Abschlussprüfung Berufsoberschule 2015
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Exponentialfunktionen /34

In modernen Küchen gibt es häufig unter der Spüle ein Auszugsystem zur Abfalltrennung. Immer öfter wird der Auszug durch einen Elektromotor angetrieben. Dabei öffnet sich der Auszug auf einen kurzen Druck hin, bleibt eine gewisse Zeit maximal geöffnet und schließt sich anschließend langsam wieder.
Ein solcher Öffnungs- und Schließvorgang (ohne das Offenbleiben – die Zeit wird solange angehalten) soll durch folgende Funktion f beschrieben werden

$f(t) = 200 \cdot \left(e^{-0,4t} - e^{-0,8t}\right)$.
Der Graph der Funktion ist G_f.

Dabei bedeutet t die Zeit in s nach dem Drücken und $f(t)$ die Weite der Öffnung des Auszugs in cm.

1.1 Berechnen Sie, zu welcher Zeit der Auszug maximal geöffnet ist. **/7**
Berechnen Sie ebenfalls, wie weit der Auszug zu diesem Zeitpunkt geöffnet ist.
[Zur Kontrolle: $f'(t) = -80 \cdot e^{-0,4t} + 160 \cdot e^{-0,8t}$]

1.2 Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt sich der Auszug am schnellsten schließt und geben Sie an, wie weit der Auszug dann geöffnet ist. **/6**
Bestimmen Sie auch die Schließgeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

1.3 Ergänzen Sie die Wertetabelle und zeichnen Sie mit Hilfe aller berechneten Ergebnisse G_f im Intervall $0 \le t \le 19$ in das vorbereitete Koordinatensystem auf der nächsten Seite. **/5**

t	0	1	2	4	6	8	10	15	19
$f(t)$		44,2	49,5			7,8		0,5	0,1

1.4 Begründen Sie, warum die Funktion f nur eingeschränkt für die Modellierung geeignet ist. **/3**

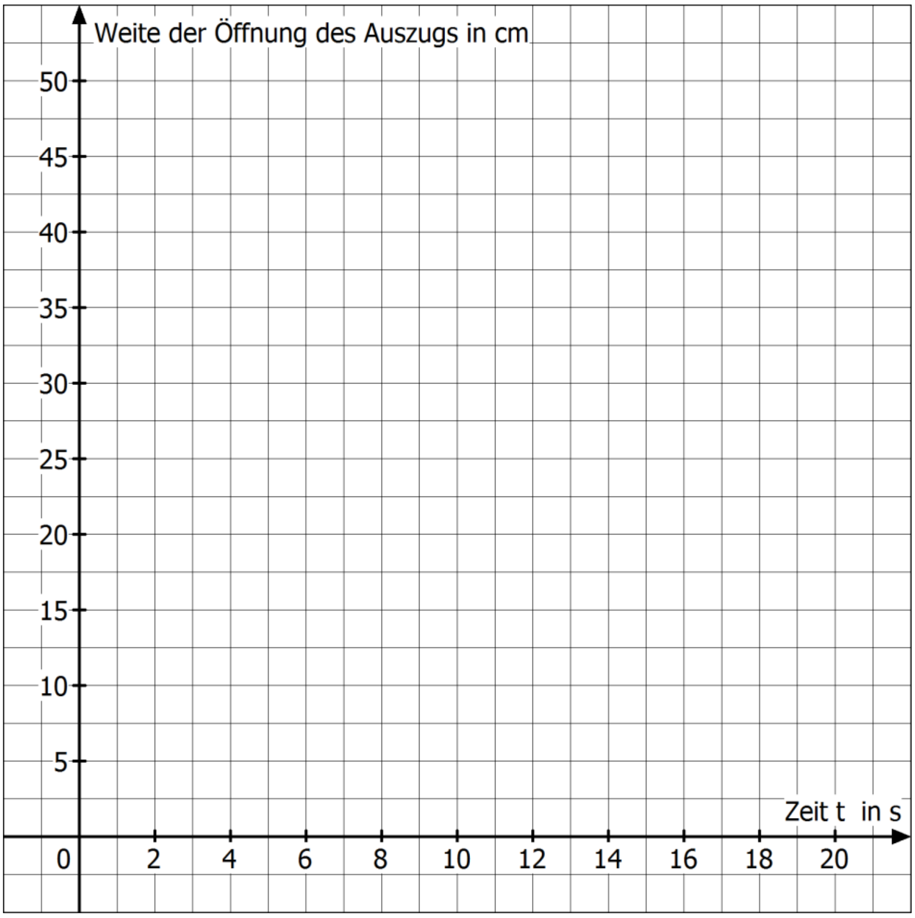
1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(t) = 200 \cdot \left(-\frac{5}{2} e^{-0,4t} + \frac{5}{4} e^{-0,8t}\right)$ eine Stammfunktion der Funktion f ist. **/3**

1.6 Berechnen Sie den Ausdruck $\frac{1}{19} \cdot \int_0^{19} f(t)\,dt$. **/4**
Geben Sie die Bedeutung des Ergebnisses in diesem Sachzusammenhang an.

