Abschlussprüfung Berufsoberschule 2016
Mathematik

Aufgabenvorschlag C

1 Exponentialfunktionen /34

Im Zylinder eines Verbrennungsmotors wird ein Kraftstoff-Luft-Gemisch gezündet. Nach der Zündung steigt der Druck im Zylinder zunächst stark an und treibt den Kolben nach unten. Dadurch verringert sich der Druck. Wenn das Auslassventil öffnet, sinkt der Druck schlagartig auf null.

Der Verlauf des Druckes im Zylinder kann durch die Funktion f mit $f(x) = 15x \cdot e^{-0{,}12x}$ beschrieben werden.

Dabei gibt x den Weg in Millimeter an, um den sich der Kolben nach unten bewegt hat, und $f(x)$ den Druck in bar. Der Graph der Funktion ist G_f.

1.1 Die Stärke des Auspuffgeräuschs hängt von dem Druck ab, welcher noch vorhanden ist, wenn das Auslassventil geöffnet wird. **/2**
Vergleichen Sie diese Drücke für das Öffnen des Ventils nach 40 mm und nach 60 mm Kolbenweg.

1.2 Berechnen Sie den maximalen Druck, der im Zylinder auftreten kann. **/7**
[Zur Kontrolle: $f'(x) = (-1{,}8x + 15) \cdot e^{-0{,}12x}$]

1.3 Berechnen Sie die Position x des Kolbens, bei welcher der Druck am stärksten zurückgeht. Geben Sie auch an, wie groß zu diesem Zeitpunkt die Abnahme des Druckes pro Millimeter ist. **/4**
[Hinweis: Auf die Prüfung des Ergebnisses mit Hilfe der 3. Ableitung oder des Vorzeichenwechselkriteriums kann verzichtet werden.]

1.4 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/5**

x	0	10	20	30	40	50	60
$f(x)$	0		27,2		4,9		

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer errechneten Ergebnisse und der Tabellenwerte G_f in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite ein.

1.5 Die Fläche unter dem Graphen von f kann als Maß für die Energie dienen, welche an den Kolben abgegeben wird. **/10**

Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = \left(-125x - \frac{3125}{3}\right) \cdot e^{-0{,}12x}$ eine Stammfunktion von f ist.

Berechnen Sie die Maßzahlen der Flächen (ohne Verwendung einer Einheit) für einen Kolbenweg von 60 mm und von 50 mm.

Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich die abgegebene Energie bei Verwendung des kürzeren Kolbenweges verringert.

