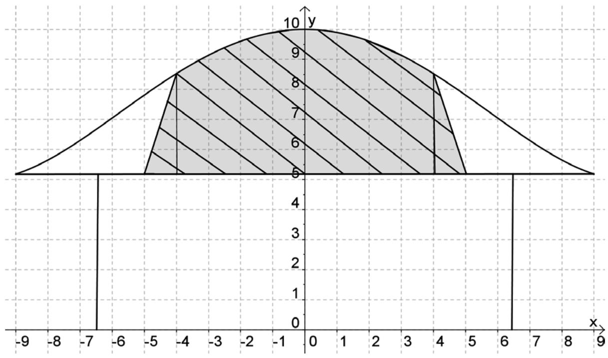
Aufgabe 1.1 CAS: Reithalle



Das Profil des Dachs einer Reithalle kann durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion $f(x) = \frac{1}{2000}x^4 - \frac{1}{10}x^2 + 10$ mit $-9 \le x \le 9$ (1 LE = 1 m) beschrieben werden (siehe Foto).

Dabei liegt die *x*-Achse in Höhe des Erdbodens, die *y*-Achse verläuft durch den höchsten Punkt des Dachprofils.

a) Zeigen Sie, dass das Dach symmetrisch ist.
Berechnen Sie die Höhe der seitlichen Dachenden auf 1 cm genau.

b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte des Graphen von *f*.
Begründen Sie, dass die Tiefpunkte des Graphen von *f* außerhalb des Bereichs liegen, der das Dachprofil beschreibt.
Untersuchen Sie *f* auf Nullstellen.

c) Die Vorderfront der Reithalle besitzt unter dem Dach eine Glasfläche, die in der Skizze schraffiert dargestellt ist. Nach unten ist sie in einer Höhe von 5,18 m durch eine Waagerechte (siehe Zeichnung) begrenzt. Der mittlere Teil ist 8 Meter breit, die beiden angrenzenden Dreiecke haben jeweils eine Breite von einem Meter.
Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

d) Auf der linken Seite der Reithalle soll das Dach geradlinig und ohne Knick um 5 m (das heißt in der Darstellung bis $x = -14$) nach links verlängert werden.
Untersuchen Sie, ob die Dachverlängerung an ihrem Ende die vorgeschriebene Mindesthöhe von 3,00 m unterschreitet.

e) An den steilsten Stellen des Daches sollen Schneefanggitter angebracht werden.
Berechnen Sie, in welcher Höhe diese Gitter befestigt werden müssen.
Hinweis: Auf die Untersuchung einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	13	8	10	4	40

Aufgabe 1.2 CAS: Zimmerpflanze

Lena bekommt eine Zimmerpflanze geschenkt. Sie beobachtet das Pflanzenwachstum in den ersten 8 Wochen und beschreibt es näherungsweise durch eine Funktion h_1 mit $h_1(t) = 0{,}05 \cdot e^{0{,}3t}$, wobei h_1 die Höhe der Pflanze in Metern und t die Zeit seit dem Beginn der Beobachtung in Wochen bedeuten.

a) Geben Sie die Höhe der Pflanze zu Beginn der Beobachtung und ihre Höhe 8 Wochen später an.
Berechnen Sie, wie hoch die Pflanze 13 Wochen nach Beginn der Beobachtung wäre.
Tatsächlich ist die Pflanze nach 13 Wochen jedoch nur 2,06 m hoch. Die Höhe wird deshalb für $t \geq 8$ durch eine Funktion h_2 mit $h_2(t) = a - b \cdot e^{-0{,}3t}$ beschrieben.
Bestimmen Sie a und b aus den beobachteten Höhen nach 8 und nach 13 Wochen.
[Zur Kontrolle: $a \approx 2{,}5$; $b \approx 21{,}4$]

b) Lenas Zimmer ist 2,70 m hoch.
Untersuchen Sie, ob die Pflanze nach 20 Wochen gemäß h_2 noch in das Zimmer passt und ob sie irgendwann einmal an die Zimmerdecke stößt.

c) Vervollständigen Sie die Wertetabelle auf der nächsten Seite mit den Werten zu h_2.
Ergänzen Sie die graphische Darstellung des Wachstum der Pflanze durch Einzeichnen des Graphen G_2 von h_2 für $8 \leq t \leq 20$ in der Anlage.
Untersuchen Sie die Funktion h_2 auf Nullstellen und begründen Sie, warum es nicht möglich ist, das gesamte Wachstum dieser Pflanze durch h_2 zu beschreiben.

d) Berechnen Sie $h_1'(8)$ und $h_2'(8)$. Vergleichen Sie die beiden Werte.
Entscheiden Sie begründet, ob die Modellierung zum Zeitpunkt $t = 8$ realistisch ist.

