

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2017
Mathematik

Aufgabenvorschlag A

1 Exponentialfunktionen

/34

Eine Schadsoftware zum Ausspähen von Computern verbreitet sich über E-Mail-Kontakte. Die Anzahl befallener Computer steigt zunächst stark an. Durch Installation eines Sicherheitsupdates wird die Schadsoftware unschädlich gemacht.

Die Anzahl der befallenen Computer kann durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = 20x \cdot e^{1-0,3x}$$

Dabei gibt x die Zeit in Tagen an, die seit dem ersten Auftreten verstrichen ist und $f(x)$ die Anzahl der befallenen Computer in 1000 Stück. Der Vorgang beginnt bei $x = 0$.

Der Graph der Funktion ist G_f .

1.1 Ergänzen Sie die Wertetabelle.

/2

x in Tagen	0	1	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	0		59,67			39,46	27,07	

1.2 Berechnen Sie mit Hilfe der ersten und zweiten Ableitung, zu welchem Zeitpunkt die größte Anzahl von Computern befallen sein wird. Geben Sie diesen Zeitpunkt auch in Tagen und Stunden an.

/10

Berechnen Sie die Anzahl der zu diesem Zeitpunkt infizierten Computer.

[Zur Kontrolle: $f'(x) = (-6x + 20) \cdot e^{1-0,3x}$]

1.3 Berechnen Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung f'' , wann die Anzahl der betroffenen Computer am stärksten zurückgeht.

/4

Geben Sie an, wie groß die Abnahme pro Tag zu diesem Zeitpunkt ist.

Geben Sie die Anzahl der infizierten Computer zu diesem Zeitpunkt an.

[Hinweis: Auf die Prüfung des Ergebnisses z. B. mit Hilfe der 3. Ableitung kann verzichtet werden.]

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer errechneten Ergebnisse und der Tabellenwerte G_f im Intervall $[0;12]$ in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

/4

1.5 Um die durchschnittliche Anzahl der betroffenen Computer während der ersten 12 Tage zu erhalten, kann das Integral $\int_0^{12} f(x) dx$ berechnet und durch die Anzahl der Tage (12) geteilt werden.

/8

Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \left(-\frac{200}{3}x - \frac{2000}{9}\right) \cdot e^{1-0,3x}$ eine

Stammfunktion von f ist.

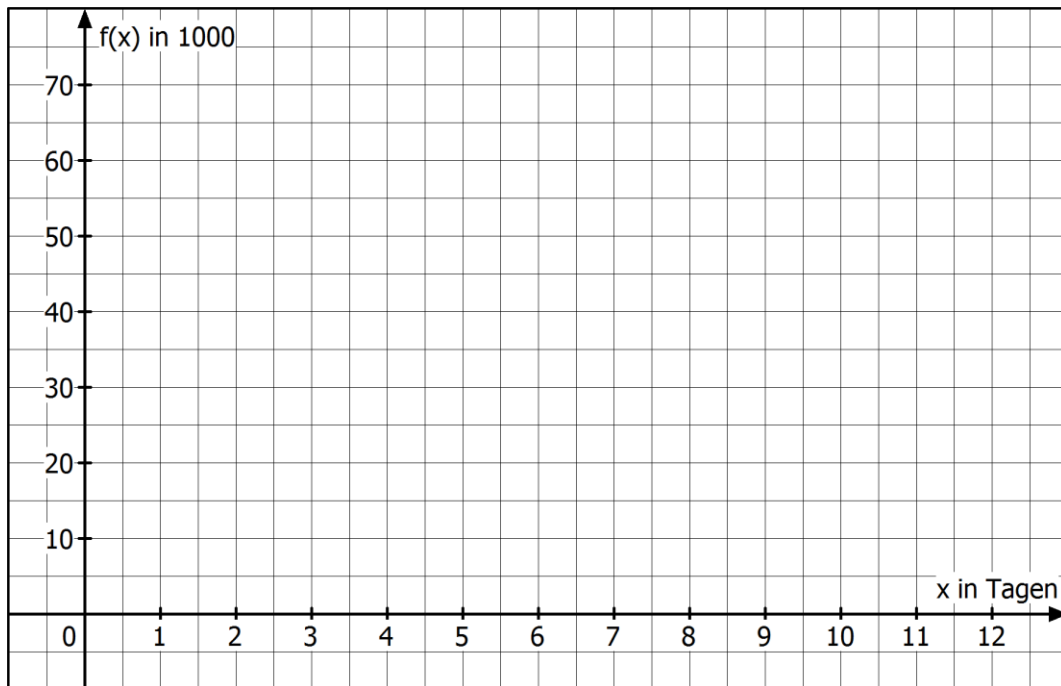
Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl der betroffenen Computer.

