Aufgabe 1.1: Rodelbahn

Der Hang einer Rodelbahn ist im Laufe der Jahre stark abgefahren worden und soll durch eine Aufschüttung wieder in seinen ursprünglichen Zustand versetzt werden. Die Profillinie des geplanten Hangs soll mit dem Graphen G_f der Funktion $f(x) = 4x \cdot e^{-0{,}2x}$, $x \in IR$, modelliert werden. In der Anlage ist der zu erneuernde, alte Hang dargestellt, der an ein 5 m langes Plateau angrenzt. Sein Profil wird mit dem Graphen G_g von $g(x) = 20 \cdot e^{-0{,}2x}$, $x \in IR$, modelliert ($1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$).

a) Berechnen Sie die Nullstelle von f und geben Sie an, wie sich der Graph G_f für $x \to \infty$ verhält. Zeigen Sie, dass die Funktionen f und g bei $x = 5$ den gleichen Funktionswert haben.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des relativen Extrempunktes von G_f und seine Art. Der Graph G_f hat nur einen Wendepunkt W. Berechnen Sie seine Koordinaten.

Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f''(x) = \left(\frac{4}{25}x - \frac{8}{5}\right) \cdot e^{-0{,}2x}$.

[Zur Kontrolle: $H\left(5 \,|\, \frac{20}{e}\right)$]

c) Zeichnen Sie den Graphen von f mit Hilfe Ihrer bisherigen Ergebnisse für $-2 \le x \le 30$ in das Koordinatensystem (Anlage) ein.

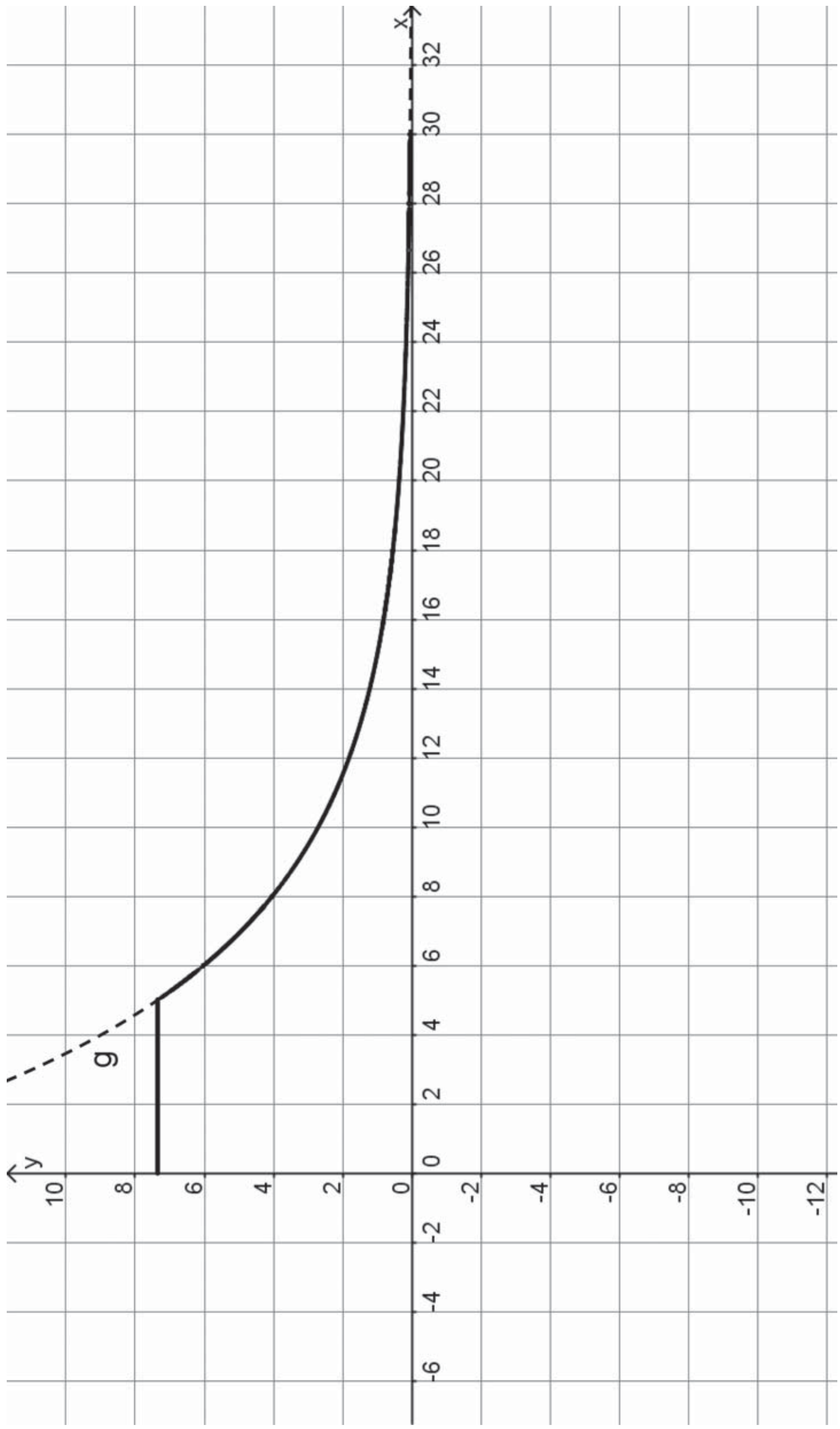
d) Weisen Sie nach, dass F mit $F(x) = (-20x - 100) \cdot e^{-0{,}2x}$ eine Stammfunktion von f ist. Die Graphen von f und von g und die Gerade zu $x = 30$ schließen eine Fläche ein. Schraffieren Sie die eingeschlossene Fläche in der Anlage. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. Beziehen Sie die berechnete Fläche auf die zu erneuernde Rodelbahn und berechnen Sie, wie viel Kubikmeter Erde für die Aufschüttung des Hangs benötigt werden, wenn die Rodelbahn 12 m breit sein soll.