1.7 Wenn der Auszug nur noch 2 mm geöffnet ist, wird er durch einen Magneten endgültig geschlossen. **/6**
Bestimmen Sie näherungsweise den Zeitpunkt, an dem dies geschieht. Für eine exakte Berechnung substituieren Sie $z = e^{-0,4t}$.

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 1.3:



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Gegeben ist die rationale Funktion *f* mit der Gleichung $f(x)=\dfrac{-x^2+4}{x^2+2}$.

Der Graph der Funktion ist G_f.

2.1 Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion *f*. /4
Untersuchen Sie *f* auf das Vorhandensein von Polstellen und Nullstellen.

2.2 Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie. /2
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

2.3 Bestimmen Sie Art und Lage der lokalen Extrempunkte von G_f. /8
[Zur Kontrolle: $f'(x)=\dfrac{-12x}{(x^2+2)^2}$]

2.4 Berechnen Sie die Wendepunkte von G_f. /4
[Hinweis: Für die Ermittlung der Wendepunkte ist nur die Untersuchung der notwendigen Bedingung erforderlich.]

2.5 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptote von G_f. /2

2.6 Ergänzen Sie die Wertetabelle. /6

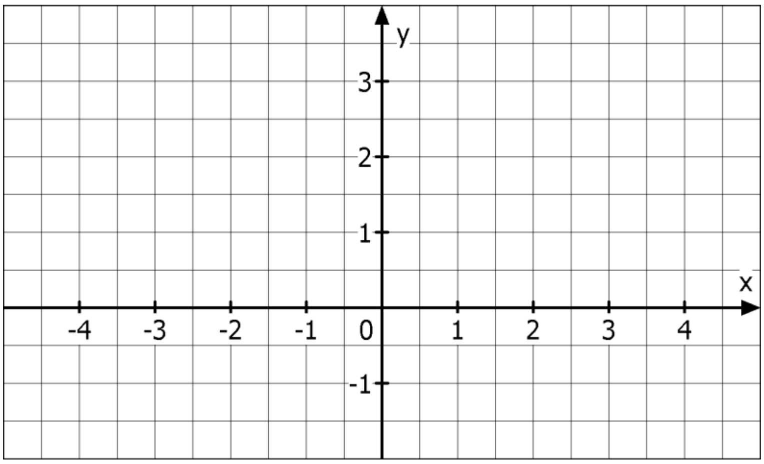
x	-4	-3	-1	1	3	4
$f(x)$	$-0{,}67$			1		

Zeichnen Sie unter Verwendung Ihrer berechneten Ergebnisse G_f und die Asymptote im Intervall $-4 \le x \le 4$ in das Koordinatensystem auf der folgenden Seite.

2.7 Zwischen G_f und der *x*-Achse soll im I. und II. Quadranten ein Rechteck maximaler Größe einbeschrieben werden. /7
Zeichnen Sie ein solches Rechteck in das Koordinatensystem ein, bei dem der Punkt $P\big(1\,|\,f(1)\big)$ ein Eckpunkt des Rechtecks ist.
Geben Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks an.
Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt, welcher bei einer anderen Wahl der Koordinate *x* erreicht werden kann.
[Zur Kontrolle: Eine mögliche Zielfunktion lautet
$A(x)=\dfrac{-2x^3+8x}{x^2+2}$ mit $A'(x)=\dfrac{2x^4-20x^2+16}{(x^2+2)^2}$
Hinweis: Für die Ermittlung des Maximums ist nur die Untersuchung der notwendigen Bedingung erforderlich.]

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 2.6:



3 Analytische Geometrie /33

Gegeben sind die Punkte $A(6\,|\,-4\,|\,8)$, $B(10\,|\,4\,|\,0)$, $C(2\,|\,12\,|\,4)$ und $E(16\,|\,10\,|\,18)$.