e) Um ein optimales Pflanzenwachstum zu garantieren, muss die Pflanze regelmäßig gedüngt werden. Die Maßzahl des Flächeninhalts unter dem aus den Graphen von h_1 und h_2 zusammengesetzten Funktionsgraphen entspricht der zu verabreichenden Düngemittelmenge in ml.
Berechnen Sie die vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Ende der 20. Beobachtungswoche notwendige Düngemittelgabe in ml.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	11	4	10	7	8	40

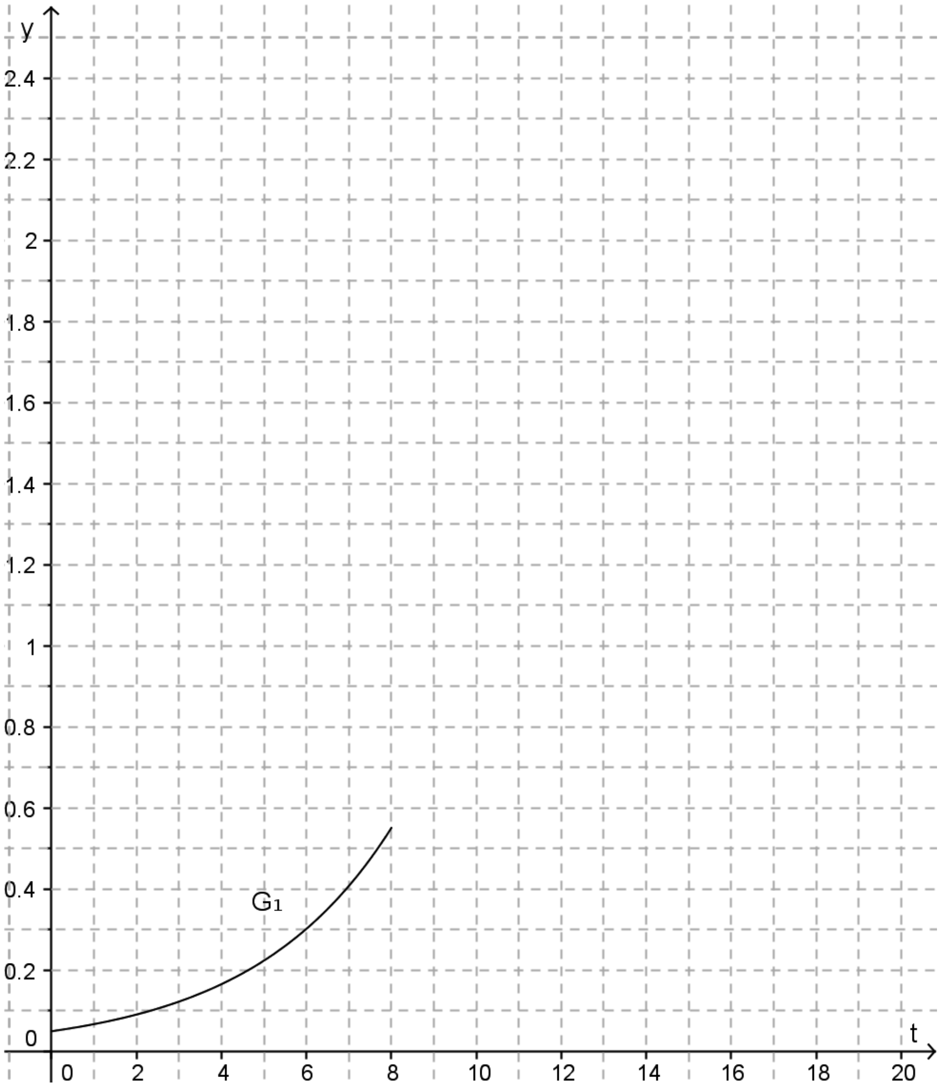
Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.2:

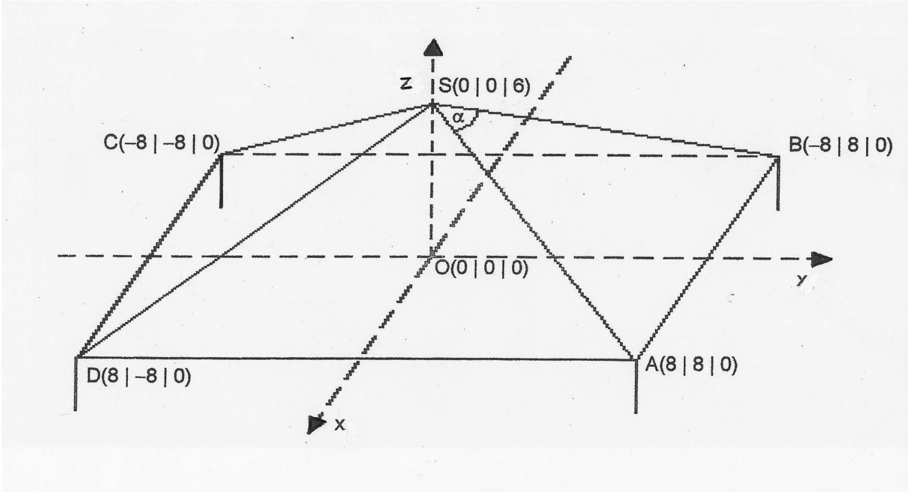
Wertetabelle für h_2:

Zeit *t* in Wochen	8	9	10	15	20
Höhe der Pflanze in m	0,55				

Koordinatensystem:



Aufgabe 2.1 CAS: Sandkasten



Ein Sandkasten, dessen obere Kanten das Quadrat $ABCD$ bilden, soll als Schutz vor Verschmutzung einen Holzdeckel in Form einer senkrechten Pyramide mit der Spitze S erhalten (siehe Skizze). $1\,\text{LE} = 1\,\text{dm}$.

a) Zuerst werden die vier Seitenflächen des Deckels zugesägt.
Berechnen Sie dazu die Länge der Pyramidenkante AS und den Winkel α zwischen den Kanten AS und BS.

b) Berechnen Sie, wie viel Quadratmeter Holz für den Bau des Deckels benötigt werden. Der entstehende Abfall sowie Verbindungselemente bleiben unberücksichtigt.

c) Der Sandkasten ist so gefüllt, dass die ebene Sandoberfläche genau die Fläche $ABCD$ ist. Ein großer Ball mit einem Radius r liegt genau in der Mitte auf der Sandfläche, bezogen auf die obige Skizze also genau auf dem Koordinatenursprung.
Geben Sie die Koordinaten des Ballmittelpunktes in Abhängigkeit von r an.
Der Ball soll beim Aufsetzen des Deckels weder verformt noch in den Sand gedrückt werden.
Berechnen Sie, wie groß der Ballradius maximal sein darf. Bestimmen Sie dafür zuerst für die Ebene, in der die Pyramidenseite ABS liegt, eine Gleichung in Normalenform.

d) Zum Anheben des Deckels wird auf den Seitenkanten AS und CS in gleicher Höhe je ein Haltegriff angebracht.
Erstellen Sie eine Gleichung der Geraden g_{AS}.
Der Befestigungspunkt H_1 des Griffs auf AS soll vom Befestigungspunkt H_2 des Griffs auf CS einen Abstand von 4 dm haben. Weisen Sie nach, dass H_1 und H_2 diesen Abstand haben, wenn sie sich in der Höhe $z = 6 - \frac{3\sqrt{2}}{4}$ befinden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	6	6	12	6	30

Aufgabe 2.2 CAS: Vogelflug

Ein Bussard kreist über einem Feld und erspäht eine Maus auf dem Boden (x-y-Ebene). Er fliegt von $A(30\,|\,-4\,|\,36)$ aus geradlinig in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf die Maus zu ($1\text{ LE} = 10\text{ m}$).

a) Geben Sie eine Geradengleichung für die Flugbahn des Bussards an.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes M , in dem sich die Maus befindet.
[Zur Kontrolle: $M(42\,|\,20\,|\,0)$]
Vom Punkt A aus erreicht der Bussard die Maus in 12 Sekunden.
Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Zur gleichen Zeit fliegt ein Schwarm Zugvögel in einer Ebene E , in der die Punkte $B(40\,|\,46\,|\,20)$, $C(36\,|\,26\,|\,22)$ und $D(44\,|\,42\,|\,20)$ liegen.
Ermitteln Sie für die Ebene E eine Gleichung in Koordinatenform.
[Zur Kontrolle: $x + y + 12z = 326$]
Der Bussard durchfliegt bei seinem Sturzflug die Flugebene der Vögel.
Berechnen Sie, in welchem Punkt S und unter welchem Winkel er die Ebene E durchfliegt.

c) Ein Flugzeug fliegt entlang der Geraden $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 24 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix};\ t \in IR$.
Weisen Sie nach, dass das Flugzeug nicht auf den Vogelschwarm aus b) treffen kann.
Berechnen Sie den Abstand, den die Flugbahn des Flugzeugs von der Flugebene E der Zugvögel hat.

d) Der Vogel an der Spitze des Vogelschwarms aus b) trifft im Punkt $P(70\,|\,-80\,|\,28)$ auf eine nach oben gerichtete Luftströmung und verändert daraufhin seine Flugbahn.
Ohne diese Änderung wäre er direkt in Richtung $Q(22\,|\,-56\,|\,30)$ geflogen. Durch die Richtungsänderung überfliegt er Q aber in einer Höhe von 400 m über dem Boden.
Berechnen Sie, für welchen Wert von z der Vektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ z \end{pmatrix}$ die neue Richtung der Flugbahn angibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	9	10	7	4	30