1.6 Die Ausbreitung eines anderen Computervirus wird durch die Funktion g mit $g(x) = 15x \cdot e^{2-0,4x}$ beschrieben.

/6

Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt $x > 0$ die Funktionen f und g die gleiche Anzahl befallener Computer ergeben.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4:

2 Gebrochenrationale Funktionen**/33**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2+3}$; $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph der Funktion ist G_f .

2.1 Weisen Sie nach, dass der Graph von f achsensymmetrisch zur y -Achse ist. **/2**

2.2 Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen. **/3**

2.3 Weisen Sie rechnerisch nach, dass gilt: $f'(x) = \frac{-24x}{(x^2+3)^2}$. **/8**

Berechnen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_f .

[Hinweis: Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden $f''(x) = \frac{72x^2-72}{(x^2+3)^3}$.]

2.4 Berechnen Sie die Wendepunkte von G_f . **/3**

[Hinweis: Für die Ermittlung der Wendepunkte ist nur die Untersuchung der notwendigen Bedingung erforderlich.]

2.5 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/5**

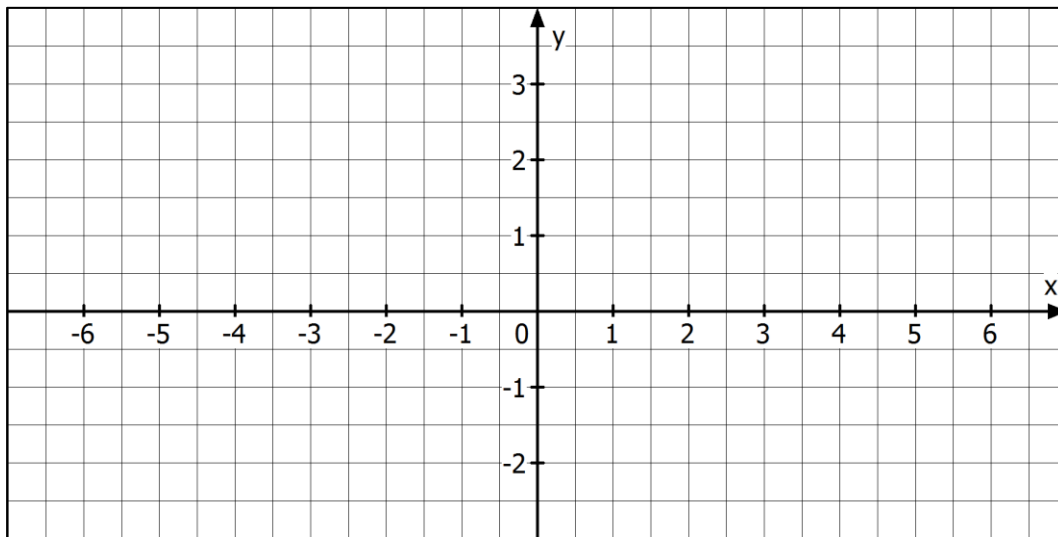
x	0	0,5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	2,692				-0,368		-0,692

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer berechneten Ergebnisse G_f im Intervall $-6 \leq x \leq 6$ in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite ein.

2.6 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $P(1|f(1))$.
Zeichnen Sie die Tangente in die Grafik (siehe Aufgabe 2.5). **/5**

2.7 Der Graph der Funktion $p(x) = 2 - \frac{1}{3}x^2$ ist eine nach unten geöffnete Parabel. **/7**
Untersuchen Sie, wie viele gemeinsamen Punkte die Graphen von f und p haben und geben Sie Koordinaten dieser Punkte an.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.5:

3 Analytische Geometrie

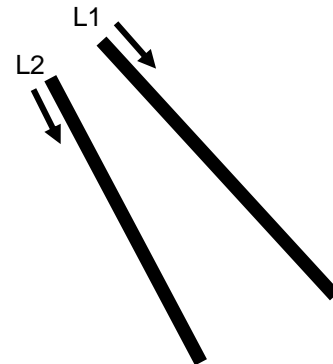
/33

Ein Flughafen besitzt zwei Start- bzw. Landebahnen, die nicht parallel zueinander verlaufen (siehe Abbildung).