e) In mindestens einem Punkt $P\left(x_P \,\middle|\, f(x_P)\right)$ der neuen Rodelbahn ist der Anstieg nur noch $-0{,}2$. Ermitteln Sie ein mögliches Intervall der Länge 1 m, welches eine solche Stelle x_P enthalten muss.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	13	5	12	4	40

Anlage

Anlage zu Aufgabe 1.1: Rodelbahn

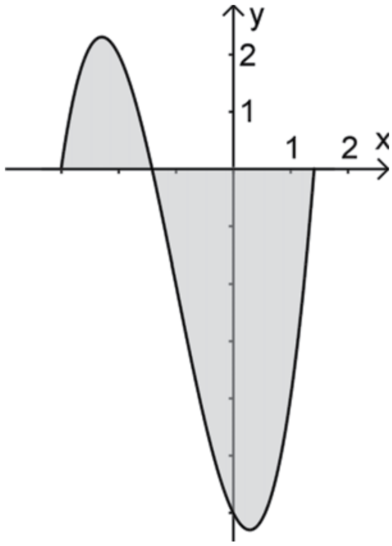


Aufgabe 1.2: Kanal mit Uferböschung

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x+3)\cdot(x^2-2)$; $x \in IR$.
Der Graph dieser Funktion ist G .

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G mit den Koordinatenachsen und weisen Sie nach, dass G weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Der Graph der Funktion f beschreibt modellhaft das Profil eines Kanals $\left(-\sqrt{2} \le x \le +\sqrt{2}\right)$ sowie die links angrenzende Uferböschung mit Erhebung, $1\ \text{LE} = 1\ \text{m}$.
Die x-Achse befindet sich auf der Höhe der Kanalwasseroberfläche (siehe Skizze).
Berechnen Sie die größte Tiefe des Kanals und die maximale Höhe der linken Uferböschung relativ zur Wasseroberfläche.
[Zur Kontrolle: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$]

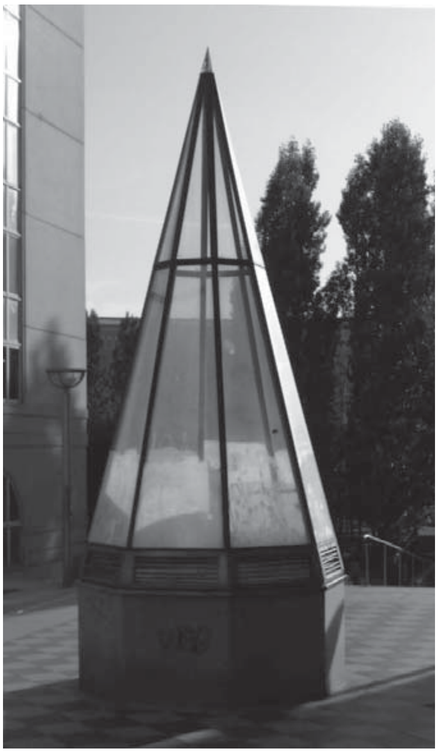


c) Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Kanals.

d) Der Graph von G besitzt genau einen Wendepunkt $W\left(-1 \mid -2\right)$.
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung für die Wendetangente an G .
[Zur Kontrolle: t_W : $y = -5x - 7$]
Durch Parallelverschiebung der Wendetangente in y-Richtung erhält man eine Gerade h , die im ersten Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Flächeninhalt $2{,}5$ FE einschließt.
Ermitteln Sie eine Gleichung für h .