Aufgabe 3.1 CAS: Sommerfest

Jana geht am Wochenende mit ihrer Schwester auf ein Sommerfest. An einer Losbude kann man Lose aus einer Trommel ziehen. Zehn Prozent der Lose sind Gewinnlose, die restlichen sind Nieten, mit denen nichts gewonnen wird.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: Beim Ziehen von 20 Losen ist kein Preis dabei.
B: Unter 20 gezogenen Losen sind weniger als fünf Lose, die einen Preis gewinnen.
C: Es werden zuerst drei Nieten gezogen, unter den 17 danach gezogenen Losen sind genau zwei Gewinnlose.

b) Der Losverkäufer verspricht, dass unter 30 Losen mit 99 %iger Sicherheit mindestens ein Gewinnlos ist.
- Zeigen Sie, dass die versprochene Gewinnwahrscheinlichkeit zu hoch ist.
- Berechnen Sie, wie viele Lose tatsächlich gekauft werden müssen, um mit mindestens 99 %iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein Gewinnlos zu erhalten.

c) Jana kauft zehn Lose. Sie hat zwei Gewinnlose und acht Nieten. Zwei Lose schenkt sie ihrer Schwester ohne zu prüfen, ob es sich dabei um Gewinnlose oder Nieten handelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Jana dann noch genau ein Gewinnlos hat.

d) Jana hat zwei Plüschtiere gewonnen. Es gibt Bären, Hasen und Affen. Unter den drei Tierarten wählt sie zwei verschiedene aus. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die Jana für diese Auswahl hat.

Jana kann sich nicht entscheiden. Deshalb wählt sie mit geschlossenen Augen aus einem Korb mit 8 Bären, 7 Hasen und 5 Affen zwei der 20 Plüschtiere aus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sie zwei verschiedene Tierarten gewählt hat.

e) Jana kauft weitere 20 Lose. Unter diesen neu gekauften Losen befinden sich m Gewinnlose. Sie öffnet wahllos zwei Lose.
Betrachtet wird das Ereignis E: „Unter den geöffneten Losen ist genau ein Gewinnlos.“
Bestimmen Sie mögliche Anzahlen m, so dass für die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ gilt: $P(E) \approx 0{,}19$.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	9	7	4	6	4	30

Aufgabe 3.2 CAS: App

Apps (Anwendungsprogramme für Mobilgeräte) werden für unterschiedliche Zwecke genutzt. Durch eine Umfrage wurde ermittelt, welcher Anteil der Befragten Apps für bestimmte Zwecke nutzt. Mehrfachnennungen waren möglich. Die Tabelle zeigt auszugsweise die Ergebnisse der Umfrage. Zum Beispiel nutzen 19 % der Befragten Spiele-Apps.

Zweck	mobile Suche	Terminorganisation	Spiele	Zeitung	Navigation
Anteil	28 %	20 %	19 %	16 %	14 %

(Quelle: Statista-Datenbank)

a) Man trifft zwei der Befragten.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: Beide nutzen Apps zur mobilen Suche.
B: Der erste der beiden nutzt Apps zur Terminorganisation, der zweite nutzt Apps zur Navigation.

b) Unter den Befragten werden 15 Personen zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
C: Keiner der Ausgewählten nutzt Apps zur Navigation.
D: Mindestens vier der Befragten nutzen Apps zur Navigation.
E: Die ersten beiden Befragten nutzen keine Apps zur Navigation, aber genau drei von den anderen 13 Befragten nutzen Apps zur Navigation.

c) In einem Bus sitzen 15 Personen, von denen genau 10 Apps nutzen. An einer Haltestelle steigen 5 Personen aus.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der noch genau sechs Personen im Bus sitzen, die Apps nutzen.

Tanja kann mit einer App per Zufall entscheiden lassen, in welcher Reihenfolge sie alle ihre sechs Freundinnen anruft. Sie trägt die Namen in die App-Liste ein, schüttelt das Handy und schon stehen die sechs Namen in zufälliger Reihenfolge in der Liste. Eine der sechs Freundinnen heißt Nicole.

d) Nach dem Schütteln ist Nicole unter den ersten beiden Namen der Liste.
Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür $p = \frac{1}{3}$ ist.
Nachdem Tanja zehnmal auf diese Art alle sechs Freundinnen angerufen hat, stellt sie fest, dass Nicole viermal unter den ersten beiden Angerufenen war.
Untersuchen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit dieser Fall eintritt.

e) Mit der Zufalls-App wird 20-mal die Reihenfolge der sechs Telefonate bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit, mit der Nicole mehr als k-mal zuerst angerufen wird, soll über 80 % liegen. Untersuchen Sie, für welche k dies möglich ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	5	10	6	5	4	30