3.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck *ABC* rechtwinklig und gleichschenklig ist. **/4**

3.2 Bestimmen Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes *D* so, dass die Punkte *A*, *B*, *C* und *D* ein Quadrat bilden.
Zeichnen Sie das Quadrat *ABCD* in das vorgegebene Koordinatensystem (siehe nächste Seite). **/4**

3.3 Die Gerade g_{AB} geht durch die Punkte *A* und *B*, die Gerade g_{AE} durch die Punkte *A* und *E*.
Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Geraden.
Berechnen Sie den Winkel α, den die beiden Geraden einschließen.
Zeichnen Sie die beiden Geraden in das vorgegebene Koordinatensystem (siehe nächste Seite). **/9**

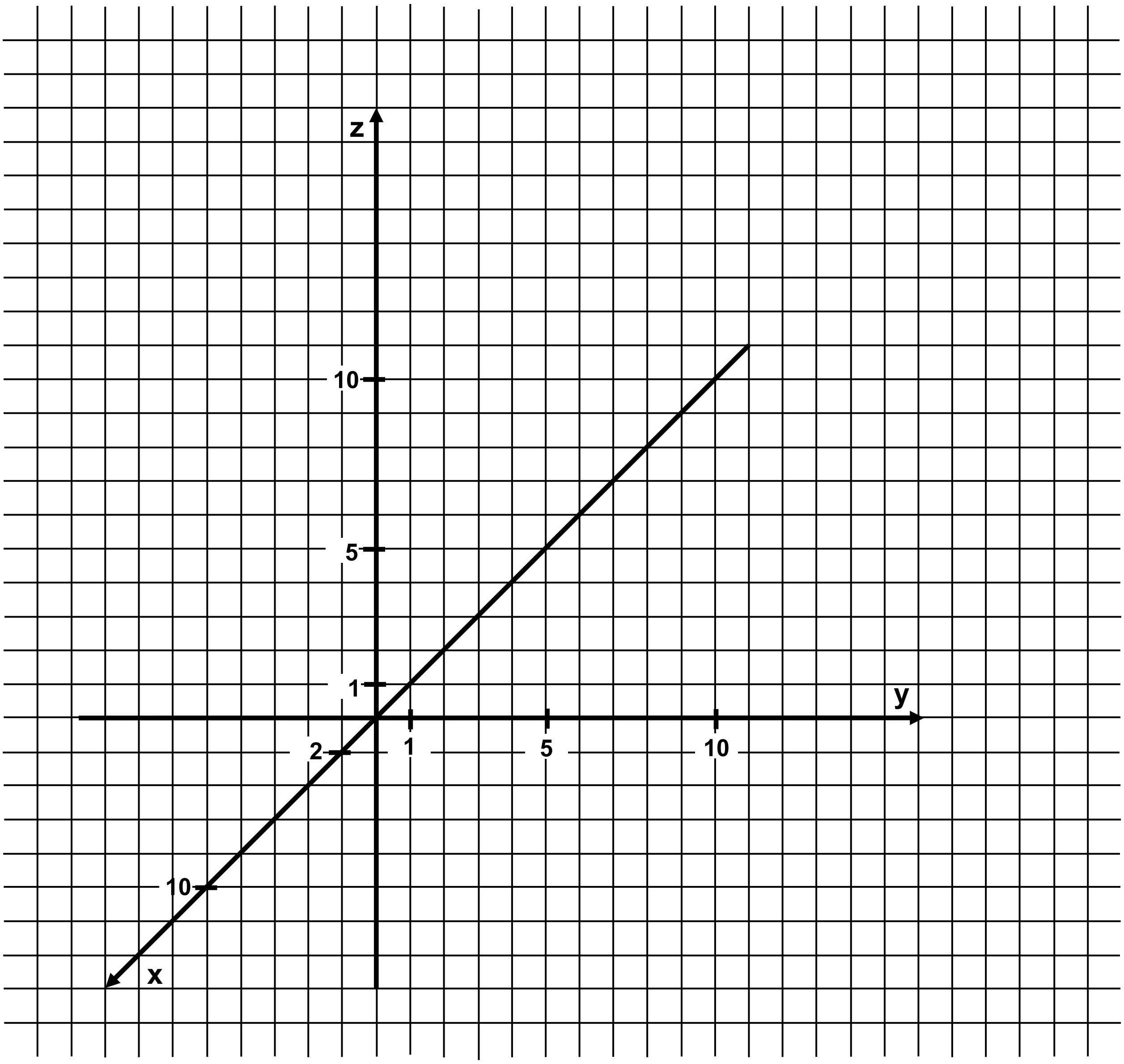
3.4 Geben Sie eine Gleichung der Ebene *F* in Parameter- und in Koordinatenform an, in der die Punkte *A*, *B* und *C* liegen.
[mögliches Ergebnis für *F* in Koordinatenform: $F: 2x + y + 2z = 24$]
Überprüfen Sie, ob der Punkt $E(16\,|\,10\,|\,18)$ in dieser Ebene liegt. **/7**