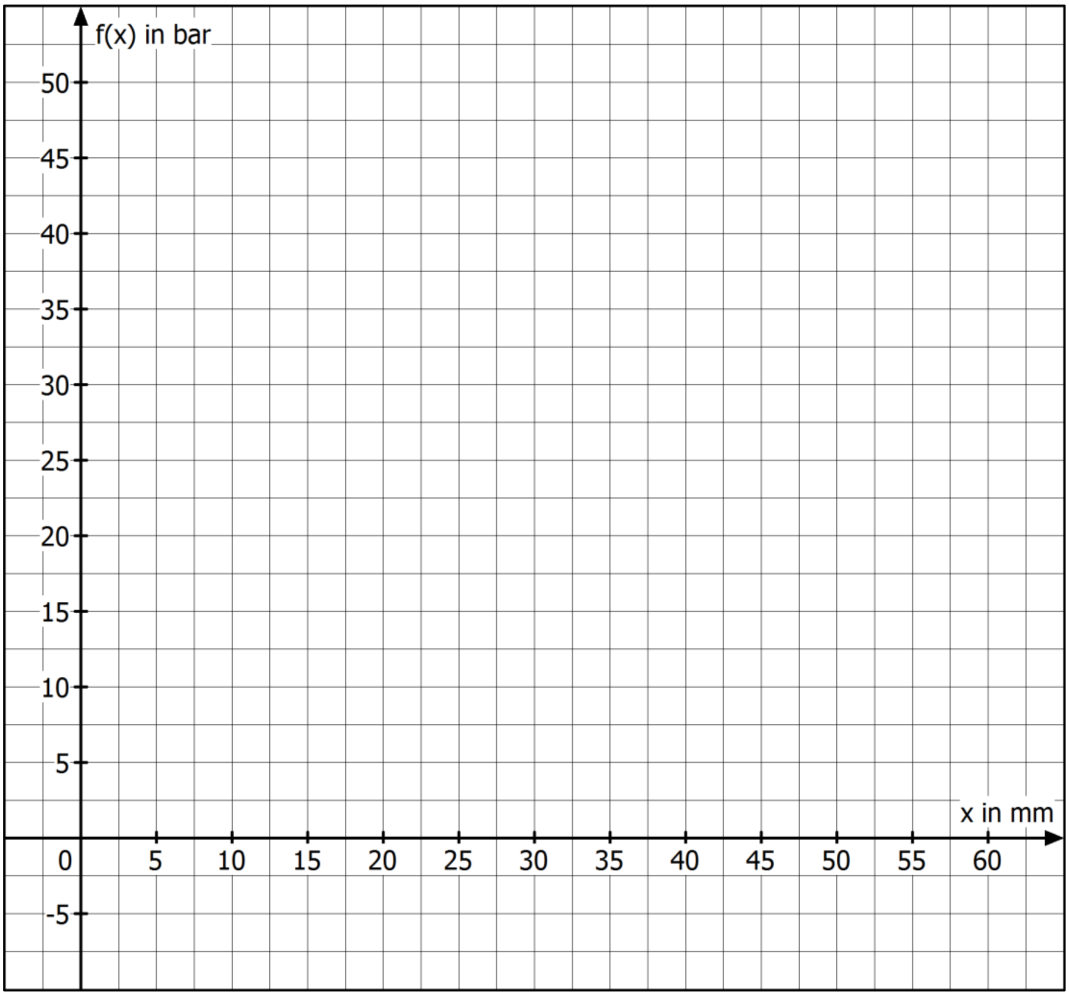
1.6 Durch eine Veränderung der Kraftstoffmenge kann der Druckverlauf beeinflusst werden. **/6**
Er wird dann durch die Funktion g mit $g(x) = ax \cdot e^{-0{,}12x}$ beschrieben.

Zeigen Sie, dass der Parameter a $(a > 0)$ keinen Einfluss auf die Stelle x hat, an der das Druckmaximum auftritt.

Bestimmen Sie den Wert für a, so dass der Maximaldruck 28 bar beträgt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.4:



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x)=\dfrac{2x^3-5x^2+4x+2}{x^2-2x+1}$.

Der Graph der Funktion ist G_f.

2.1 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f. **/5**
Geben Sie die Art der Definitionslücke an und untersuchen Sie das Verhalten von f an der Definitionslücke.

2.2 Der Graph G_f besitzt nur einen einzigen Schnittpunkt mit der x-Achse. **/2**
Zeigen Sie, dass $x_N \approx -0{,}3379$ die Nullstelle der Funktion f ist.

2.3 Weisen Sie durch eine geeignete Rechnung nach, dass die Gleichung der Funktion f auch geschrieben werden kann als **/4**

$$f(x)=2x-1+\frac{3}{(x-1)^2}.$$

Bestimmen Sie daraus die Gleichung der Asymptoten der Funktion f.

2.4 Berechnen Sie, ab welchem $x>0$ der Abstand zwischen G_f und der Asymptote weniger als $\frac{1}{10}$ beträgt. **/3**

2.5 Bilden Sie die erste Ableitung f' der Funktion f. **/4**

2.6 Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunktes von G_f. **/5**
Verwenden Sie dafür die erste Ableitung in folgender Schreibweise

