Aufgabe 1.1: Sonnenblumen

Gegeben ist die Funktion h mit $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 21t + 10;\ t \in I\!R$. Sie beschreibt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ für einen gewissen Zeitraum die Höhe einer Sonnenblume, wobei t in Wochen nach Beobachtungsbeginn und $h(t)$ in cm angegeben werden.

a) Berechnen Sie die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von h und bestimmen Sie deren Art. Skizzieren Sie den Graphen von h mindestens für $-6 \le t \le 9$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Erläutern Sie, in welchem Intervall von t der Graph von h sinnvolle Werte für das Wachstum der Sonnenblume liefert.

b) Geben Sie die Höhe der Sonnenblume zu Beginn des Beobachtungszeitpunktes in Zentimetern an. Ermitteln Sie die durchschnittliche Wachstumsrate im Zeitraum von $t = 1$ bis $t = 6$ sowie die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 6$.

c) Ermitteln Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt eine momentane Wachstumsrate von $15\,\frac{\text{cm}}{\text{Woche}}$ erreicht ist.

d) Ein Verkäufer wirbt mit dem Versprechen: „Meine Pflanzen erreichen eine Wachstumsrate von 27 cm pro Woche. Da können Sie beim Wachsen zusehen!“. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die versprochene Wachstumsrate erreicht werden kann, indem Sie die größte erreichte momentane Wachstumsrate der Pflanze ermitteln.

e) Von einer zweiten Sonnenblumenart ist nur die Funktion v der momentanen Wachstumsrate bekannt. Ihre Gleichung lautet $v(t) = -2t^2 + 3t + 52$, wobei t in Wochen und $v(t)$ in $\frac{\text{cm}}{\text{Woche}}$ angegeben werden. Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist eine Sonnenblume dieser Art 120 cm hoch.
Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Funktion g, die die Höhe dieser Sonnenblume in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt (mit t in Wochen und $g(t)$ in cm).

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	18	7	4	4	7	40

Aufgabe 1.2 : Vereinsemblem

Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Gleichungen $f(x) = -x \cdot e^{-x}$; $x \in IR$

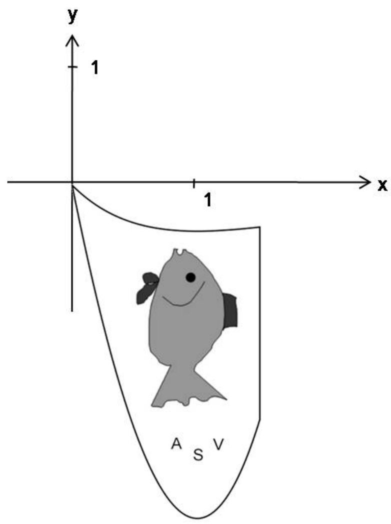
und $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x$; $x \in IR$.

a) Ermitteln Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte des Graphen von g und zeigen Sie, dass einer dieser Punkte auch zum Graphen von f gehört.
Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Tangenten an die beiden Graphen im Punkt $O(0 \mid 0)$ einschließen.

[Kontrollergebnis: $f'(x) = e^{-x}(x-1)$]

b) Zeigen Sie, dass die beiden lokalen Tiefpunkte der Graphen von f und g auf einer gemeinsamen Parallelen zur y-Achse liegen und geben Sie die Koordinaten dieser Tiefpunkte an.
Hinweis: Auf den Nachweis des Minimums mithilfe eines hinreichenden Kriteriums kann verzichtet werden.

c) Jeder der Graphen von f und g besitzt genau einen Wendepunkt. Diese Wendepunkte sind diagonal gegenüberliegende Eckpunkte eines Rechtecks, das symmetrisch bezüglich der y-Achse liegt. Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und ermitteln Sie die Koordinaten aller Eckpunkte des Rechtecks.



