Abschlussprüfung Berufsoberschule 2013
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

1 Exponentialfunktionen **/34**

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \left(x^2 - 5\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x}$.

Eine Stammfunktion von f ist F mit $F(x) = -(2x^2 + 8x + 6) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x}$.

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten des Graphen von f für $x \to \pm\infty$. **/2**

1.2 Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte des Graphen der Funktion f. **/4**

[Teilergebnis: $x_{N_{1/2}} = \pm\sqrt{5}$]

1.3 Bestimmen Sie die Art und Lage der Extrempunkte des Graphen der Funktion f. **/9**

[zur Kontrolle: $f'(x) = \left(-0,5x^2 + 2x + 2,5\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x}$]

1.4 Untersuchen Sie den Graphen von f auf Wendepunkte. **/5**

Hinweis: Auf einen Nachweis mittels Vorzeichenwechselkriterium oder dritter Ableitung kann verzichtet werden.

1.5 Zeichnen Sie mit Hilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f im Intervall [–2,5; 12]. Ergänzen Sie dafür auch folgende Wertetabelle. **/5**

x	–2,5	–2	1	3	8	12
$f(x)$	4,36			0,89		0,34

Verwenden Sie das Koordinatensystem auf der **nächsten Seite**.

1.6 Der Graph der Funktion f schließt mit der x-Achse eine Fläche A_1 vollständig ein. **/4**

Kennzeichnen Sie die Fläche in Ihrer Skizze aus Aufgabe 1.5.

Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

[zur Kontrolle: $A_1 \approx 16,856$ FE]

1.7 Zwischen der x-Achse und dem Graphen von f befindet sich rechts von der größeren Nullstelle $x_{N_1} = \sqrt{5}$ eine unbegrenzte Fläche A_2. **/3**

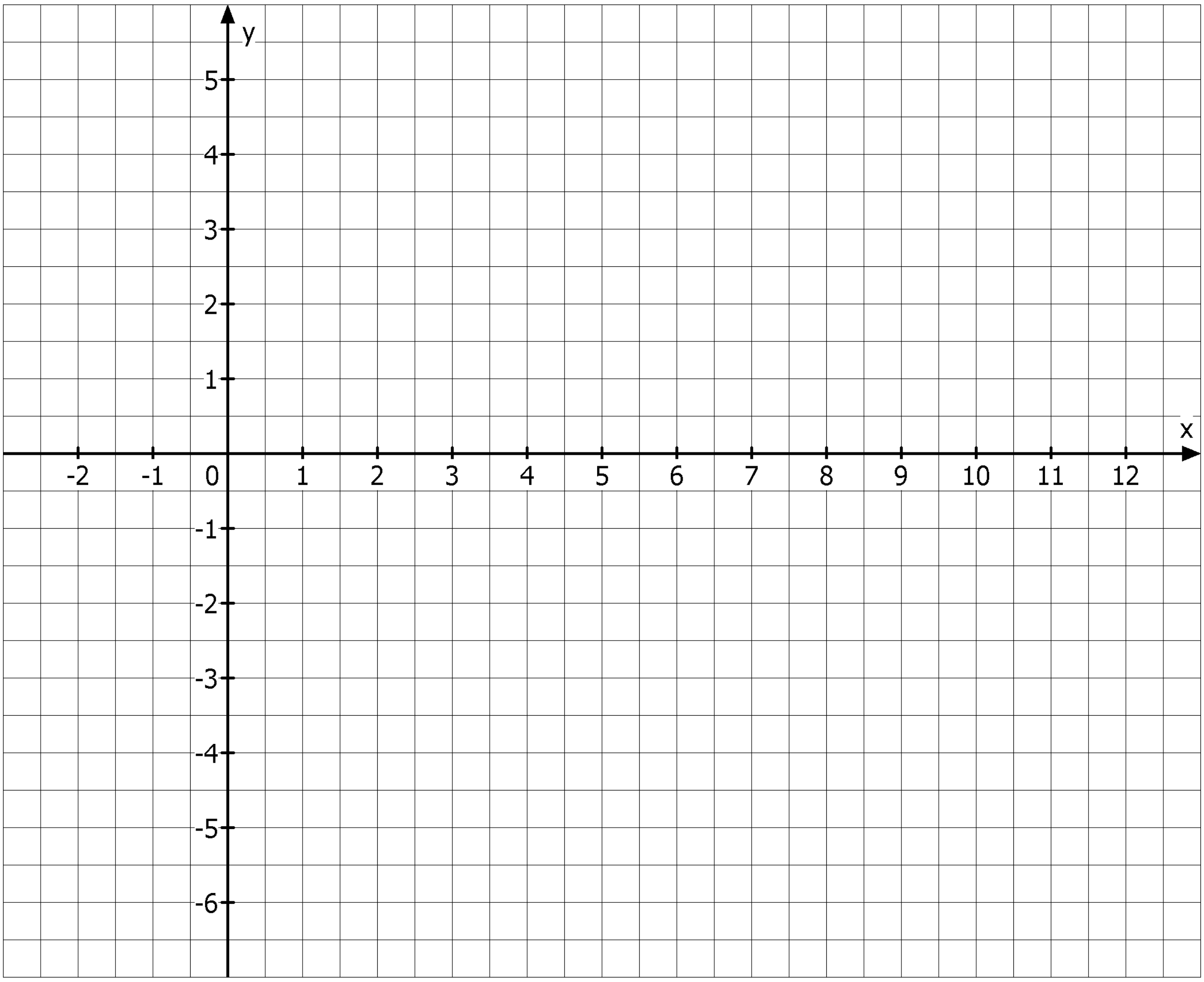
Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Inhalt von ca. 11,079 FE besitzt.