$$f'(x)=2-\frac{6}{(x-1)^3}$$

und ohne weitere Rechnung die zweite Ableitung

$$f''(x)=\frac{18}{(x-1)^4}.$$

2.7 Ergänzen Sie die Wertetabelle. **/5**

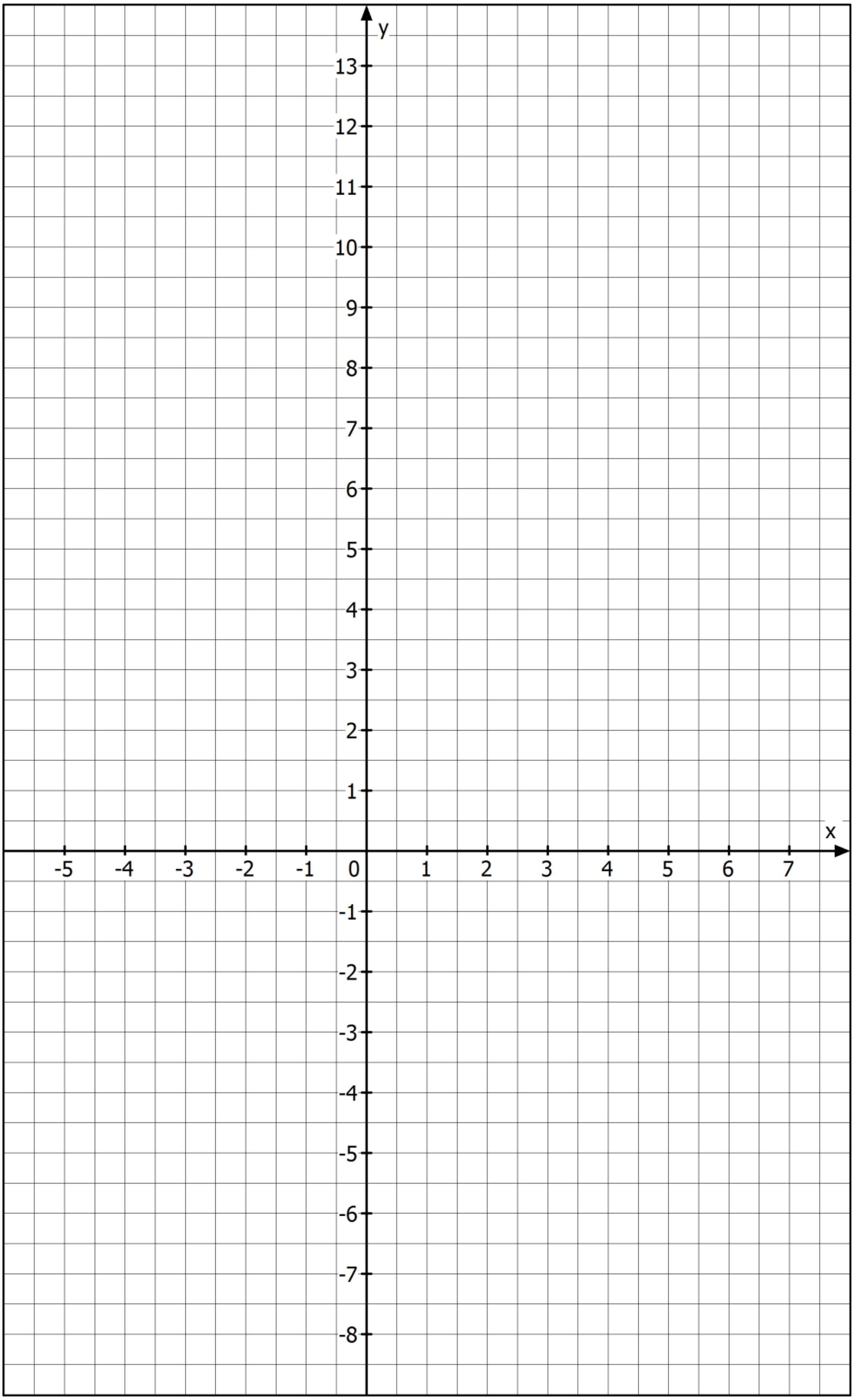
x	– 3	– 1	0	0,5	1,5	2	3	7
$f(x)$	– 6,81		2		14	6		13,08

Zeichnen Sie G_f mit Hilfe aller berechneten Ergebnisse in das vorbereitete Koordinatensystem auf der nächsten Seite.

