,2)$; $g''(1)=-0{,}33<0\Rightarrow H(1\,\vert\,0{,}5)$	4	5	

<table>
<tr><td>2.4</td><td>Bestimmung der Asymptote durch Polynomdivision:
$g(x)=\frac{x^2-4}{4x-10}=(x^2-4):(4x-10)=\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}+\frac{9}{4(4x-10)}$
$a(x)=\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}$</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.5</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>– 4</td><td>– 3</td><td>– 1</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$g(x)$</td><td>– 0,46</td><td>– 0,23</td><td>0,21</td><td>2,5</td><td>2,1</td><td>2,29</td></tr>
</table>


</td><td>2</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>2.6</td><td>$h(x)=\frac{x^2-4}{kx-10}$
$h'(x)=\frac{2x(kx-10)-(x^2-4)k}{(kx-10)^2}=\frac{kx^2-20x+4k}{(kx-10)^2}$
$h'(0)=\frac{4k}{100}=0$
$k=0$</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>10</td><td>19</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	$\left\|\overrightarrow{ZA}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-5005\\100\\150\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5000\\150\\100\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-5\\-50\\50\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{5025} \approx 70{,}89$ $\left\|\overrightarrow{ZB}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}-5000\\200\\100\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5000\\150\\100\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0\\50\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2500} = 50$ Der Abstand der Punkte *A* und *B* zum Zentrum beträgt 70,89 cm bzw. 50 cm.	5		
3.2	Inhalt der Dreiecksfläche: $A_{ABZ} = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-5\\-50\\50\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\50\\0\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-2500\\0\\-250\end{pmatrix}\right\| \approx 1256{,}2$ Die Dreiecksfläche beträgt ca. 1256,2 cm^2.		4	
3.3	Bestimmung eines möglichen Normalenvektors $\vec{n} = \overrightarrow{ZA} \times \overrightarrow{ZB} = \begin{pmatrix}-5\\-50\\50\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\50\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2500\\0\\-250\end{pmatrix}$ und *d* mit $d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix}-2500\\0\\-250\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-5000\\150\\100\end{pmatrix} = 12475000$ Eine Gleichung in Koordinatenform $E: -10x - z = 49900$		5	
3.4	$E: -10x - z = 49900$ $\vec{n} = \begin{pmatrix}-10\\0\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\|\vec{n}\right\| = \sqrt{101} \approx 10{,}05$ $\frac{-10x}{\sqrt{101}} - \frac{z}{\sqrt{101}} = \frac{49900}{\sqrt{101}} \approx 4965$ Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung beträgt ca. 4965 cm.		5	
3.5	Bestimmen eines Normalenvektors der Ebene *E* (z. B. aus 3.2): $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2500\\0\\-250\end{pmatrix}$ $g: x = \overrightarrow{OZ} + r\vec{n} = \begin{pmatrix}-5000\\150\\100\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-2500\\0\\-250\end{pmatrix}$	4		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.6	$u = 0$ bzw. $v = 0$ bedeutet den Zeitpunkt des Abschusses. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich die Pfeilspitze von Bogenschütze 1 in der Höhe von 170 cm, die von Schütze 2 in der Höhe von 180 cm. Damit ist Bogenschütze 2 vermutlich der Größere.		3	
3.7	$S_1(-5002 \mid 180 \mid 120)$ $\overline{ZS_1} = \sqrt{1304} \approx 36{,}11$ k und E: $\begin{pmatrix} 0 \\ 300 \\ 180 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} -10006 \\ -340 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5000 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -5 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$ $r = \frac{3}{5}$; $s = \frac{1}{5}$; $v = \frac{1}{2}$ Mit $v = \frac{1}{2}$ ergibt sich für den Schnittpunkt: $S_2(-5003 \mid 130 \mid 130)$ $\overline{ZS_2} = \sqrt{1309} \approx 36{,}18$ Bogenschütze 1 ist minimal besser.			7
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	9	17	7
	Summe der BE	33		