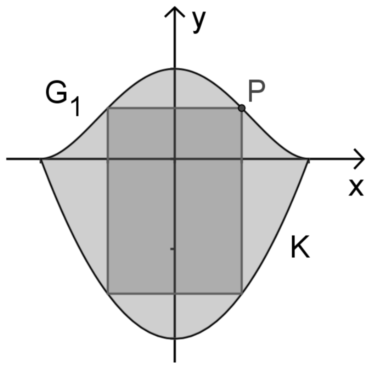
Aufgabe 2.1 CAS: Stadtwappen

Gegeben sind die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2$; $a \in IR, a \neq 0$ und die Funktion g mit $g(x) = 2x^2 - 2$. Die Graphen der Schar f_a sind G_a und der Graph der Funktion g ist K .

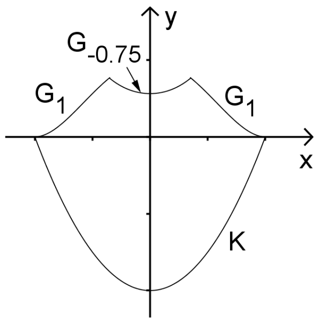
a) Weisen Sie nach, dass alle Graphen G_a achsensymmetrisch zur y-Achse verlaufen. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den beiden Koordinatenachsen.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a .
Für jeden Parameterwert a mit $a > 0$ sind die drei lokalen Extrempunkte Eckpunkte eines Dreiecks. Wenn der Parameterwert a verdoppelt wird, vervielfacht sich der Flächeninhalt des ursprünglichen Dreiecks A_Δ .
Das neue Dreieck hat den Flächeninhalt $A_{neu} = v \cdot A_\Delta$.
Ermitteln Sie den Faktor v .



c) Die Graphen G_1 und K schließen im Intervall $[-1;1]$ eine Fläche ein, die als Schablone für das Wappen einer Stadt genutzt werden soll.
Berechnen Sie den zugehörigen Flächeninhalt.

d) Der Punkt P liegt im I. Quadranten auf G_1 (siehe Abbildung). P ist Eckpunkt eines Rechtecks, dessen Seiten achsenparallel verlaufen und dessen weitere Eckpunkte auf den Begrenzungslinien des Wappens liegen. Innerhalb dieses Rechtecks soll das Wappentier abgebildet werden.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt eines solchen Rechtecks mit der Gleichung $A(x) = 2x^5 - 8x^3 + 6x$ berechnet werden kann. Ermitteln Sie den maximalen Flächeninhalt des Rechtecks. Auf den Nachweis des Maximums wird verzichtet.



e) Für eine andere Gestaltung des symmetrischen Stadtwappens wird vorgeschlagen, neben dem Graphen G_1 zusätzlich den Graphen $G_{-0,75}$ zur Modellierung des oberen Randes zu nutzen (siehe Abbildung).
Ermitteln Sie, um wie viel Prozent sich die ursprüngliche Fläche des Wappens dadurch verringern lässt.

f) Die untere Begrenzung des Stadtwappens soll statt durch die quadratische Parabel K mithilfe einer anderen quadratischen Parabel modelliert werden. Dabei sollen die Symmetrie des Wappens sowie die Schnittpunkte $S_1(-1|0)$ und $S_2(1|0)$ mit G_1 zwar erhalten bleiben, sich aber die Fläche des Wappens um 2 FE gegenüber des in c) beschriebenen Wappens vergrößern.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung der neuen Parabel.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	7	12	4	8	4	5	40

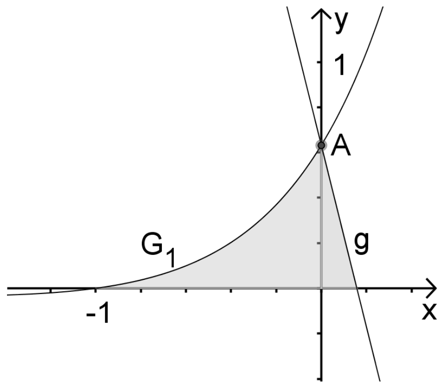
Aufgabe 2.2 CAS: Bremsschuh

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = -e^{x-a} + e^{2x}$; $a \in IR$.
Die Graphen der Schar f_a sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_a mit den beiden Koordinatenachsen in Abhängigkeit von a.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Weisen Sie nach, dass jeder Graph G_a im Punkt $E_a\left(-a - \ln 2 \mid f_a(-a - \ln 2)\right)$ eine zur x-Achse parallele Tangente besitzt.
Zeigen Sie, dass E_0 ein lokaler Extrempunkt von G_0 ist.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten sowie die Art des Extremums.

c) Genau ein Graph G_a hat einen Wendepunkt an der Stelle $x = -1$.
Berechnen Sie den Abstand dieses Wendepunktes zum Koordinatenursprung O.