Das Flughafengelände liegt in der x - y -Ebene.

Die Landebahn L1 verläuft in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



[Hinweise: Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht
1 LE = 1 m.]

Das Flugzeug F1 beginnt den Landeanflug auf den Flughafen zum Zeitpunkt $t = 0$ in 1200 m Höhe. Von diesem Zeitpunkt an fliegt es bis zum Aufsetzen auf den Boden mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Flugbahn.

Der Verlauf des Landeanfluges wird durch folgende Geradengleichung dargestellt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -14000 \\ -13000 \\ 1200 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad t \text{ ist die Zeit in Sekunden.}$$

- 3.1** Bestimmen Sie den Punkt A , in dem sich das Flugzeug zur Zeit $t = 0$ befindet. /2
- 3.2** Bestimmen Sie die Strecke, die das Flugzeug F1 in einer Minute zurücklegt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h. /5
- 3.3** Begründen Sie, dass der Landeanflug von F1 in Richtung der Landebahn L1 verläuft. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B , in welchem das Flugzeug auf der Landebahn aufsetzt. Berechnen Sie die Dauer des Landeanfluges von F1 von Punkt A nach Punkt B . /9

Ein anderes Flugzeug F2 befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt

$P(-23000 | -22000 | 2100)$ und soll nach 7 Minuten im Punkt $Q(-2000 | -1000 | 0)$ landen.

Der Landeanflug erfolgt ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geradlinigen Bahn.

- 3.4** Berechnen Sie die Strecke, die das Flugzeug F2 bis zur Landung zurücklegen muss. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die den Landeanflug von F2 beschreibt. Ermitteln Sie, welche Flughöhe das Flugzeug F2 nach 20 Sekunden hat. /12

[Zur Kontrolle: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -23000 \\ -22000 \\ 2100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix}$]

- 3.5** Vergleichen Sie die Landeanflüge der beiden Flugzeuge in Hinsicht auf /5
- Landegeschwindigkeit
 - zeitlicher Abstand des Landens
 - Landepunkt
 - verwendete Landebahn

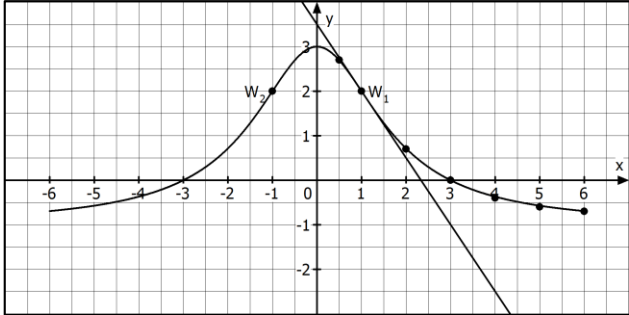
[Hinweis: Zeitpunkt $t = 0$ bedeutet für beide Geraden die gleiche Uhrzeit.]

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2017
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag A

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung									BE/AB		
										I	II	III
1.1										2		
	x in Tagen	0	1	2	4	6	8	10	12			
	f(x)	0	40,28	59,67	65,50	53,92	39,46	27,07	17,83			
1.2	$f'(x) = 0$ $f'(x) = 20 \cdot e^{1-0,3x} + 20x \cdot (-0,3) \cdot e^{1-0,3x} = (-6x + 20) \cdot e^{1-0,3x}$ $f''(x) = -6 \cdot e^{1-0,3x} + (-6x + 20)(-0,3) \cdot e^{1-0,3x} = (1,8x - 12) \cdot e^{1-0,3x}$ $0 = (-6x + 20) \cdot e^{1-0,3x}$, da $0 \neq e^{1-0,3x}$ muss gelten: $0 = -6x + 20$ $x_1 = 3,33$ $f''(3,33) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Max}$ mit $f(3,33) = 66,67$ 3,33 Tage sind 3 Tage und $\frac{3}{10} \cdot 24 \text{ h} = 8 \text{ h}$ Die maximale Anzahl von ca. 66670 befallenen Computern wird nach 3 Tagen und 8 Stunden erreicht sein. <u>Hinweis:</u> Sachlich angemessen sind hier und bei weiteren Ergebnissen auch stärkere Rundungen, hier also z. B. auch 66700.										5	
1.3	Maximaler Rückgang der Anzahl ist im Wendepunkt der Funktion gegeben: $f''(x) = 0$ $0 = (1,8x - 12) \cdot e^{1-0,3x}$ $0 = 1,8x - 12$ $x_1 = 6,67$ $f'(6,67) = -7,36$ $f(6,67) \approx 49,03$ Die Anzahl der betroffenen Computer sinkt nach 6,67 Tagen am stärksten. Die Abnahme beträgt zu diesem Zeitpunkt 7360 Computer pro Tag. Die Anzahl der infizierten Computer zu diesem Zeitpunkt beträgt ca. 49000.											4