3.5 Es gibt unendliche viele Ebenen, die senkrecht zur Ebene *F* liegen.
Geben Sie die Gleichung einer solchen Ebene in Parameterform an. **/4**

3.6 Das Dreieck *ABC* und der Koordinatenursprung bilden eine dreiseitige Pyramide.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide. **/5**

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

Koordinatensystem zu Aufgabe 3.2 und 3.3:



4 Wahrscheinlichkeitsrechnung /33

Ein Stadtteilzentrum veranstaltete einen Ostermarkt, auf dem unter anderem Ostereier in den Farben Rot (R), Grün (G), Blau (B) und Orange (O) verkauft wurden. Insgesamt hatte man zu Beginn 150 gefärbte Eier, davon 43 rote, 22 grüne und 48 blaue. Die restlichen Eier waren orange.

Paul kaufte als Erster drei Ostereier, die er zufällig ausgewählt hat (also ohne auf die Farbe zu achten).

4.1. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit Paul **/6**

a) drei orange Ostereier
b) ein rotes, ein grünes und ein blaues Osterei (ohne Beachtung der Reihenfolge)
c) mindestens zwei grüne Ostereier

gekauft hat.

4.2. E: Paul hat drei gleichfarbige Eier gekauft. **/3**
Geben Sie zu E das Gegenereignis $\overline{E}$ an.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $\overline{E}$.

Zu dem Ostermarkt kam auch eine Kindergruppe, die aus 12 Mädchen und 8 Jungen bestand. Jedes Kind kaufte sich genau ein Osterei. Insgesamt wurden an diese Gruppe 9 rote Ostereier verkauft, fünf davon an Mädchen.

4.3. Stellen Sie diese Situation in einer Vierfeldertafel dar. Wählen Sie dafür eine geeignete Bezeichnung der Ereignisse. **/4**

4.4. Berechnen Sie, ob der Kauf eines roten Ostereis stochastisch vom Geschlecht des Kindes abhängig ist. **/4**

4.5. Ein zufällig ausgewähltes Kind dieser Gruppe hatte sich **kein** rotes Osterei gekauft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses Kind ein Junge war. **/2**

Nach dem der Ostermarkt geschlossen wurde, sind noch 4 Ostereier übrig geblieben. Diese vier Ostereier sollen unter den 14 Organisatoren des Ostermarktes verteilt werden.

4.6. Berechnen Sie, auf wie viele Arten die Ostereier in jedem der folgenden Fälle verteilt werden können. **/10**
Beschreiben Sie vorher jeden Fall im Urnenmodell (Anzahl der Kugeln; Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Beachtung der Reihenfolge) und begründen Sie damit ausführlich Ihren Rechenansatz.

a) Alle vier Ostereier sind blau und man kann nur ein Osterei bekommen.
b) Alle vier Ostereier sind verschiedenfarbig und man kann nur ein Osterei bekommen.
c) Alle vier Ostereier sind verschiedenfarbig und man kann mehrere Ostereier gleichzeitig bekommen.

4.7. An die Organisatoren wurden die Ostereier wie im Fall 4.6. a) verteilt. Von den 14 Organisatoren waren am Ende noch 7 übrig, die gemeinsam nach Hause fuhren. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei von ihnen genau ein Osterei abbekamen. **/4**

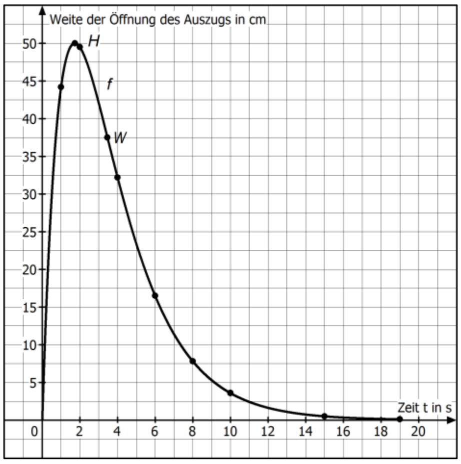
Abschlussprüfung Berufsoberschule 2015
Mathematik

Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Das Maximum der Öffnung entspricht der Hochpunktberechnung.
x_E ist Extremstelle von f, wenn $f'(t_E)=0$ und $f''(t_E)\neq 0$ ist.
$f'(t)=200\left(-0,4\cdot e^{-0,4t}+0,8\cdot e^{-0,8t}\right)$
$f''(t)=200\left(0,16\cdot e^{-0,4t}-0,64\cdot e^{-0,8t}\right)$