2.8 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f. **/5**
Berechnen Sie $A=\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$ und kennzeichnen Sie die berechnete Fläche in Ihrer Zeichnung aus 2.7.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.7:



3 Analytische Geometrie /33

Auf einem Gebäude mit Satteldach wird ein Solarpanel angebracht.
(Siehe Abbildung)

Gegeben sind die Koordinaten der Punkte $A(2|2|4)$, $B(4|8|4)$, $C(-2|10|8)$, $D(-4|4|8)$ und $F(6|4|9)$.
Der Erdboden liegt in der x-y-Ebene. (1 LE entspricht 1 m)

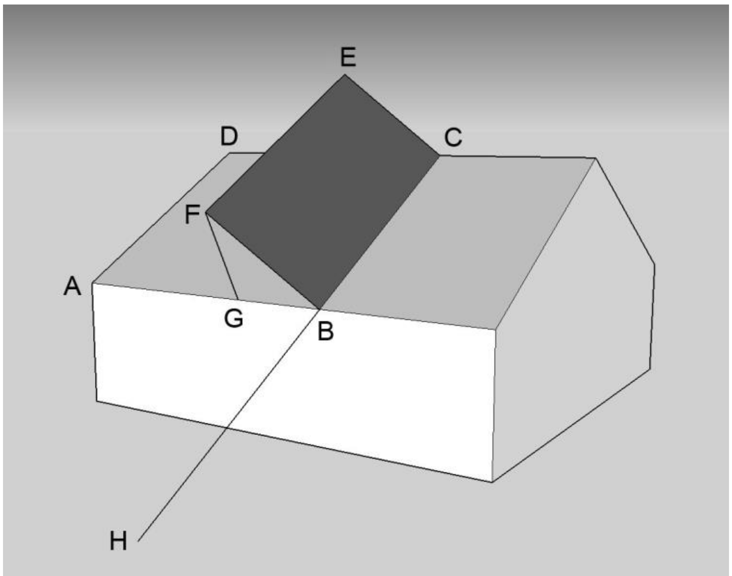


Abbildung: Haus mit Solarpanel (nicht maßstäblich)

3.1 Weisen Sie nach, dass das Viereck *ABCD* ein Rechteck ist. **/7**

3.2 Das Solarpanel *BCEF* ist ebenfalls ein Rechteck. **/5**
Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes *E*.

3.3 Stellen Sie die Gleichung der Ebene E_1 auf, in der das Solarpanel *BCEF* liegt. **/5**
Geben Sie diese Gleichung in Parameterform und in Koordinatenform an.

[Zur Kontrolle: Ein Normalenvektor der Ebene E_1 lautet: $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix}$.]

3.4 Die Ebene E_2 der Dachfläche *ABCD* kann beschrieben werden durch die Gleichung: **/4**

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0.$$

Berechnen Sie den Winkel α, welchen das Solarpanel E_1 zur Dachfläche E_2 bildet.

3.5 Für die Montage des Solarpanels soll eine Schiene angebracht werden, welche in Verlängerung der Kante *BC* bis zum Erdboden reicht. **/6**
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes *H* auf dem Boden und die benötigte Länge $\overline{HB}$ der Schiene.

3.6 Die Stütze $\overline{FG}$ ist senkrecht zur Dachfläche *ABCD* angebracht. **/6**
Berechnen Sie die Koordinaten ihres Befestigungspunktes *G* und die Länge der Stütze $\overline{FG}$.

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung /33

Der Förderverein einer Schule bietet auf verschiedenen Veranstaltungen T-Shirts mit dem Schullogo an. Es gibt T-Shirts in den Farben Grün und Orange, jeweils in den Größen S, M und L.
Vor dem Schulfest gab es noch 2739 T-Shirts, davon war ein Drittel grün. Die Inventur ergab, dass es 278 grüne T-Shirts der Größe S und 390 grüne T-Shirts der Größe M gab.