1.8 Untersuchen Sie, ob es eine Zahl a mit $a > \sqrt{5}$ geben kann, so dass gilt: **/2**

$$\int_{-\sqrt{5}}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \;.$$

Koordinatensystem für Aufgabe 1.5 → nächste Seite

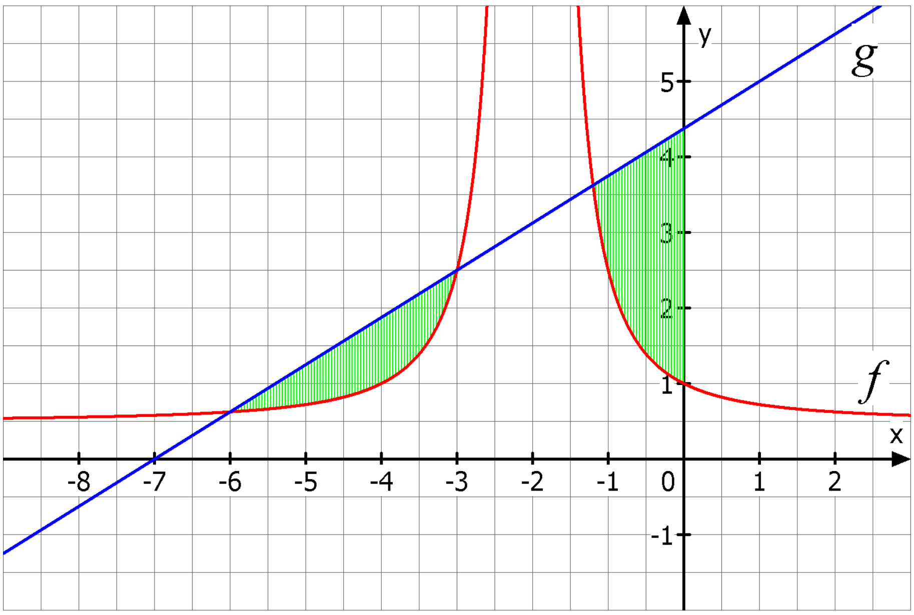
Koordinatensystem für Aufgabe 1.5



2 Gebrochenrationale Funktionen /33

Im Koordinatensystem sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

Es gilt: $f(x)=\dfrac{x^2+4x+8}{2(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x+8}{2x^2+8x+8}$ und $g(x)=\dfrac{5}{8}x+\dfrac{35}{8}$



2.1 Zeigen Sie, dass die Funktion f **keine** Nullstellen hat. /2

2.2 Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f. /2

2.3 Zeigen Sie, dass sich die Funktionsgleichung von f wie folgt darstellen lässt: /4

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{(x+2)^2}$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der waagerechten Asymptote des Graphen von f.

2.4 Im Koordinatensystem erkennt man, dass $x_{s_1}=-6$ und $x_{s_2}=-3$ zwei Schnittstellen von f und g sind. /9

Berechnen Sie die dritte Schnittstelle von f und g.

Hinweis: Falls Sie Ihren Ansatz zur Schnittstellenberechnung nicht vollständig umformen können, dann lösen Sie die Gleichung
$0=10x^3+102x^2+288x+216$.

[zur Kontrolle: $x_{s_3}=-1{,}2$]

Fortsetzung auf der nächsten Seite à

2.5 Ermitteln Sie je eine Stammfunktion von g und f. **/5**

[zur Kontrolle eine mögliche Stammfunktion von f: $F(x)=\frac{1}{2}x-\frac{2}{(x+2)}$]

2.6 Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der beiden markierten Flächen. **/6**

2.7 Eine Gerade *t* verläuft durch die Punkte $S_2(-3\,|\,2{,}5)$ und $S_y(0\,|\,1)$. **/5**

Zeichnen Sie die Gerade *t* in das gegebene Koordinatensystem ein.

Zeigen Sie durch Rechnung, dass diese Gerade die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S_y(0\,|\,1)$ ist.

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2013
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

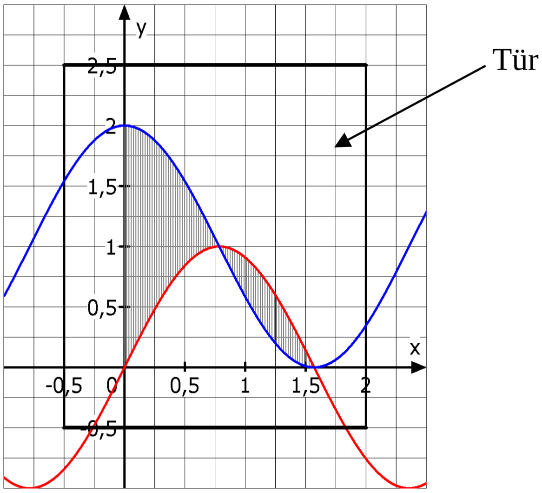
3 Trigonometrische Funktionen

/33

In der Abbildung ist eine große Tür dargestellt, die mit einer zweiteiligen Verglasung (grau hervorgehoben) versehen ist. Diese Verglasung ist durch die y-Achse und die Graphen von f und g im 1. Quadranten begrenzt.