$f'(t_E)=200\left(-0,4\cdot e^{-0,4t_E}+0,8\cdot e^{-0,8t_E}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$
$-0,4\cdot e^{-0,4t_E}+0,8\cdot e^{-0,8t_E}=0$
$2\cdot e^{-0,8t_E}=e^{-0,4t_E}$
$\ln 2-0,8t_E=-0,4t_E$
$\ln 2=0,4t_E$
$t_E=\frac{\ln 2}{0,4}\approx 1,733$
$f''(1,733)\approx -16<0$ Hochpunkt bei $t_E\approx 1,733$
$f(1,733)=50$ $\quad H(1,733\,|\,50)$
Der Auszug ist ca. 1,7 s nach dem Drücken maximal geöffnet.
Die Weite der Öffnung beträgt zu diesem Zeitpunkt 50 cm.</td><td>2</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Der Zeitpunkt des schnellsten Schließens entspricht der Wendestelle.
t_W ist Wendestelle von f, wenn $f''(t_W)=0$ und f'' in der Umgebung von t_W einen Vorzeichenwechsel hat.

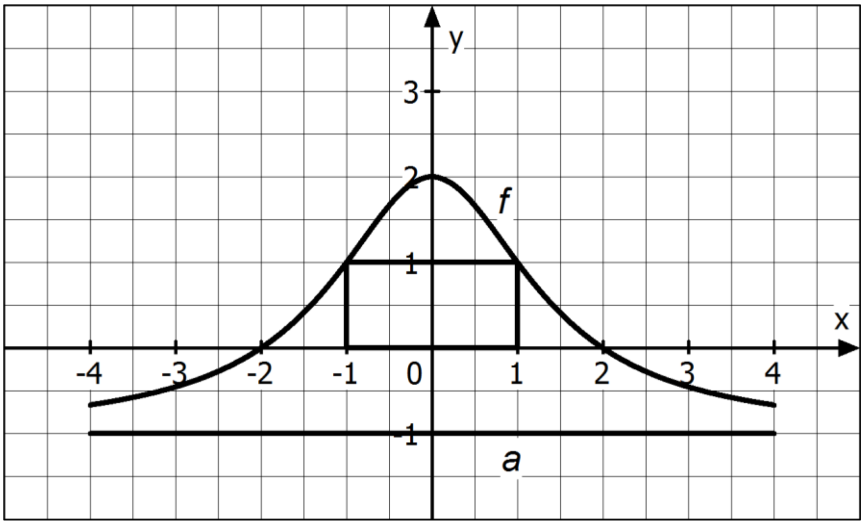
$f''(t_W)=200\left(0,16\cdot e^{-0,4t_W}-0,64\cdot e^{-0,8t_W}\right)=0 \quad \Leftrightarrow$
$0,16\cdot e^{-0,4t_W}-0,64\cdot e^{-0,8t_W}=0$
$4\cdot e^{-0,8t_W}=e^{-0,4t_W}$
$\ln 4-0,8t_W=-0,4t_W$
$\ln 4=0,4t_W$
$t_W=\frac{\ln 4}{0,4}\approx 3,466$
$f''(3)\approx -2<0 \quad f''(4)\approx 1,2>0$ Vorzeichenwechsel vorhanden
$f(3,466)\approx 37,5$ $\quad W(3,466\,|\,37,5)$
$f'(3,466)\approx -10$
Der Auszug schließt sich nach ca. 3,5 s nach dem Drücken am schnellsten, die Weite der Öffnung beträgt zu diesem Zeitpunkt 37,5 cm.
Die Schließgeschwindigkeit beträgt 10 $\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.</td><td></td><td>6</td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td><table><tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>15</td><td>19</td></tr><tr><td>$f(t)$</td><td>0</td><td>44,2</td><td>49,5</td><td>32,2</td><td>16,5</td><td>7,8</td><td>3,6</td><td>0,5</td><td>0,1</td></tr></table></td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>Der Graph der Funktion nähert sich asymptotisch der t-Achse, wenn t gegen Unendlich strebt. Daher würde sich der Auszug in diesem Modell niemals schließen.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td>Es muss gelten: $F'(t) = f(t)$
$F'(t) = 200 \cdot \left(1 \cdot e^{-0{,}4t} - 1 \cdot e^{-0{,}8t}\right) = f(t)$
F ist damit eine Stammfunktion von f.</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.6</td><td>$\frac{1}{19} \cdot \int_0^{19} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{19} \cdot \left[200 \cdot \left(-\frac{5}{2} \cdot e^{-0{,}4t} + \frac{5}{4} \cdot e^{-0{,}8t}\right)\right]_0^{19}$
$= \frac{200}{19}\left(-\frac{5}{2} \cdot e^{-7{,}6} + \frac{5}{4} \cdot e^{-15{,}2}\right) - \frac{200}{19}\left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{4}\right) \approx 13{,}145$