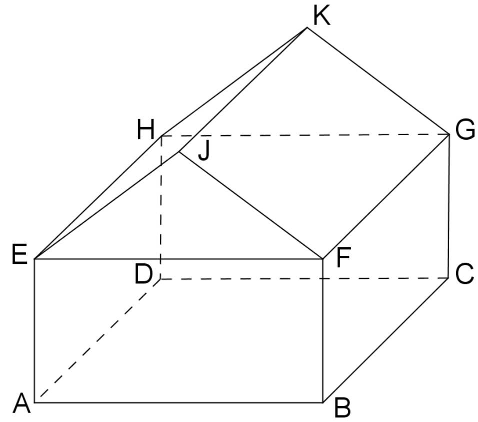
d) Der Graph G_1 und die Gerade g mit der Gleichung $y = -4x + 1 - \frac{1}{e}$ begrenzen gemeinsam mit der x-Achse eine Fläche, die dem Querschnitt eines Bremsschuhs entspricht, der das Wegrollen von Fahrzeugen verhindert ($1\,\text{LE} = 25\,\text{cm}$).
Die „Tiefe" des Bremsschuhs beträgt 20 cm.
Zeigen Sie, dass sich G_1 und g auf der y-Achse schneiden.
Berechnen Sie das Volumen eines solchen Bremsschuhs.

e) Ermitteln Sie die Größe des Winkels, den G_1 und g im Punkt $A\left(0 \,\middle|\, 1 - \frac{1}{e}\right)$ einschließen.

f) Der Produzent der Bremsschuhe möchte auf der Querschnittsfläche des Bremsschuhs sein rechteckiges Firmenlogo mit den Seitenlängen 5 cm und 15 cm so einstanzen lassen, dass die längere der beiden Seiten parallel zur x-Achse verläuft.
Untersuchen Sie, ob das möglich ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	5	8	5	12	5	5	40

Aufgabe 3.1 CAS: Haus



Die Abbildung zeigt ein Haus. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass sich die rechteckige Grundfläche des Hauses achsenparallel in der *x*-*y*-Ebene befindet. Gegeben sind die Koordinaten der Punkte $D(0\,|\,0\,|\,0)$, $F(10\,|\,8\,|\,4)$, $G(0\,|\,8\,|\,4)$ und $J(10\,|\,4\,|\,7)$. Es gilt: $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte *K* und *E* an.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene *E**, in der die Dachfläche *FGKJ* liegt, in Koordinatenform.
[Kontrollergebnis: $E^*: 3y + 4z = 40$]
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Dachfläche *FGKJ* gegenüber einer horizontalen Ebene.

b) Paralleles Licht fällt in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sqrt{39} \\ y \\ -5 \end{pmatrix}$ auf das Hausdach.

Bestimmen Sie einen möglichen Wert für *y* so, dass der Winkel zwischen der Richtung der Lichtstrahlen und der Dachfläche *FGKJ* 30° beträgt.

c) Ein Drittel der Dachfläche *FGKJ* wird mit Solarzellen bestückt.
Ermitteln Sie die Größe dieser Fläche.
Die Solarzellen können sowohl in der Dachfläche montiert werden als auch in Ebenen F_a, die parallel zur Dachfläche liegen. Dabei darf der Abstand der Ebenen F_a zur Dachfläche maximal 20 cm betragen.
Entwickeln Sie unter Verwendung des Parameters *a* eine Gleichung für die Ebenen F_a und geben Sie ein Intervall für die Einschränkung des Parameters *a* an.

d) Im Innern des Hauses ist auf dem Fußboden *EFGH* des Dachraumes im Punkt $P(1\,|\,5\,|\,4)$ ein 4 m langer, senkrecht stehender Mast für eine Satellitenantenne montiert. Dieser Mast ragt durch das Dach ins Freie.
Ermitteln Sie die Länge des Teiles dieses Mastes, der sich außerhalb des Hauses befindet sowie den Abstand der Mastspitze zur Ebene *E**.

e) Durch Teile der Geraden g_1 und g_2 mit den Gleichungen $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 5 \\ 6{,}25 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r \in I\!R$

und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5{,}5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$; $s \in I\!R$ können zwei Dachbalken modelliert werden, die in der Ebene *E** liegen. Begründen Sie, dass g_1 und g_2 parallel zueinander verlaufen und berechnen Sie den Abstand der beiden Dachbalken.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	3	7	6	5	30

Aufgabe 3.2 CAS: Sportfan

Gemäß einer „Studie zur Gesundheit Erwachsener in Deutschland“ zeigt sich in Deutschland ein Trend zu mehr sportlicher Aktivität.
Ein Viertel der Erwachsenen treibt regelmäßig mindestens zwei Stunden Sport pro Woche (Sportfans), wobei der Anteil der Sportfans unter den Männern mit 29,3 % etwas höher ist als unter den Frauen.
Alle anderen Bundesbürger werden hier als „keine Sportfans" bezeichnet.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A : Nur der zweite und sechste von zehn zufällig ausgewählten Bundesbürgern sind Sportfans.

B : Unter 20 zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgern befinden sich genau drei Sportfans.

C : Unter zehn zufällig ausgewählten Bundesbürgern befindet sich höchstens ein Sportfan.

D : Von 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern gehören mindestens 70 und weniger als 79 Personen zu denjenigen, die keine Sportfans sind.

E : Unter 850 zufällig ausgewählten männlichen Bundesbürgern befinden sich genau 609 Personen, die keine Sportfans sind.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bundesbürger, die mindestens befragt werden müssten, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,96 wenigstens einen zu entdecken, der Sportfan ist.

c) Unter allen Bundesbürgern liegt der Anteil der Männer bei 48,88 % (Zensus 2011). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Sportfan ein Mann ist.
Bestimmen Sie den Anteil der Sportfans unter den Frauen.

d) In einem Sportstudio trainieren 25 Bundesbürger, von denen genau acht zur Gruppe der Sportfans gehören. Es werden zufällig sieben Personen „ohne Zurücklegen“ ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F, dass sich unter den sieben ausgewählten Personen genau drei Sportfans befinden.

e) Eine Gruppe umfasst n zufällig ausgewählte Bundesbürger. Untersuchen Sie, für welche Gruppengröße n die Wahrscheinlichkeit, genau einen Sportfan in der Gruppe zu haben, am größten ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	12	3	8	3	4	30