4.1 Der Förderverein wird gebeten, für die Tombola auf dem Schulfest ein T-Shirt zu spenden. Die Auswahl des T-Shirts erfolgt zufällig. **/6**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse.
E_1: Unter allen grünen T-Shirts wird ein T-Shirt der Größe S ausgewählt.
E_2: Unter allen grünen T-Shirts wird ein T-Shirt der Größe L ausgewählt.
E_3: Das ausgewählte T-Shirt ist grün und hat die Größe M.
[Zur Kontrolle: $P(E_3) \approx 0{,}1424$]

4.2 Die Wahrscheinlichkeit, unter allen T-Shirts zufällig ein orangenes T-Shirt der Größe M auszuwählen, beträgt 0,2581. **/4**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein aus allen T-Shirts zufällig ausgewähltes Shirt die Größe M hat.
Berechnen Sie jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes T-Shirt der Größe M orange ist.

Im Weiteren sollen mehrere, aber nicht mehr als 15 T-Shirts für die Tombola gespendet werden. Es interessiert nur die Farbe der ausgewählten T-Shirts. Als Treffer gilt die Wahl eines orangenen T-Shirts, für die Trefferwahrscheinlichkeit gilt $p = \frac{2}{3}$.

4.3 Begründen Sie, dass es sich dabei nur näherungsweise um eine Bernoulli-Kette handelt. **/3**

4.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 10 gespendeten T-Shirts genau 6 orangene sind. **/3**

4.5 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 15 gespendeten T-Shirts mindestens 13 orange sind. **/4**

4.6 Berechnen Sie, wie viele T-Shirts mindestens gespendet werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9 % mindestens ein orangenes dabei ist. **/5**

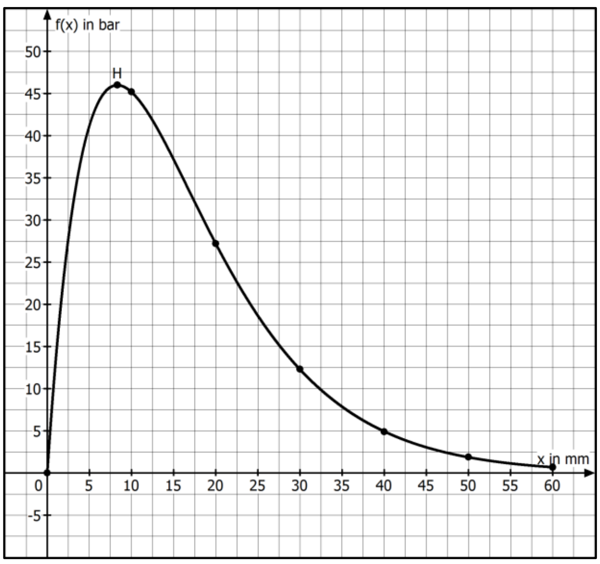
Um für andere Veranstaltungen besser ausgestattet zu sein, wird das Kaufverhalten beim letzten Schulfest dokumentiert. Dabei ergab sich, dass 216 T-Shirts insgesamt verkauft wurden, davon 56 in der Größe L und 117 orange T-Shirts. Grüne T-Shirts der Größe L wurden 15 Mal verkauft.

4.7 Stellen Sie diese Situation in einer Vierfeldertafel dar. **/4**

4.8 Untersuchen Sie, ob der Kauf eines T-Shirts der Größe L stochastisch von der Farbe des T-Shirts abhängig ist. **/4**

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2016
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag C

<table>
<tr><th rowspan="2">Teilaufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$f(40) = 4{,}94$; $f(60) = 0{,}67$
Der Druckunterschied beträgt 4,27 bar.
Bzw. ist bei kürzerem Kolbenweg der Druck mehr als siebenmal so hoch.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>$f'(x) = 15e^{-0{,}12x} + 15x \cdot (-0{,}12)e^{-0{,}12x} = (-1{,}8x + 15)e^{-0{,}12x}$
$f''(x) = -1{,}8e^{-0{,}12x} + (-1{,}8x + 15)(-0{,}12)e^{-0{,}12x} = (0{,}216x - 3{,}6)e^{-0{,}12x}$
notwendige Bedingung:
$0 = (-1{,}8x + 15)e^{-0{,}12x}$, da $0 \neq e^{-0{,}12x}$ muss gelten:
$0 = -1{,}8x + 15$
$x_1 = 8{,}33$
$f''(8{,}33) \approx -0{,}66 < 0 \Rightarrow H$ mit $f(8{,}33) = 45{,}98$
Der maximale Gasdruck von 45,98 bar wird erreicht, wenn der Kolben einen Weg von 8,33 mm zurückgelegt hat.</td><td></td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>Maximaler Rückgang des Druckes ist an der Wendestelle der Funktion gegeben.
Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$
$0 = (0{,}216x - 3{,}6)e^{-0{,}12x}$, da $0 \neq e^{-0{,}12x}$ muss gelten:
$0 = 0{,}216x - 3{,}6$
$x_2 = 16{,}67$
$f'(16{,}67) = -2{,}03$
Der Druck sinkt bei 16,7 mm um 2,03 bar/mm.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>0</td><td>45,2</td><td>27,2</td><td>12,3</td><td>4,9</td><td>1,9</td><td>0,7</td></tr>
</table>