Es gilt: $f(x) = \sin(2x)$ und $g(x) = 1 + \cos(2x)$ mit $1\,\mathrm{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{m}$.

Die Schnittstellen von f und g innerhalb der Tür sind $x_{S_1} = \frac{1}{4}\pi$ und $x_{S_2} = \frac{1}{2}\pi$.



3.1 Beschriften Sie die dargestellten Graphen mit f bzw. g. **/3**

Begründen Sie Ihre Zuordnung.

3.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt der verglasten Fläche. **/11**

[zur Kontrolle eine mögliche Stammfunktion von g: $G(x) = x + \frac{1}{2}\sin(2x)$]

3.3 Begründen Sie ohne Rechnung, welches Vorzeichen der Wert des folgenden Integrals hat. **/3**

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

3.4 Berechnen Sie den Schnittwinkel, den die Tangenten an die Graphen von f und g im Schnittpunkt $S_1\left(\frac{1}{4}\pi \,|\, 1\right)$ bilden. **/6**

3.5 Die Funktionsgleichungen werden geändert in **/2**

$f_v(x) = \sin(2x + \frac{1}{2}\pi)$ und $g_v(x) = 1 + \cos(2x + \frac{1}{2}\pi)$.

Erläutern Sie, wie sich die Darstellung des Graphen von f_v im Vergleich zu dem Graphen von f bzw. des Graphen von g_v im Vergleich zu dem Graphen von g unterscheiden würde.

3.6 Zeigen Sie durch Berechnung der Schnittstellen, dass $x_{S_1} = \frac{1}{4}\pi$ und $x_{S_2} = \frac{1}{2}\pi$ die ersten beiden positiven Schnittstellen von f und g sind. **/8**

Abschlussprüfung Berufsoberschule 2013
Mathematik

Aufgabenvorschlag B

4 Analytische Geometrie /33

In der Abbildung ist ein Verkaufsstand für einen Wochenmarkt dargestellt.
Die rechteckige Grundfläche des Verkaufsstandes hat die Eckpunkte *ABCD*.
Die rechteckige Rückwand hat die Eckpunkte *CGHD*.
1 LE $\hat{=}$ 1 m.

Hinweis: Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.

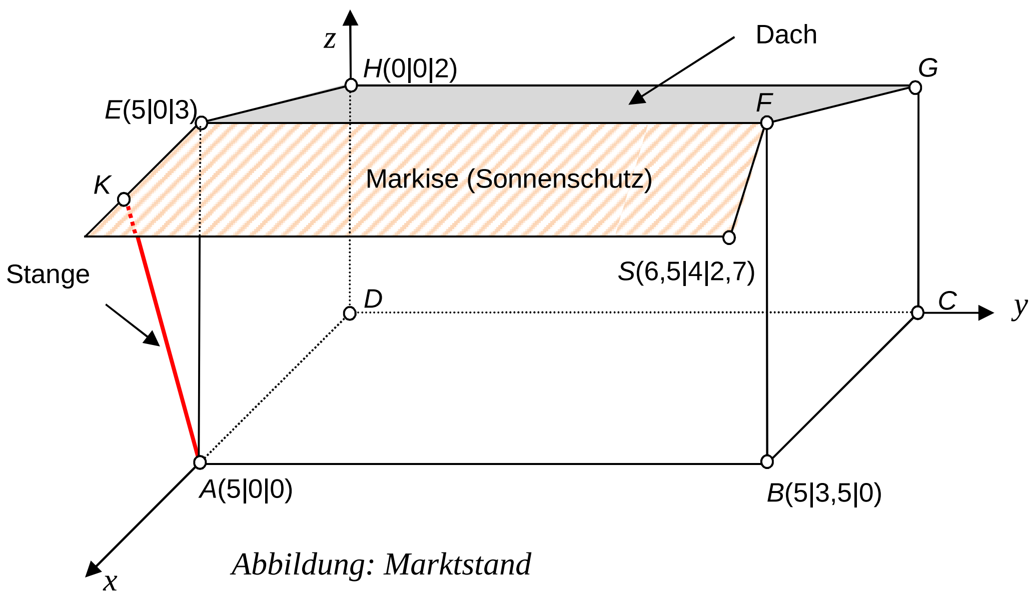


Abbildung: Marktstand

4.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte *C, F* und *G* aus der Abbildung. /3

4.2 Berechnen Sie den Inhalt der Seitenfläche *DAEH* in m². /4

Berechnen Sie das Volumen des Innenraums des Verkaufstands in m³.

4.3 Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte *H* und *E* verläuft. /3

Berechnen Sie die Länge der Dachkante $\overline{HE}$ in m.

4.4 Geben Sie eine Gleichung der Ebene *R* des Daches (grau markiert) in Parameter- und eine in Koordinatenform an. /6

[mögliches Ergebnis für *R* in Koordinatenform: $R: -x + 5z = 10$]

Fortsetzung auf der nächsten Seite →

4.5 Die in der Abbildung dargestellte trapezförmige Markise (Sonnenschutz) liegt in der Ebene W mit: **/5**

$$W : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ -0,3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Ebene W der Markise und die Ebene R des Daches schneiden.

4.6 Die rechte vordere Ecke der Markise ist gegeben durch den Punkt $S(6,5\,|\,4\,|\,2,7)$, siehe Abbildung. Bei Sonnenschein ist der Schatten der Markise vor dem Verkaufsstand auf der x-y-Ebene sichtbar. **/5**

Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes S' im Schattenbild auf der x-y-Ebene, wenn paralleles Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}$ einfällt.