Bedeutung im Sachzusammenhang:
Der Auszug ist durchschnittlich ca. 13 cm geöffnet (im gesamten Modellzeitraum).</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.7</td><td><u>Näherungslösung</u>, z. B. Intervallschachtelung<u>:</u>
Laut Wertetabelle muss die Zeit zwischen 15 s und 19 s liegen.
<table>
<tr><td>t</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td></tr>
<tr><td>f(t)</td><td>0,49</td><td>0,33</td><td>0,22</td><td>0,15</td><td>0,10</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>t</td><td>17,0</td><td>17,1</td><td>17,2</td><td>17,3</td><td></td></tr>
<tr><td>f(t)</td><td>0,223</td><td>0,214</td><td>0,205</td><td>0,197</td><td></td></tr>
</table>
Andere Näherungsverfahren sind möglich.

<u>Rechnerische Lösung</u> mit dem Ansatz $f(t) = 0{,}2$:
Die vorgeschlagene Substitution führt auf die Gleichung $z^2 - z + 0{,}001 = 0$.
Die Lösung $z_2 \approx 0{,}001$ führt nach der Rücksubstitution auf $t \approx 17{,}27$
Nach ca. 17 s wird der Auszug durch einen Magneten endgültig geschlossen.</td><td></td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>10</td><td>18</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">34</td></tr>
</table>

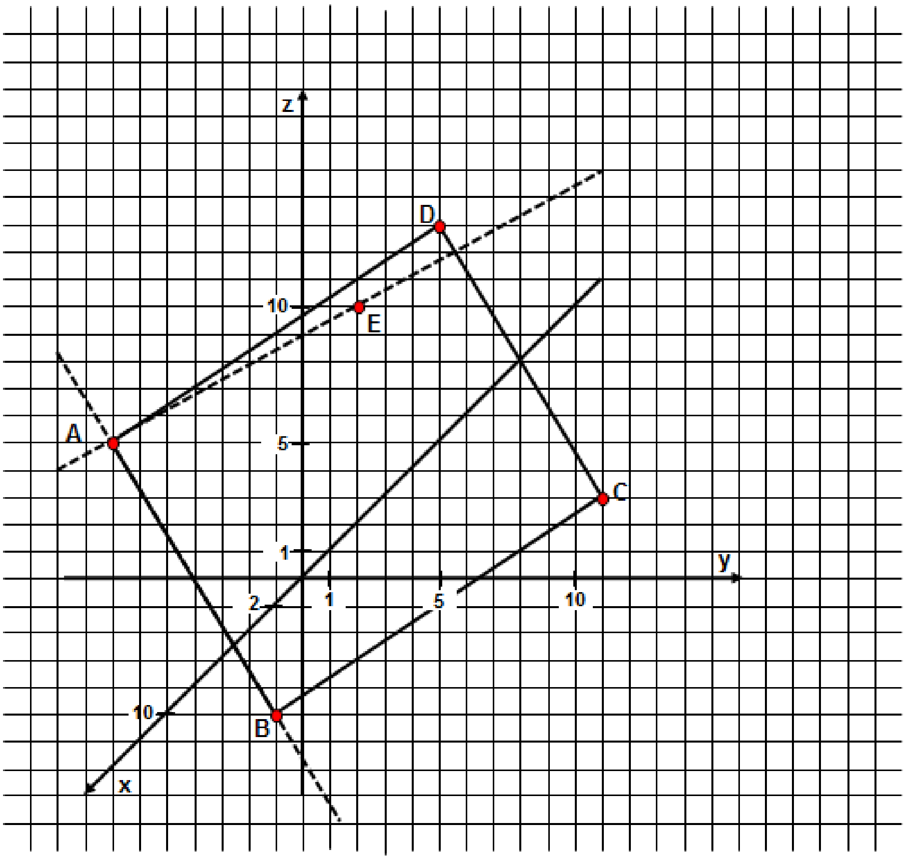
Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
2.1	Die Zählerfunktion wird null bei $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$. Der Nenner ist stets von null verschieden. Die Funktion hat die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$ und keine Polstellen. $D = \mathrm{IR}$	4		
2.2	$f(-x) = \frac{-(-x)^2+4}{(-x)^2+2} = \frac{-x^2+4}{x^2+2} = f(x)$ Der Graph von *f* ist achsensymmetrisch zur *y*-Achse.	2		
2.3	Bilden der Ableitungen: $f'(x) = \frac{-12x}{(x^2+2)^2}$ und $f''(x) = \frac{36x^2-24}{(x^2+2)^3}$ Notwendige Bedingung für lokale Extrema liefert: $x_E = 0$. $f''(0) = -3 < 0 \Rightarrow H(0 \mid 2)$		4 4	
2.4	$36x^2 - 24 = 0$ $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0{,}816$ $f(0{,}816) = \frac{5}{4}$ $W_1(-0{,}816 \mid 1{,}25)$ und $W_2(0{,}816 \mid 1{,}25)$		2 2	
2.5	$f(x) = \frac{-x^2+4}{x^2+2} = (-x^2+4):(x^2+2) = -1 + \frac{6}{x^2+2}$ Also gilt: $a(x) = -1$		2	