d) Die Fläche, die von den beiden Graphen und der Geraden $x = 1{,}5$ im IV. Quadranten eingeschlossen wird, soll als Vorlage für das Vereinsemblem eines Angelvereines dienen.
Weisen Sie nach, dass die Funktion
F : $F(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
Berechnen Sie die Größe der Fläche, die für das Emblem vorgesehen ist.

e) Ein Angelsportfreund schlägt vor, die obere Begrenzung des Emblems in Form einer quadratischen Parabel zu gestalten. Diese Parabel soll den gleichen Tiefpunkt und den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse haben wie der Graph von f.
Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	13	8	10	5	4	40

Aufgabe 2.1: Flug in die Wolken

Ein Flugzeug befindet sich um 04.13 Uhr in der Position $P(2\,|\,1\,|\,1{,}5)$ in einer Höhe von 1,5 km und eine Minute später im Punkt $Q(14\,|\,7\,|\,1{,}8)$ in einer Höhe von 1,8 km (1 LE = 1 km).
Das Flugzeug bewegt sich geradlinig von P nach Q und ändert seine Geschwindigkeit nicht.

a) Geben Sie den Betrag des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ an. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Geben Sie eine Geradengleichung für die Flugbahn g an, auf der das Flugzeug fliegt.

b) Im Punkt $W(38\,|\,19\,|\,2{,}4)$ befindet sich um 04.15 Uhr ein senkrecht aufsteigender Wetterballon. Prüfen Sie, ob der Punkt W auf der Flugbahn des Flugzeugs liegt. Entscheiden Sie begründend, ob das Flugzeug mit dem Wetterballon zusammenstößt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes R, in dem das Flugzeug seine Reiseflughöhe von 10,5 km erreicht.

c) In der Ebene durch die Punkte $A(10\,|\,20\,|\,3{,}465)$, $B(0\,|\,0\,|\,3{,}465)$ und $C(0\,|\,20\,|\,3{,}565)$ verläuft die untere Grenzschicht einer Wolkendecke.

Bestätigen Sie, dass durch $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 200 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor für E_{ABC} gegeben ist.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes, in dem das Flugzeug in die Wolkendecke eintritt.

d) Die Sichtweite in der Wolkendecke beträgt 1,342 km. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes T auf der vorausliegenden Flugbahn des Flugzeugs, der bei Eintritt in die Wolkendecke gerade noch gesehen werden kann. Berechnen Sie, wie viele Meter über der unteren Grenzschicht der Wolkendecke sich das Flugzeug im Punkt T befindet.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	8	8	10	4	30

Aufgabe 2.2: Rhombus

In einem kartesischen Koordinatensystem ist die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad ; \ r, s \in IR \text{ gegeben.}$$

a) Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E an und bestimmen Sie die Koordinaten ihrer Achsenschnittpunkte.

b) Ermitteln Sie die Lagebeziehung der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in IR$ zu der Ebene E.

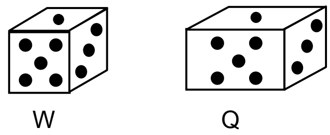
Ermitteln Sie die Lagebeziehung der Ebene $F: x + y - 0{,}5z = 4$ zur Ebene E. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen E und F.

c) Die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0)$, $B(0\,|\,4\,|\,0)$ und $C(0\,|\,0\,|\,8)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. Zeigen Sie, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt und berechnen Sie die Größe des Winkels ACB. Ermitteln Sie die Koordinaten eines Punktes Q, der das Dreieck zu einem Rhombus (Raute) ergänzt.

d) In den Rhombus soll ein möglichst großer Kreis einbeschrieben werden. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes an. Ermitteln Sie den Radius des Kreises.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile					
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	6	9	9	6	30

Aufgabe 3.1: Zwei Zufallsgeräte



Die beiden Zufallsgeräte Würfel (W) und Quader (Q) tragen nur die Augenzahlen 1, 3 und 5; dabei zeigen gegenüberliegende Seiten die gleichen Augenzahlen.
W ist ein Laplace-Würfel. Q ist ein Quader mit zwei quadratischen Seitenflächen (diese zeigen die Augenzahl 3), die anderen vier Seitenflächen sind nicht quadratisch. Die durch sehr häufiges Werfen dieses Quaders ermittelten relativen Häufigkeiten können als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden:

Augenzahl	1	3	5
relative Häufigkeit bei Q	41 %	18 %	41 %

a) Die beiden Zufallsgeräte werden je einmal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A_1: Die Augenzahl bei W ist nicht 5.