4.7 Zur Stabilisierung der trapezförmigen Markise wird diese durch eine Stange abgestützt, die an der linken Außenkante im Punkt K befestigt und im Punkt $A(5\,|\,0\,|\,0)$ verankert ist (siehe Abbildung). **/7**

Die linke Außenkante der Markise liegt auf der Geraden $k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ -0,3 \end{pmatrix}$; $r \in \mathrm{IR}$.

Bestimmen Sie den Punkt K so, dass die Länge l der Stange so kurz wie möglich ist.

Geben Sie die Länge l (in m) der Stange auf cm gerundet an.

5 Wahrscheinlichkeitsrechnung /33

In einer repräsentativen statistischen Erhebung in Berlin haben von 13600 befragten Personen 2040 Personen angegeben, Linkshänder zu sein.

5.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person Linkshänder ist. Geben Sie diese auch in Prozent an. **/2**

In einer Straßenumfrage in Berlin werden 60 Personen nach ihrer bevorzugten Schreibhand befragt. Rechnen Sie im Folgenden mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 %, dass eine zufällig ausgewählte Person Linkshänder ist.

5.2 Ermitteln Sie folgende Wahrscheinlichkeiten, z. B. unter Zuhilfenahme eines Baumdiagramms: **/6**
E_1: Unter den ersten drei befragten Personen ist genau ein Linkshänder.
E_2: Von drei befragten Personen ist die dritte Linkshänder.

5.3 Formulieren Sie das Gegenereignis zum Ereignis E „Unter den ersten sieben befragten Personen ist mindestens ein Linkshänder“. **/3**

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von E mit Hilfe des Gegenereignisses.

5.4 Geben Sie an, wie viele Linkshänder unter den 60 befragten Personen zu erwarten sind. **/2**

5.5 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 60 befragten Personen genau 9 Linkshänder sind. **/3**

5.6 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 60 befragten Personen der Straßenumfrage mehr als 7, aber weniger als 11 Personen Linkshänder sind. **/4**

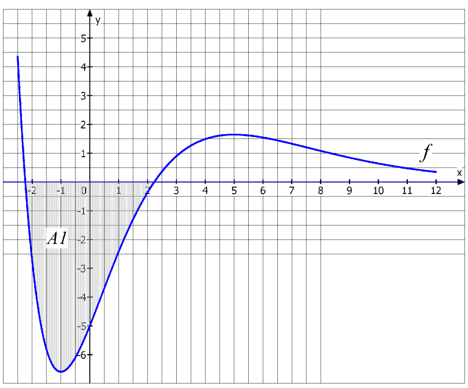
5.7 Berechnen Sie, wie viele Personen man mindestens befragen muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einen Linkshänder getroffen hat. **/5**

In einer weiteren Befragung in einem anderen Bundesland werden folgende Ergebnisse festgestellt: 12 % aller befragten Personen sind Linkshänder. Unter ihnen waren von den Linkshändern 40 % Frauen und von den Rechtshändern 49 % Frauen.

5.8 Zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und geben Sie alle Pfad- und Zweigwahrscheinlichkeiten an. **/3**
Benutzen Sie dabei folgende Abkürzungen:
L: Die befragte Person ist Linkshänder.
F: Die befragte Person ist eine Frau.

5.9 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine befragte und zufällig ausgewählte Person eine Frau ist. **/2**

5.10 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Frau aus dem Kreis der befragten Personen Linkshänderin ist. **/3**