<table>
<tr>
<td>2.6</td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-1</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$-0{,}67$</td><td>-0,45</td><td>1</td><td>1</td><td>-0,45</td><td>-0,67</td></tr>
</table>


</td>
<td>2</td>
<td>4</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2.7</td>
<td>
Zeichnen des Rechtecks (siehe oben), $A = 2\,\text{FE}$
Ermitteln der Zielfunktion:
$A = ab = 2x \cdot y = 2x \cdot \dfrac{-x^2+4}{x^2+2} = \dfrac{-2x^3+8x}{x^2+2}$
Bestimmen der Ableitung:
$A'(x) = \dfrac{(-6x^2+8)(x^2+2)-(-2x^3+8x)2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{-2x^4-20x^2+16}{(x^2+2)^2}$

Bestimmung des Extremums:
Der Ansatz $-2x^4-20x^2+16=0$ ergibt umgeformt die Gleichung
$x^4+10x^2-8=0$. Nach Substitution $x^2=z$ erhält man
$z^2+10z-8=0$ mit den Lösungen $z_1=0{,}745$ und $z_2=-10{,}745$.
Nach Resubstitution erhält man $x_{1/2}=\pm 0{,}8629$. z_2 liefert keine weiteren Lösungen.
$A(0{,}8629)=2{,}047$
Antwort: Die maximale Fläche von 2,047 FE wird bei $x_{1/2}=\pm 0{,}8629$ erreicht.
</td>
<td>1</td>
<td></td>
<td>6</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td>
<td>9</td>
<td>18</td>
<td>6</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Summe der BE</td>
<td colspan="3">33</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Der rechte Winkel liegt in B, denn
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}-8\\8\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix}=0\Rightarrow\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{BA}$
$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-8)^2+8^2+4^2}=\left|\overrightarrow{BA}\right|$
Das Dreieck ist gleichschenklig</td><td>2

2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}2\\12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\12\end{pmatrix};\ D(-2\,|\,4\,|\,12)$
</td><td>2