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	10	14	6	10	40

Aufgabe 2.1: Stockholmer Pyramide

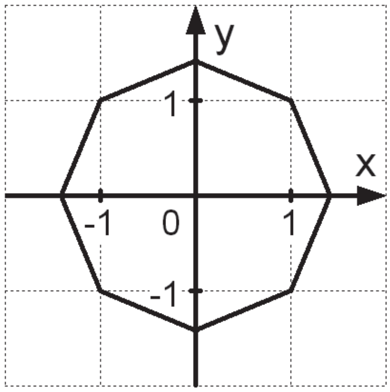


Auf dem Foto sehen Sie eine verglaste gerade Pyramide auf der Felseninsel Södermalm in Stockholm. Durch die achteckige Pyramide gelangt Tageslicht in unterirdische Verkehrsbereiche.

Der Steinsockel unter der Pyramide bildet im Fußboden ein regelmäßiges Achteck (siehe Grafik unter dem Foto) mit dem Mittelpunkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$.

Der Punkt $P_1(1\,|\,-1\,|\,0)$ ist einer der unteren Eckpunkte des $1\,\text{m}$ hohen Sockels. $Q_1(1\,|\,-1\,|\,1)$ ist der zugehörige darüber liegende obere Eckpunkt und gleichzeitig ein Eckpunkt der Pyramide.

Die Spitze der Pyramide befindet sich im Punkt $S(0\,|\,0\,|\,6)$. Es gilt: $1\text{ LE} = 1\text{ m}$.



a) Begründen Sie, dass $P_2(\sqrt{2}\,|\,0\,|\,0)$ ein weiterer unterer Eckpunkt des Steinsockels ist und geben Sie die Koordinaten des zugehörigen oberen Eckpunktes Q_2 an.

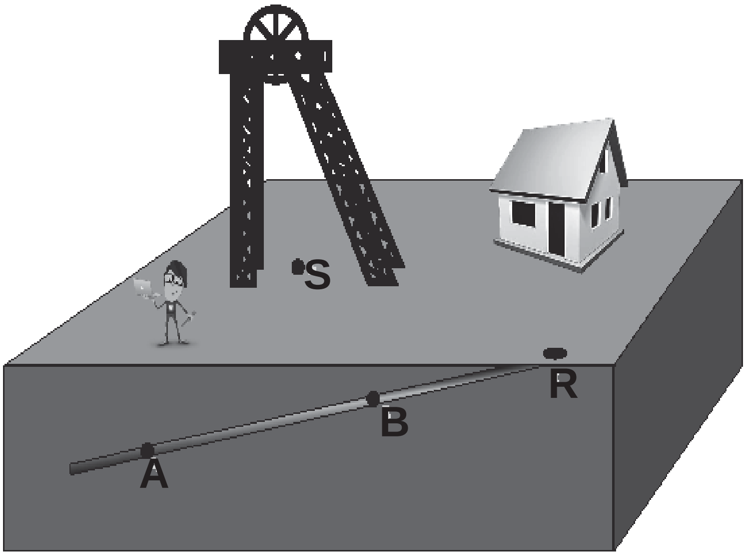
b) Geben Sie eine Geradengleichung für SQ_1 an.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den zwei benachbarte Seitenkanten an der Spitze der Pyramide einschließen.
Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche der Pyramide.

c) Die einfallenden parallelen Sonnenstrahlen haben die Richtung $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie den Winkel, den die Sonnenstrahlen und die Fußbodenfläche (x-y-Ebene) bilden.
Das Sonnenlicht erzeugt von der Spitze S der Pyramide den Schattenpunkt S^* auf der Fußbodenfläche.
Bestimmen Sie den Abstand dieser beiden Punkte.

d) In der Glaspyramide wird eine Beleuchtung geplant: Eine Lampe soll unterhalb der Spitze $S(0\,|\,0\,|\,6)$ aufgehängt werden. Die Lampe soll von der Spitze doppelt so weit entfernt sein wie von den oberen Eckpunkten des Steinsockels.
Ermitteln Sie die Koordinaten $L(x\,|\,y\,|\,z)$ der (punktförmigen) Lichtquelle.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	4	12	10	4	30

Aufgabe 2.2: Bergwerk



In einem Bergwerk befindet sich ein Tunnel, der geradlinig durch die Punkte $A(73\,|\,-16\,|\,-24)$ und $B(7\,|\,17\,|\,-2)$ zum Ausgang R verläuft. Vom Punkt $S(45\,|\,10\,|\,0)$ werden geradlinig Stollen gegraben, die auf den Tunnel treffen.