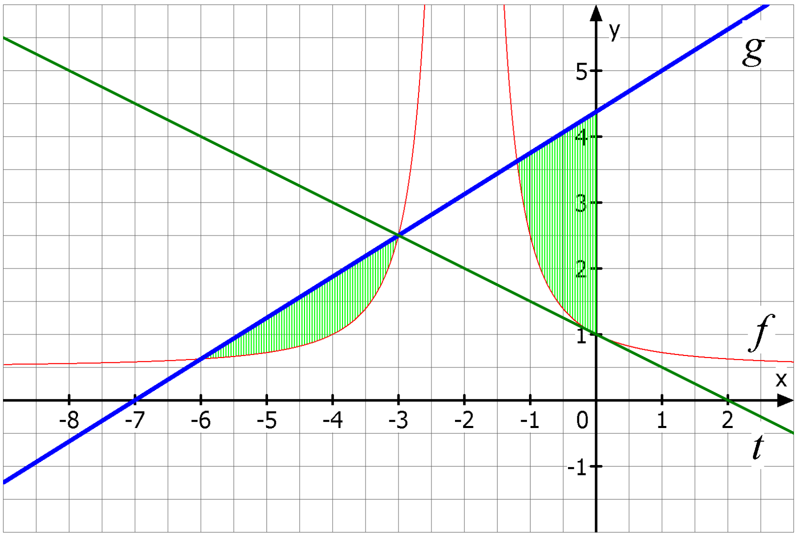
<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>1.1</td><td>$x \to -\infty: \ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2-5\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} \to +\infty$
$x \to +\infty: \ \lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2-5\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} = 0$</td><td></td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>x_N ist Nullstelle von $f \Leftrightarrow f(x_N)=0$
$\left(x^2-5\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} = 0$
Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist.
$\left(x^2-5\right)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{N_{1/2}} = \pm\sqrt{5}}}$ $\mathrm{e}^{-0,5x} \neq 0$ für alle $x \in \mathrm{ID}$
$S_{x1}(-\sqrt{5} \mid 0)$; $S_{x2}(\sqrt{5} \mid 0)$
$f(0)=-5 \Rightarrow S_y(0 \mid -5)$</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.3</td><td>x_E ist Extremstelle von f, wenn gilt: $f'(x_E)=0$ und $f''(x_E) \neq 0$.
$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-0,5x} + (x^2-5) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} \cdot (-0,5) = \left(-0,5x^2+2x+2,5\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x}$
$f''(x) = (-x+2) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} + (-0,5x^2+2x+2,5) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} \cdot (-0,5)$
$= \left(0,25x^2-2x+0,75\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x}$
$-0,5x^2+2x+2,5=0$
$x_1=-1$; $x_2=5$
$f''(-1)>0 \Rightarrow$ TP bei $x_E=-1$ $f(-1) \approx -6,59 \Rightarrow \underline{\underline{T(-1 \mid -6,59)}}$
$f''(5)<0 \Rightarrow$ HP bei $x_E=5$ $f(5) \approx 1,64 \Rightarrow \underline{\underline{H(5 \mid 1,64)}}$</td><td>5</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>1.4</td><td>notwendige Bedingung für x_W: $f''(x_W)=0$
$f''(x) = \left(0,25x^2-2x+0,75\right) \cdot \mathrm{e}^{-0,5x} = 0 \Rightarrow \left(0,25x^2-2x+0,75\right)=0$
$\Rightarrow x_1 \approx 0,39$; $x_2 \approx 7,61$
$f(0,39) \approx -3,99 \Rightarrow \underline{\underline{W_1(0,39 \mid -3,99)}}$ $f(7,61) \approx 1,18 \Rightarrow \underline{\underline{W_2(7,61 \mid 1,18)}}$</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>1.5</td><td><table><tr><td>x</td><td>–2,5</td><td>–2</td><td>1</td><td>3</td><td>8</td><td>12</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>4,36</td><td>**–2,72**</td><td>**–2,43**</td><td>0,89</td><td>**1,08**</td><td>0,34</td></tr></table>
</td><td>1</td><td>4</td><td></td></tr>
</table>

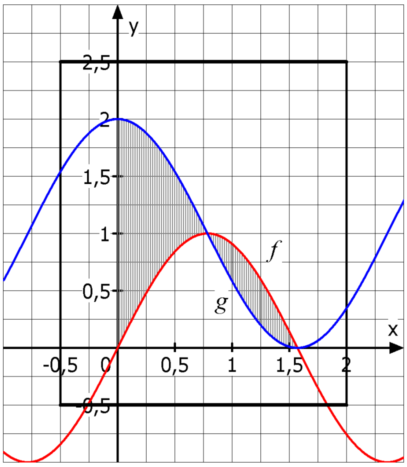
Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
1.6	Kennzeichnung siehe Graphik zu 1.5 $A_1 = \left\|\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (x^2-5)\cdot e^{-0{,}5x}dx\right\| = \left\|\left[-(2x^2+8x+6)\cdot e^{-0{,}5x}\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\right\|$ $\approx \|-11{,}079-(5{,}777)\|$ $\approx \underline{\underline{16{,}856 \text{ FE}}}$	1	3	
1.7	Berechnung des Flächeninhalts der unbegrenzten Fläche durch Grenzwertbetrachtung: gesucht: $A_2 = \lim\limits_{t\to\infty} A(t)$ $A(t) = \int_{\sqrt{5}}^{t} (x^2-5)\cdot e^{-0{,}5x}dx = \left[-(2x^2+8x+6)\cdot e^{-0{,}5x}\right]_{\sqrt{5}}^{t}$ $\approx -\left(2t^2+8t+6\right)\cdot e^{-0{,}5t} - (-11{,}079)$ $\lim\limits_{t\to\infty}\left(-\left(2t^2+8t+6\right)\cdot e^{-0{,}5t}+11{,}079\right) = 0+11{,}079 = \underline{\underline{11{,}079}}$ Der Inhalt der Fläche hat den Wert 11,079 FE.			3
1.8	$\int_{-\sqrt{5}}^{a} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} f(x)\,dx + \int_{\sqrt{5}}^{a} f(x)\,dx$ Der Wert des zweiten Integrals ist maximal 11,079 (für $a \to \infty$). Der Wert des ersten Integrals beträgt rund –16,856. Deshalb kann es kein a geben, für das sich beide Teilintegrale „aufheben“ und das Integral null wird.			2
	Summe (Aufgabe 1)	11	18	5
	Mögliche BE	34		