2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB I	BE/AB II	BE/AB III
3.3	$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}\ ;\ \ r \in \mathrm{IR}$ $g_{AE}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}\ ;\ \ s \in \mathrm{IR}$ $\cos\sphericalangle(BAE) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{AE}\rvert} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{72}{12 \cdot \sqrt{396}} \approx 0{,}3$ $\cos\sphericalangle(BAE) = 72°.$ Ergänzung der Zeichnung um die beiden Geraden – siehe bei 3.2.	2 2	3 2	
3.4	Eine Parameterform: $F: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}\ ;\ \ r, s \in \mathrm{IR}$ $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix}\ ;\ \ r, s \in \mathrm{IR}$ Bestimmung eines möglichen Normalenvektors $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 96 \\ 48 \\ 96 \end{pmatrix}$ oder $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und d mit $d = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = 24$ Eine Gleichung in Koordinatenform: $F: 2x + y + 2z = 24$ $32 + 10 + 36 \neq 24\,;\, E \notin F$ Der Punkt E liegt nicht in der Ebene F.		2 3 2	
3.5	Eine zu F senkrechte Ebene H ist z. B.: $H: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{AB} + s\vec{n}\ ;\ \ r, s \in \mathrm{IR}$ $H: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ;\ \ r, s \in \mathrm{IR}$		4	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.6</td><td>Inhalt der Dreiecksfläche:
$A_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BA}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-8\\8\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-4\\-8\\8\end{pmatrix}\right|=72$
Abstand der Dreiecksfläche zum Koordinatenursprung:
aus der Koordinatenform: $F:2x+y+2z=24$
ergibt sich die Hessesche Normalform:
$\left|\vec{n}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right|=3$; $F:\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z=8$
Der Abstand beträgt 8.
Volumen der Pyramide:
$V=\frac{1}{3}A_{ABC}h=\frac{1}{3}\cdot 72\cdot 8=192\text{ VE}$
Alternative Berechnung der Dreiecksfläche mit Hilfe des Kreuzprodukts:
$A_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\8\\-8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\16\\-4\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}96\\48\\96\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot 144=72$</td><td></td><td></td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summen der BE in den Anforderungsbereichen</td><td>12</td><td>16</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th colspan="3">BE/AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Es gab 37 orangene Ostereier.
$P(3xO)=\frac{37\cdot 36\cdot 35}{150\cdot 149\cdot 148}\approx 0{,}0141$
$P(1xR;1xG;1xB)=\frac{43\cdot 22\cdot 48}{150\cdot 149\cdot 148}\cdot 6\approx 0{,}0824$
$P(\min .\, 2xG)=\frac{22\cdot 21\cdot 128}{150\cdot 149\cdot 148}\cdot 3+\frac{22\cdot 21\cdot 20}{150\cdot 149\cdot 148}$
$\approx 0{,}0536+0{,}0028$
$=0{,}0564$</td><td>1
2</td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>$\overline{E}$: Paul hat keine drei gleichfarbigen Ostereier gekauft.
$P(\overline{E})=1-P(E)$
$=1-\left(\frac{43\cdot 42\cdot 41}{150\cdot 149\cdot 148}+\frac{22\cdot 21\cdot 20}{150\cdot 149\cdot 148}+\frac{48\cdot 47\cdot 46}{150\cdot 149\cdot 148}+\frac{37\cdot 36\cdot 35}{150\cdot 149\cdot 148}\right)$
$=1-(0{,}0224+0{,}0028+0{,}0314+0{,}0141)$
$=1-0{,}0707=0{,}9293$</td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>M … Kind ist ein Mädchen
R … Kind hat ein rotes Osterei gekauft
<table>
<tr><th></th><th>M</th><th>$\overline{M}$</th><th>$\sum$</th></tr>
<tr><td>R</td><td>5</td><td>4</td><td>9</td></tr>
<tr><td>$\overline{R}$</td><td>7</td><td>4</td><td>11</td></tr>
<tr><td>$\sum$</td><td>12</td><td>8</td><td>20</td></tr>
</table></td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4.4</td><td>Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig, wenn gilt:
$P(B)\neq P_A(B)$.
$P(R)=\frac{9}{20}=0{,}45$
$P_M(R)=\frac{5}{12}\approx 0{,}4167$
Da beide Wahrscheinlichkeiten nicht gleich sind, ist der Kauf eines roten Ostereis stochastisch vom Geschlecht des Kindes abhängig.

(Wegen des kleinen Beobachtungsumfangs ist auch eine Argumentation möglich, die davon ausgeht, dass die berechneten Werte nahezu gleich sind.)</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>4.5</td><td>$P_{\overline{R}}(\overline{M})=\frac{P(\overline{R}\cap\overline{M})}{P(\overline{R})}=\frac{4}{11}=0{,}3636$
Die Wahrscheinlichkeit, dass das ausgewählte Kind ein Junge war, beträgt etwa 36 %.</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE/AB		
		I	II	III
4.6	Für alle angegebenen Fälle gilt: In der Urne liegen 14 nummerierte, ansonsten nicht weiter unterscheidbare Kugeln (n, entspricht der Anzahl der Organisatoren), von denen 4 Kugeln (k, entspricht der Anzahl der übrig gebliebenen Ostereier) gezogen werden. a) Ziehen ohne Zurücklegen (jeder nur 1 Ei) ohne Beachtung der Reihenfolge (alle Eier sind gleichfarbig blau): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ $= \binom{14}{4} = 1001$ b) Ziehen ohne Zurücklegen (jeder nur 1 Ei) mit Beachtung der Reihenfolge (Eier sind verschiedenfarbig): $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{14!}{(14-4)!} = 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11 = 24\,024$ c) Ziehen mit Zurücklegen (mehrere Eier pro Person mgl.) mit Beachtung der Reihenfolge (Eier sind verschiedenfarbig): $n^k = 14^4 = 38\,416$		10	
4.7	E: Zwei der 7 Organisatoren, die gemeinsam nach Hause fahren, haben ein Osterei bekommen (Fall 4.6. a) vorausgesetzt). $P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$ $= \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{10}{5}}{\binom{14}{7}}$ $= \frac{6\cdot 252}{3\,432}$ $\approx 0{,}4406$			4
	Summen der BE in den Anforderungsbereichen	10	19	4
	Summe der BE	33		