Die Erdoberfläche befindet sich in der *x*-*y*-Ebene, $1\,\text{LE} = 10\,\text{m}$.

a) Bestimmen Sie die Richtung, in die von *S* aus gegraben werden muss, damit ein Stollen den Punkt *A* trifft. Berechnen Sie die Länge des Stollens und die Größe des Winkels, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *R*, an dem der Tunnel an der Erdoberfläche beginnt.

b) Ein zweiter Stollen verläuft vom Punkt *S* in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes *P*, in dem dieser Stollen auf den Tunnel trifft.

c) Vom Punkt *S* aus soll der kürzeste Stollen gegraben werden, der zum Tunnel führt. Bestimmen Sie die Richtung, in welche gegraben werden muss, und den Punkt *K*, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft.

d) In 140 m Entfernung vom Punkt *B* auf der Stecke $\overline{AB}$ soll ein zur Erdoberfläche senkrechter Notausstieg enden.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem die Bohrung an der Erdoberfläche beginnen muss.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	12	6	8	4	30

Aufgabe 3.1: Schulabschlüsse

Schulabgänger im Sommer 2009 in Berlin:

Gesamtzahl	mit allgemeiner Hochschulreife	mit mittlerem Schulabschluss *)	Hauptschul-abschlüsse	ohne Schulab-schluss
24 600	11 600	6 400	4 500	2 100

*) dies entspricht in Brandenburg der Fachoberschulreife

Unter den insgesamt 24 600 Schulabsolventen des Jahres 2009 waren 3600 nicht-deutscher Herkunft, von denen 700 die allgemeine Hochschulreife erlangten.
(Quelle: Zeitschrift für amtliche Statistik Berlin Brandenburg 2/2011; die Werte sind gerundet.)

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A_1: Von zwei zufällig befragten Schulabgängern hat einer die allgemeine Hochschulreife erlangt und der andere den mittleren Schulabschluss.

A_2: Unter 5 befragten Schulabgängern hat nur der erste und vierte die allgemeine Hochschulreife erlangt.

b) Zehn der 24 600 Schulabgänger werden zufällig befragt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

B_1: Genau fünf der 10 befragten Schulabgänger haben die allgemeine Hochschulreife erlangt.

B_2: Unter den 10 befragten Schulabgängern befindet sich höchstens einer ohne Schulabschluss.

c) Ein Schulabgänger wird zufällig ausgewählt. Im Gespräch erfährt man, dass er deutscher Herkunft ist. Ermitteln Sie unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er die allgemeine Hochschulreife erlangt hat.

d) Unter einer Gruppe von 10 Schulabgängern befinden sich vier, die aus Berlin-Pankow kommen. Drei der 10 Schulabgänger werden zufällig (ohne Zurücklegen) ausgewählt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden Ereignisse:

D_1: Alle drei ausgewählten Personen kommen aus Berlin-Pankow oder keine der ausgewählten Personen kommt aus Berlin-Pankow.

D_2: Zwei der drei ausgewählten Personen kommen aus Berlin-Pankow.

e) Man befragt nacheinander fünf der insgesamt 24 600 Schulabgänger nach ihrem Schulabschluss. Es stellt sich heraus, dass keiner von ihnen die allgemeine Hochschulreife erlangt hat.
Bestimmen Sie auf diesem Stand der Informationen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau vier von ihnen den mittleren Schulabschluss erreichten.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	6	10	4	6	4	30

Aufgabe 3.2: Fußball

Bei einem Fußballturnier haben die Mannschaften von Altenberg (A) und Burghausen (B) das Finale erreicht.

a) Für die Startelf wählt der Trainer der Mannschaft A einen von drei Torhütern und 10 von 15 Feldspielern aus.
Berechnen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, die der Trainer hat, die Mannschaft zusammenzustellen.

b) Erfahrungsgemäß wird jeder der 11 Spieler (Torwart sowie 10 Feldspieler) mit einer Wahrscheinlichkeit von 6 % ausgewechselt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

C: Es wird kein Spieler ausgewechselt.

D: Es wird genau ein Spieler ausgewechselt.

E: Es werden zwei oder drei Spieler ausgewechselt.

Da das Spiel auch nach der Verlängerung noch unentschieden steht, müssen beide Mannschaften ins Elfmeterschießen. Dafür wird angenommen, dass jeder Spieler von Mannschaft A eine Trefferquote von 80 % und jeder Spieler von Mannschaft B eine Trefferquote von 75 % hat.

c) Ermitteln Sie, wie viele Elfmeter Mannschaft A mindestens schießen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einen Treffer zu erzielen.

d) Beide Mannschaften schießen jeweils fünfmal.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Elfmeterschießen 4:4 endet.

Danach treten die Schützen jeder Mannschaft paarweise an. Ein Spieler jeder Mannschaft schießt einen Elfmeter. Wenn eine Mannschaft dabei in Führung geht, hat sie das Finale gewonnen, ansonsten ist das nächste Paar dran.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bereits nach dem ersten Paar Mannschaft B das Finale gewonnen hat oder noch keine Entscheidung gefallen ist.

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach drei angetretenen Paaren noch keine Entscheidung gefallen ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile							
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	3	8	5	5	5	4	30