Abschlussprüfung Berufsoberschule
2013 Mathematik
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>Die Nullstellen von f sind auch Nullstellen des Zählers.
$z(x)=0 \;\Rightarrow\; x^2+4x+8=0$
$x_{1/2}=-2\mp\sqrt{-4}\notin \mathrm{IR} \;\Rightarrow$ Der Zähler hat keine Nullstellen.
f hat keine Nullstellen.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>Nullstellen des Nenners sind die Definitionslücken.
$n(x)=0 \;\Rightarrow\; 2(x+2)^2=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=-2$
$\mathrm{ID}=\mathrm{IR}\setminus\{-2\}$</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2.3</td><td>$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{(x+2)^2}$
$=\frac{(x+2)^2}{2(x+2)^2}+\frac{4}{2(x+2)^2}$
$=\frac{x^2+4x+8}{2(x+2)^2}$
Mit $f(x)=\frac{z(x)}{n(x)}$ gilt für den Funktionsterm der Asymptotenfunktion a:
$\frac{z(x)}{n(x)}=a(x)+\frac{r(x)}{n(x)}$ mit $grad(r)<grad(n)$
Daraus folgt $a(x)=\frac{1}{2}$.</td><td>3</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>2.4</td><td>$f(x)=g(x)$
$\frac{x^2+4x+8}{2(x+2)^2}=\frac{5}{8}x+\frac{35}{8}$
$8(x^2+4x+8)=(5x+35)\cdot 2(x^2+4x+4)$
$8x^2+32x+64=10x^3+110x^2+320x+280$
$0=10x^3+102x^2+288x+216$
Polynomdivision mit z. B. $(x+3)$, da $x_{s_2}=-3$ Schnittstelle von f und g
$(10x^3+102x^2+288x+216):(x+3)=10x^2+72x+72$
$-\underline{(10x^3+30x^2)}$
$72x^2+288x+216$
$-\underline{(72x^2+216x)}$
$72x+216$
$-\underline{(72x+216)}$
0</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	II	III
	$10x^2+72x+72=0 \quad \vert \cdot \frac{1}{10}$ $x^2+7,2x+7,2=0 \quad \vert$ pq-Formel $x_{1/2}=-3,6\mp\sqrt{3,6^2-7,2}$ $=-3,6\mp 2,4$ $x_1=-6$ (vorgegeben); $x_2=-1,2$ $\Rightarrow \quad x_{S_3}=-1,2$ ist die gesuchte Schnittstelle.		5	
2.5	$G(x)=\frac{5}{16}x^2+\frac{35}{8}x$ $F(x)=\frac{1}{2}x+2\cdot\frac{1}{-2+1}(x+2)^{-2+1}$ $=\frac{1}{2}x-\frac{2}{x+2}$	2	3	
2.6	$A=A_1+A_2$ $A_1=\left[G(x)-F(x)\right]_{-6}^{-3}$ $=\left[\frac{5}{16}x^2+\frac{35}{8}x-\frac{1}{2}x+\frac{2}{x+2}\right]_{-6}^{-3}$ $=\left(\frac{45}{16}-\frac{105}{8}+\frac{3}{2}-2\right)-\left(\frac{180}{16}-\frac{210}{8}+3-\frac{1}{2}\right)$ $=\frac{27}{16}$ $\approx 1,7$ FE $A_2=\left[G(x)-F(x)\right]_{-1,2}^{0}$ $=\left[\frac{5}{16}x^2+\frac{35}{8}x-\frac{1}{2}x+\frac{2}{x+2}\right]_{-1,2}^{0}$ $=\left(0+0-0+1\right)-\left(0,45-5,25+0,6+2,5\right)$ $=2,7$ FE $A\approx 1,7+2,7$ $\approx 4,4$ FE		6	

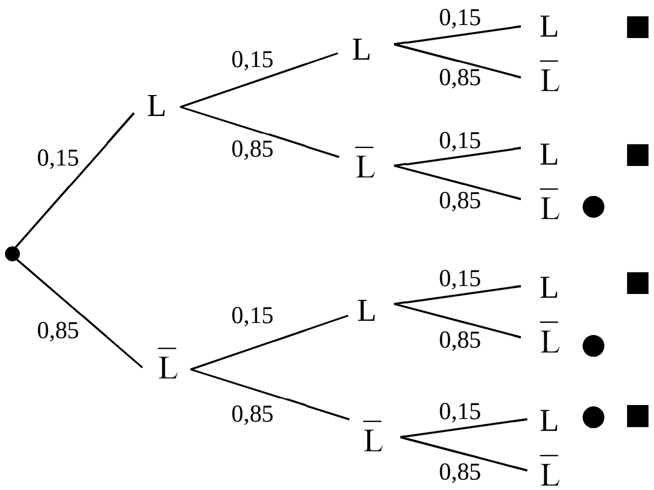
Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
2.7	 Es ist nur zu zeigen, dass $f'(0)=m_t$, da die Graphen von t und f den selben Schnittpunkt mit der y-Achse haben. $f'(x)=2\cdot(-2)(x+2)^{-3}\cdot(1)$ $=-\frac{4}{(x+2)^3}$ $f'(0)=-\frac{4}{(0+2)^3}=-0,5$ $m_t=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1-2,5}{0-(-3)}=-0,5$ Damit ist t die Tangente in $S_y(0\mid 1)$.	1		4
	Summe (Aufgabe 2)	14	15	4
	Mögliche BE		33	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>Beschriftung

Mögliche Begründung: Der Graph von f verläuft durch den Ursprung und seine y-Koordinaten wechseln zwischen –1 und +1. Deshalb ist er der untere Graph. Der andere Graph muss dann zu g gehören.</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>$F(x)=-\frac{1}{2}\cos(2x)$
$G(x)=x+\frac{1}{2}\sin(2x)$
$A=A_1+A_2$
$A_1=\left[G(x)-F(x)\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}$
$=\left[(\frac{1}{2}\sin(2x)+x)-(-\frac{1}{2}\cos(2x))\right]_0^{\frac{1}{4}\pi}$
$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi+0\right)-\left(0+0+\frac{1}{2}\right)$
$=\frac{1}{4}\pi$
$A_2=\left[F(x)-G(x)\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}$
$=\left[(-\frac{1}{2}\cos(2x))-(\frac{1}{2}\sin(2x)+x)\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}$
$=\left(\frac{1}{2}-0-\frac{1}{2}\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\pi\right)$
$=(1-\frac{1}{4}\pi)$
$A=\frac{1}{4}\pi+(1-\frac{1}{4}\pi)=1$
Die verglaste Fläche hat einen Flächeninhalt von 1 m^2.</td><td>4</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td>3.3</td><td>Es gilt: $f(x)\le g(x)$ für $0\le x\le\frac{1}{4}\pi$, $f(x)\ge g(x)$ für $\frac{1}{4}\pi\le x\le\frac{1}{2}\pi$ und die „linke Fläche“ ist größer als die rechte.
Daraus folgt: $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x<0$</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
</table>