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
1.4		4		
1.5	<p>$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$</p> $F'(x) = -\frac{200}{3} \cdot e^{1-0,3x} + \left(-\frac{200}{3}x - \frac{2000}{9}\right) \cdot (-0,3) \cdot e^{1-0,3x}$ $= \left(-\frac{200}{3} + 20x + \frac{200}{3}\right) \cdot e^{1-0,3x} = 20x \cdot e^{1-0,3x} = f(x)$ $\int_0^{12} f(x) dx = \left[\left(-\frac{200}{3}x - \frac{2000}{9}\right) \cdot e^{1-0,3x} \right]_0^{12} = 528,14$ <p>Durchschnittswert: $\frac{528,14}{12} = 44,01$</p> <p>Im Mittel waren während der ersten 12 Tage 44010 Computer betroffen.</p>		3	3
1.6	<p>Ansatz: $f(x) = g(x)$ $20x \cdot e^{1-0,3x} = 15x \cdot e^{2-0,4x} \quad : (15x \cdot e^{1-0,3x})$ $\frac{4}{3} = \frac{e^{2-0,4x}}{e^{1-0,3x}}$ $\frac{4}{3} = e^{2-0,4x-(1-0,3x)} ; \frac{4}{3} = e^{1-0,1x} \quad \ln$ $\ln \frac{4}{3} = 1-0,1x ; x = \frac{\ln \frac{4}{3} - 1}{-0,1} \approx 7,12$</p> <p>Nach 7,12 Tagen zeigen beide Funktionen die gleiche Anzahl befallener Computer.</p>			6
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	18	6
	Summe der BE		34	

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB																				
		I	II	III																		
2.1	<p>Achsensymmetrie zur y-Achse:</p> $f(-x) = \frac{9 - (-x)^2}{(-x)^2 + 3} = \frac{9 - x^2}{x^2 + 3} = f(x)$	2																				
2.2	<p>x_N ist eine Nullstelle $\Leftrightarrow f(x_N) = 0$</p> $\frac{9 - x^2}{x^2 + 3} = 0 \Leftrightarrow 9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{N1/2} = \pm 3$ <p>$S_{x1}(3 0); S_{x2}(-3 0)$</p> $f(0) = \frac{9 - 0^2}{0^2 + 3} = 3; S_y(0 3)$	3																				
2.3	$f'(x) = \frac{(-2x)(x^2 + 3) - (9 - x^2)2x}{(x^2 + 3)^2}$ $= \frac{-2x^3 - 6x - 18x + 2x^3}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-24x}{(x^2 + 3)^2}$ $f''(x) = \frac{72x^2 - 72}{(x^2 + 3)^3}$ <p>Berechnen des Extrempunktes:</p> $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -24x = 0 \Leftrightarrow x_E = 0$ $f''(x_E) = -2,6 < 0$ $f(x_E) = 3$ <p>$H(0 3)$</p>		4	4																		
2.4	$f''(x) = \frac{72(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} = 0$ $72(x^2 - 1) = 0$ $x_{W1/2} = \pm 1$ $f(\pm 1) = 2; W_1(1 2); W_2(-1 2)$			3																		
2.5	<table border="1" style="margin-bottom: 10px;"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>0</th> <th>0,5</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>f(x)</td> <td>3</td> <td>2,692</td> <td>2</td> <td>0,714</td> <td>0</td> <td>-0,368</td> <td>-0,571</td> <td>-0,692</td> </tr> </tbody> </table> 	x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	f(x)	3	2,692	2	0,714	0	-0,368	-0,571	-0,692	2		3
x	0	0,5	1	2	3	4	5	6														
f(x)	3	2,692	2	0,714	0	-0,368	-0,571	-0,692														