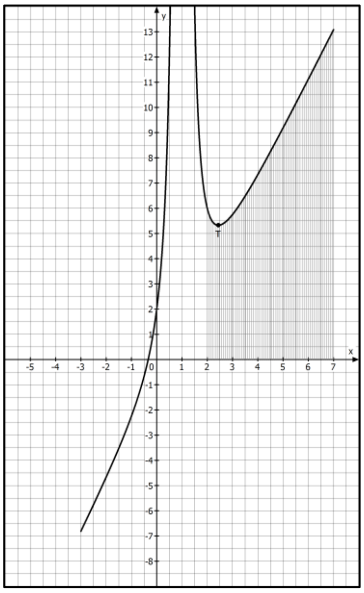
</td><td>2

3</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
1.5	F ist Stammfunktion von f, wenn gilt: $F'(x)=f(x)$ $F'(x)=-125e^{-0,12x}+\left(-125x-\frac{3125}{3}\right)\cdot(-0{,}12)e^{-0,12x}$ $=(-125+15x+125)e^{-0,12x}=15x\cdot e^{-0,12x}=f(x)$		4	
	$\int_0^{50} f(x)\,dx=\left[\left(-125x-\frac{3125}{3}\right)\cdot e^{-0,12x}\right]_0^{50}=1024$ $\int_0^{60} f(x)\,dx=\left[\left(-125x-\frac{3125}{3}\right)\cdot e^{-0,12x}\right]_0^{60}=1035$ Abnahme: $\frac{1035-1024}{1035}=0{,}0106$		4	
	Die Energie des Kolbens ist bei Verwendung des kürzeren Weges um 1,1 % geringer.		2	
1.6	$g(x)=ax\cdot e^{-0,12x}$ $g'(x)=a\cdot e^{-0,12x}+ax\cdot e^{-0,12x}\cdot(-0{,}12)=(-0{,}12x+1)\cdot ae^{-0,12x}$ Ansatz für Maximum: $0=(-0{,}12x+1)\cdot ae^{-0,12x}$ Da $0\neq ae^{-0,12x}$ ergibt sich die gleiche Lösung $x=8{,}33$ wie bei $f(x)$. Bestimmung des Wertes von a: Es muss gelten: $g(8{,}33)=28$ $28=a\cdot 8{,}33\cdot e^{-0,12\cdot 8,33}$ $3{,}36=a\cdot e^{-1}$ $a=9{,}13$			6
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	7	21	6
	Summe der BE	34		

Teilaufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
2.1	x ist eine Definitionslücke, wenn $N(x)=0$ gilt. $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ $x-1=0$ $x=1$ $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ $Z(1)=3\neq 0$ $x_P=1$ ist eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, da $x_P=1$ eine doppelte Lösung von $N(x)=0$ ist.	5		
2.2	x_N ist eine Nullstelle $\Leftrightarrow f(x_N)=0 \Leftrightarrow Z(x_N)=0$ $Z(-0{,}3379)\approx -0{,}00036\approx 0$ und $-0{,}3379\in\mathbb{D}$	2		
2.3	z. B. mittels Polynomdivision $(2x^3-5x^2+4x+2):(x^2-2x+1)=2x-1$ mit Rest 3 $f(x)=\frac{2x^3-5x^2+4x+2}{x^2-2x+1}=2x-1+\frac{3}{x^2-2x+1}=2x-1+\frac{3}{(x-1)^2}$ Die Gleichung der Asymptote entspricht dem ganzen Anteil: $a(x)=2x-1$	1	3	
2.4	$2x-1+\frac{3}{(x-1)^2}-(2x-1)<\frac{1}{10}$ $\frac{3}{(x-1)^2}<\frac{1}{10}$ $(x-1)^2>30$ $x>1+\sqrt{30}\approx 6{,}48$		3	
2.5	$f'(x)=\frac{(6x^2-10x+4)\cdot(x^2-2x+1)-(2x^3-5x^2+4x+2)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2}$ $=\frac{2x^4-8x^3+12x^2-14x+8}{(x^2-2x+1)^2}$ alternative Angaben: $f'(x)=\frac{2x^4-8x^3+12x^2-14x+8}{(x-1)^4}$ $f'(x)=\frac{2x^3-6x^2+6x-8}{(x-1)^3}$ $f'(x)=2-\frac{6}{(x-1)^3}$		4	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.6</td><td>x_E ist Extremstelle, wenn $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E)\neq 0$ gilt
$f'(x_E)=2-\frac{6}{(x_E-1)^3}=0 \quad \Leftrightarrow$
$(x_E-1)^3=3$
$x_E=1+\sqrt[3]{3}\approx 2{,}442$