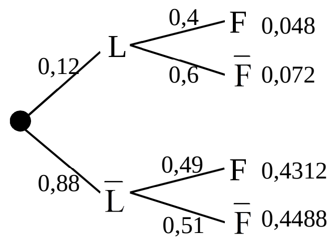
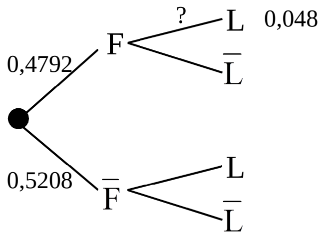
Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
3.4	$\alpha_S = \arctan(g'(\tfrac{1}{4}\pi)) - \arctan(f'(\tfrac{1}{4}\pi))$ $g'(x) = -2\cdot\sin(2x) \;\Rightarrow g'(\tfrac{1}{4}\pi) = -2$ $f'(x) = 2\cos(2x) \;\Rightarrow f'(\tfrac{1}{4}\pi) = 0$ $\alpha_S = \arctan(-2) - \arctan(0) \approx \underline{\underline{-63,4°}}$ Der Schnittwinkel hat die Größe 63,4°. (Für die Berechnung des Nebenwinkels gibt es ggf. die volle Punktzahl.)	6		
3.5	Durch den Phasenwinkel $\varphi = +\tfrac{1}{2}\pi$ werden die Graphen nach links um den Wert $\tfrac{1}{4}\pi$ verschoben.			2
3.6	$f(x) = g(x)$ $\sin(2x) = 1 + \cos(2x) \mid ()^2$ $\sin^2(2x) = 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x) \mid$ trigonom. Pythagoras $1 - \cos^2(2x) = 1 + 2\cos(2x) + \cos^2(2x)$ $0 = 2\cos^2(2x) + 2\cos(2x)$ $0 = 2\cos(2x)\cdot(\cos(2x)+1) \mid$ Regel vom Nullprodukt $2\cos(2x) = 0 \mid \cdot\tfrac{1}{2} \mid \arccos()$ oder $\cos(2x) + 1 = 0 \mid -1 \mid \arccos()$ $2x = \arccos(0) \mid \cdot\tfrac{1}{2}$ oder $2x = \arccos(-1) \mid \cdot\tfrac{1}{2}$ $x_{S_1} = \tfrac{1}{4}\pi$; $x_{S_2} = \tfrac{1}{2}\pi$		8	
	Summe (Aufgabe 3)	11	17	5
	Mögliche BE		33	

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
4.1	$C(0\|3,5\|0)$, $F(5\|3,5\|3)$, $G(0\|3,5\|2)$	3		
4.2	Die Seitenfläche stellt ein Trapez dar. $A_{DAEH} = \frac{2+3}{2}\cdot 5 = 12,5$ Der Flächeninhalt der Seitenfläche beträgt 12,5 m^2. Rauminhalt des Prisma: $V = A\cdot h$ $V = 12,5\cdot 3,5 = 43,75$ Das Volumen des Innenraums des Verkaufstands beträgt $43,75\ m^3$.	2	2	
4.3	$g:\vec{x} = \overrightarrow{DH} + r\overrightarrow{HE}\ ;\quad r\in \mathrm{IR}$ $g:\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5-0\\0-0\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix};\quad r\in \mathrm{IR}$ Länge der Dachkante: $\left\|\overrightarrow{HE}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{26} \approx 5,1\ (\text{in m})$	3		
4.4	Eine Parameterform: $R:\vec{x} = \overrightarrow{DH} + r\overrightarrow{HE} + t\overrightarrow{HG}\ ;\quad r,t\in \mathrm{IR}$ $R:\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3,5\\0\end{pmatrix};\quad r,t\in \mathrm{IR}$ Bestimmung eines Normalenvektors: $\vec{n} = \overrightarrow{HE}\times\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3,5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\0\\\frac{35}{2}\end{pmatrix}$ und d mit $d = \vec{n}\cdot\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix}-\frac{7}{2}\\0\\\frac{35}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} = 35$ Eine Koordinatendarstellung: $R:\ -x+5z=10$	3	3	