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
2.6	$y_T = mx + n$ $m = f'(1) = \frac{-24 \cdot 1}{(1^2 + 3)^2} = -\frac{3}{2}$ $n = f(1) + \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{8}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ $y_T = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$ <p>Tangente zeichnen (siehe Grafik 2.5)</p>			5
2.7	$f(x) = p(x)$ $\frac{9 - x^2}{x^2 + 3} = 2 - \frac{1}{3}x^2 \quad \cdot (x^2 + 3)$ $9 - x^2 = (2 - \frac{1}{3}x^2)(x^2 + 3)$ $9 - x^2 = 2x^2 + 6 - \frac{1}{3}x^4 - x^2$ $\frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + 3 = 0; \quad x^4 - 6x^2 + 9 = 0$ <p>Substitution</p> $z = x^2$ $z^2 - 6z + 9 = 0$ $z_1 = 3 + \sqrt{\frac{36}{4} - 9} = 3$ $z_2 = 3 - \sqrt{\frac{36}{4} - 9} = 3$ $x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$ $p(x_1) = 1; P_1(\sqrt{3} 1)$ $p(x_2) = 1; P_2(-\sqrt{3} 1)$ <p>Es gibt zwei gemeinsame Punkte.</p>		3	4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	7	17	9
	Summe der BE	33		

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	<p>Einsetzen von $t = 0$ in die Geradengleichung ergibt:</p> $\vec{x} = \begin{pmatrix} -14000 \\ -13000 \\ 1200 \end{pmatrix}$ <p>Das Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $A(-14000 -13000 1200)$.</p>	2		
3.2	<p>Einsetzen von $t = 60$ in die Geradengleichung ergibt:</p> $\vec{x} = \begin{pmatrix} -11000 \\ -10000 \\ 900 \end{pmatrix}$ <p>Das Flugzeug befindet sich zum Zeitpunkt $t = 60$ (nach einer Minute) im Punkt $C(-11000 -10000 900)$.</p> <p>Die Länge der Strecke beträgt:</p> $ \vec{AC} = \left \begin{pmatrix} 3000 \\ 3000 \\ -300 \end{pmatrix} \right = \sqrt{3000^2 + 3000^2 + (-300)^2} \approx 4253,2$ <p>Die Strecke beträgt ca. 4,2532 km.</p> <p>Die Geschwindigkeit beträgt $v = \frac{4,2532 \text{ km}}{60 \text{ s}} \approx 255,19 \text{ km/h}$.</p>		5	
3.3	<p>Die Landebahn L1 verläuft gemäß Aufgabenstellung in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da die x- und y-Komponenten des Richtungsvektors der Geradengleichung ebenfalls übereinstimmen, erfolgt der Landeanflug von F1 in Richtung der Landebahn L1. Die z-Komponente des Richtungsvektors zeigt den Sinkflug des Flugzeuges an.</p> <p>Das Flugzeug hat den Boden erreicht, wenn die Gerade die x-y-Ebene schneidet:</p> $z = 0$ $1200 - 5t = 0 \Rightarrow t = 240$ <p>Einsetzen von $t = 240$ ergibt den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2000 \\ -1000 \\ 0 \end{pmatrix}$.</p> <p>Das Flugzeug landet im Punkt $B(-2000 -1000 0)$ nach 240 Sekunden (4 Minuten).</p>	3		6

Teil- aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.4	<p>Die gesuchte Strecke des Flugzeugs F2 entspricht der Länge der Strecke</p> $ \overrightarrow{PQ} = \left \begin{pmatrix} 21000 \\ 21000 \\ -2100 \end{pmatrix} \right = \sqrt{21000^2 + 21000^2 + (-2100)^2} = 29772,6.$ <p>Die Länge der Strecke beträgt ca. 29,8 km. Gleichung der Geraden von F2:</p> $\vec{x} = \begin{pmatrix} -23000 \\ -22000 \\ 2100 \end{pmatrix} + \frac{t}{420} \cdot \overrightarrow{PQ}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -23000 \\ -22000 \\ 2100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -23000 \\ -22000 \\ 2100 \end{pmatrix} + 20 \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22000 \\ -21000 \\ 2000 \end{pmatrix}$ <p>Nach 20 Sekunden beträgt die Flughöhe 2000 m.</p>	4		
3.5	<p>Die Richtungsvektoren der beiden Landeanflugsgeraden sind identisch.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Die Landegeschwindigkeiten von F1 und F2 sind identisch. • Das Flugzeug F2 landet 180 Sekunden nach F1. • F1 und F2 landen im selben Punkt B • Das Flugzeug F2 fliegt ebenfalls die Landebahn L1 an. 			5
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	9	19	5
	Summe der BE	33		