$f''(2{,}442)=\frac{18}{(2{,}442-1)^4}\approx 4{,}16>0$
$f(2{,}442)\approx 5{,}327 \qquad T(2{,}442 \mid 5{,}327)$</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>2.7</td><td><table>
<tr><td>x</td><td>–3</td><td>–1</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1,5</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>–6,81</td><td>–2,25</td><td>2,00</td><td>12,00</td><td>14,00</td><td>6,00</td><td>5,75</td><td>13,08</td></tr>
</table>
</td><td>2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>2.8</td><td>Eine Stammfunktion von f ist:
$F(x)=x^2-x-3(x-1)^{-1}$
Damit ergibt sich:
$A=\int_2^7 f(x)\,\mathrm{d}x$
$=\left[x^2-x-3(x-1)^{-1}\right]_2^7$
$=41{,}5-(-1)$
$=42{,}5\ \text{FE}$
Kennzeichnung in der Skizze</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe (Aufgabe 2)</td><td>10</td><td>18</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
3.1	Es ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, also sind gegenüberliegende Seiten des Vierecks parallel und gleich lang. Das Viereck ist ein Parallelogramm. Nachweis eines rechten Winkels: $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} = -18 + 18 = 0 \Leftrightarrow \beta = 90°$ Parallelogramm mit einem rechten Winkel entspricht einem Rechteck.	5	2	
3.2	$\overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\lvert\overrightarrow{BF}\rvert = \sqrt{45}$ $\quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{56}$ Fläche $A = \lvert\overrightarrow{BF}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{45} \cdot \sqrt{56} = 50{,}2$ Der Flächeninhalt des Solarpanels beträgt 50,2 m². Punkt *G*: $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$; $F(0 \vert 6 \vert 13)$.		5	
3.3	$E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ Normalenvektor: $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 38 \\ 20 \end{pmatrix}$, somit gilt: $E_1:\ 26x + 38y + 20z = d$ Einsetzen der Koordinaten von *E* liefert: $d = 488$. $E_1:\ 26x + 38y + 20z = 488$		5	
3.4	$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \bullet \overrightarrow{n_2}}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{n_2}\rvert} = \dfrac{70}{\sqrt{35 \cdot 630}}$ $\alpha = \arccos 0{,}4714 = 61{,}87°$		4	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.5</td><td>Gerade BC: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$; Ebene des Erdbodens: $z=0$.
Einsetzen: $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ ergibt $t=-2$ und damit
$x=4+6=10$
$y=8-2=6$
$z=0$
$H(10\,|\,6\,|\,0)$
$\left|\overrightarrow{HB}\right|=\left|\begin{pmatrix}6\\-2\\-4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{56}\approx 7{,}48$
Die benötigte Schiene muss eine Länge von 7,48 m haben.</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>3.6</td><td>Aufstellen der Geradengleichung für FG: $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\4\\9\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}$
Schnitt mit der Dachfläche E_2: $3x-y+5z=24$
Einsetzen der Koordinaten der Geradengleichung in die Ebene:
$3(6+3u)-(4-u)+5(9+5u)=24$
$35u=-35$
$u=-1$
$\overrightarrow{x_G}=\begin{pmatrix}6\\4\\9\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}3\\-1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$; $G(3\,|\,5\,|\,4)$
$\left|\overrightarrow{FG}\right|=\sqrt{35}\approx 5{,}92$
Eine Stütze von 5,92 m Länge muss im Punkt $G(3\,|\,5\,|\,4)$ befestigt werden.</td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>5</td><td>22</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
4.1	$P(E)=\frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$ Anzahl der grünen T-Shirts: $\frac{1}{3}\cdot 2739=913$ $P(E_1)=\frac{278}{913}\approx 0{,}3045$ $P(E_2)=\frac{913-278-390}{913}\approx 0{,}2683$ $P(E_3)=\frac{390}{2739}\approx 0{,}1424$	6		
4.2	$P(M)=0{,}1424+0{,}2581=0{,}4005$ $P_M(O)=\frac{P(M\cap O)}{P(M)}$ $=\frac{0{,}2581}{0{,}4005}$ $\approx 0{,}6444$		4	
4.3	Bernoulli-Kette liegt vor, wenn: • Es nur zwei mögliche Versuchsausgänge (Treffer/Niete) gibt. • Die Trefferwahrscheinlichkeit konstant bleibt. Der erste Teil trifft hier zu, die Wahl eines orangenen T-Shirts ist der Treffer, die Wahl eines grünen T-Shirts ist die Niete. Die Trefferwahrscheinlichkeit hingegen bleibt nur näherungsweise konstant, da die Shirts nicht wieder „zurückgelegt“ werden. Wegen der großen Gesamtzahl (2739 Stück) und der kleinen Stichprobe (maximal 15 Stück) ist die Näherung aber gut.		3	
4.4	$n=10 \qquad p=\frac{2}{3}$ $P(X_1=6)=\binom{10}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4$ $\approx 0{,}2276$		3	
4.5	$n=15 \qquad p=\frac{1}{3}$ $P(X_2\le 2)=P(X_2=0)+P(X_2=1)$ $\approx 0{,}0023+0{,}0171$ $=0{,}0194$		4	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.6</td><td>E: Es wird mindestens ein orangenes T-Shirt gespendet.
$P(E)=P(X\geq 1)=1-P(X=0)\geq 0{,}999$
$P(X=0)\leq 0{,}001$
$\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq 0{,}001$
$n\cdot\ln\frac{1}{3}\leq \ln 0{,}001$
$n\geq\frac{\ln 0{,}001}{\ln\frac{1}{3}}\approx 6{,}3$
Man muss mindestens 7 T-Shirts spenden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9 % mindestens einmal ein orangenes T-Shirt gespendet worden ist.</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td>4.7</td><td>L … Das verkaufte T-Shirt hat die Größe L.
O … Das verkaufte T-Shirt ist orange.
<table><tr><td></td><td>L</td><td>$\overline{L}$</td><td>$\sum$</td></tr><tr><td>O</td><td>41</td><td>76</td><td>117</td></tr><tr><td>$\overline{O}$</td><td>15</td><td>84</td><td>99</td></tr><tr><td>$\sum$</td><td>56</td><td>160</td><td>216</td></tr></table></td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.8</td><td>Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig, wenn gilt:
$P(B)\neq P_A(B)$.
$P(O)=\frac{117}{216}\approx 0{,}5417$
$P_L(O)=\frac{41}{56}\approx 0{,}7321$
Da beide Wahrscheinlichkeiten nicht gleich sind, ist der Kauf eines T-Shirts in der Größe L stochastisch abhängig von der Farbe des Shirts.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>10</td><td>18</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>