<table>
<tr><th rowspan="2">Teil-
aufgabe</th><th rowspan="2">Erwartete Teilleistung</th><th colspan="3">BE in AB</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>4.5</td><td>Der Winkel zwischen den beiden Ebenen entspricht dem Winkel zwischen deren Normalenvektoren.
ein Normalenvektor von R: $\vec{n}_R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ (aus dem Kontrollergebnis zu 4.4)
ein Normalenvektor von W: $\vec{n}_W = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{20} \\ 0 \\ -\frac{21}{4} \end{pmatrix}$
$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_R} \cdot \overrightarrow{n_W}}{\left|\overrightarrow{n_R}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_W}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{21}{20} \\ 0 \\ -\frac{21}{4} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -\frac{21}{20} \\ 0 \\ -\frac{21}{4} \end{pmatrix}\right|} \Rightarrow \alpha \approx 23°$
Der Schnittwinkel hat die Größe $23°$.
(Für die Berechnung des Nebenwinkels gibt es ggf. die volle Punktzahl.)</td><td></td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>4.6</td><td>Berechnung des Schnittpunkts der Gerade der Sonnenstrahlen durch den Punkt S mit der x-y-Ebene.
$m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 4 \\ 2{,}7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -0{,}3 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathrm{IR}$
$z = 0 \Rightarrow r = 2{,}7;\ \ x = 6{,}5 - 0{,}81 = 5{,}69;\ \ y = 4 - 1{,}35 = 2{,}65$
Der Schattenpunkt ist $S'(5{,}69 \mid 2{,}65 \mid 0)$.</td><td></td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4.7</td><td>eine Normalengleichung von E mit $A \in E \perp k$
$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = 0$
Lotfußpunktes K als Schnittpunkt der Gerade k und Ebene E.
$\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ -0{,}3 \end{pmatrix} = 0$
$\Rightarrow r \approx 0{,}35 \quad ; \quad K(5{,}52 \mid -0{,}17 \mid 2{,}90)\,; \ l = \left|\overrightarrow{AK}\right| \approx 2{,}95$
Die Länge der Stange beträgt 2,95 m bzw. 295 cm.</td><td></td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe (Aufgabe 4)</td><td>11</td><td>15</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>Mögliche BE</td><td colspan="3">33</td></tr>
</table>

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB I	BE in AB II	BE in AB III
5.1	L: Die befragte Person ist Linkshänder. $P(\mathrm{L})=\dfrac{\text{Anzahl der günstigen Ausgänge}}{\text{Anzahl der möglichen Ausgänge}}=\dfrac{2040}{13600}=\underline{\underline{0{,}15}}=\underline{\underline{15\,\%}}$	2		
5.2	 E_1: Unter den ersten drei befragten Personen ist genau ein Linkshänder. ● E_2: Die dritte befragte Person ist ein Linkshänder. ■ $P(E_1)=3\cdot 0{,}85^2\cdot 0{,}15\approx\underline{\underline{0{,}325}}$ $P(E_2)=0{,}15^3+2\cdot 0{,}15^2\cdot 0{,}85+0{,}15\cdot 0{,}85^2=\underline{\underline{0{,}15}}$ oder mittels Unabhängigkeit von vorhergehenden Personen	6		
5.3	$\overline{\mathrm{E}}$: Unter den ersten sieben befragten Personen ist keine (einzige), die Linkshänder ist. $P(\mathrm{E})=1-P(\overline{\mathrm{E}})$ $P(\overline{\mathrm{E}})=0{,}85^7\;\Rightarrow\;P(\mathrm{E})=1-0{,}85^7\approx\underline{\underline{0{,}679}}$		3	
5.4	$E=n\cdot p=60\cdot 0{,}15=9$ Es sind unter den 60 Befragten 9 Linkshänder zu erwarten.		2	
5.5	Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette. $P(X=k)=B(n;p;k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ mit $n=60\quad p=0{,}15$ $P(X=9)=B(60;\ 0{,}15;\ 9)=\binom{60}{9}\cdot 0{,}15^9\cdot 0{,}85^{51}\approx\underline{\underline{0{,}143}}$		3	
5.6	$P(7<X<11)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$ $P(X=8)=\binom{60}{8}\cdot 0{,}15^8\cdot 0{,}85^{52}\approx 0{,}140$ $P(X=9)=\binom{60}{9}\cdot 0{,}15^9\cdot 0{,}85^{51}\approx 0{,}143$ $P(X=10)=\binom{60}{10}\cdot 0{,}15^{10}\cdot 0{,}85^{50}\approx 0{,}129$ Summe: $0{,}412$		4	

Abschlussprüfung Berufsoberschule
2013 Mathematik
Erwartungshorizont für Aufgabenvorschlag B

Teil-aufgabe	Erwartete Teilleistung	BE in AB		
		I	II	III
5.7	A: Es wurde mindestens ein Linkshänder befragt. $P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{\mathrm{A}}) \geq 0{,}99 \;\Rightarrow\; P(\overline{\mathrm{A}}) \leq 0{,}01$ $P(\overline{\mathrm{A}}) = B(n;\ 0{,}15;\ 0) = \binom{n}{0} \cdot 0{,}15^0 \cdot 0{,}85^{n-0} = 0{,}85^n \leq 0{,}01$ $\Rightarrow\; n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}85} \approx \underline{28{,}34}$ Man muss mindestens 29 Personen befragen, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einen Linkshänder trifft.			5
5.8		3		
5.9	$P(\mathrm{F}) = 0{,}12 \cdot 0{,}4 + 0{,}88 \cdot 0{,}49 = \underline{\underline{0{,}4792}}$		2	
5.10	Möglicher Lösungsweg <u>Inverser Baum:</u>  $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}) = \frac{0{,}048}{0{,}4792} \approx \underline{\underline{0{,}1}}$ <u>alternativ:</u> BAYES'sche Formel $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{L}) = \frac{P(\mathrm{L}) \cdot P_{\mathrm{L}}(\mathrm{F})}{P(\mathrm{F})} = \frac{0{,}12 \cdot 0{,}4}{0{,}4792} \approx \underline{\underline{0{,}1}}$		3	
	Summe (Aufgabe 5)	11	17	5
	Mögliche BE		33	