A_2: Die Augenzahl bei Q ist nicht 5.

A_3: Die Summe der Augenzahlen von W und Q hat genau den Wert 6.

b) Das Zufallsgerät Q wird 10-mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

B_1: Die Augenzahl 3 tritt genau dreimal auf.

B_2: Die Augenzahl 3 tritt mindestens dreimal auf.

c) Olga und Max vereinbaren folgendes Spiel:
Olga wirft den Würfel W zehnmal. Sie gewinnt, wenn sie genau dreimal die Augenzahl 3 erzielt. Falls dies nicht der Fall ist, wirft Max den Quader Q zehnmal. Er gewinnt nur dann, wenn er dabei genau einmal die Augenzahl 3 erzielt hat. Sonst endet das Spiel unentschieden.
Ermitteln Sie, wer die besseren Gewinnchancen hat.

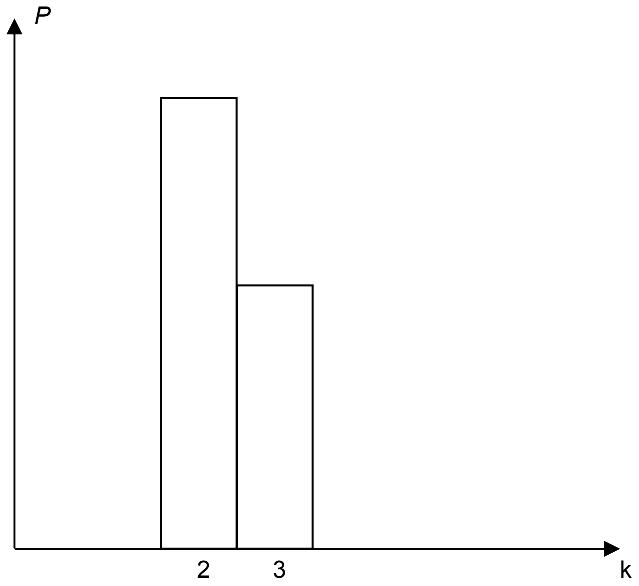
[Kontrollergebnis: P(„Olga gewinnt“) $\approx$ 26 %]

d) Die Wahrscheinlichkeit P für das k-malige Auftreten der Augenzahl 3 bei 10 Würfen ist für eines der beiden Zufallsgeräte teilweise graphisch dargestellt (s. Anlage).
Entscheiden Sie begründet, zu welchem Zufallsgerät die Darstellung passt.
Bestimmen Sie den in der Zeichnung verwendeten Maßstab.
Ergänzen Sie die Achseneinteilung der P-Achse und vervollständigen Sie das Diagramm für k = 1 und k = 4.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben					
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	Summe
BE	7	8	7	8	30

Anlage

Anlage zu Aufgabe 3.1: Zwei Zufallsgeräte



Aufgabe 3.2: Kurswahl

Im Abiturjahrgang 2010 belegten im Land Brandenburg die Schülerinnen und Schüler jeweils zwei Leistungskurse: Deutsch belegten 52 %, Englisch 36 % und Mathematik 35 %.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse.

A: Ein zufällig befragter Schüler belegt den Leistungskurs Englisch und den Leistungskurs Mathematik.

B: Von fünf nacheinander befragten Schülern belegen nur der zweite und der fünfte Schüler einen Leistungskurs Mathematik.

C: Unter zehn befragten Schülern befinden sich höchstens acht Schüler, die einen Leistungskurs Deutsch belegen.

b) Es werden 35 Schüler befragt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 15 und höchstens 17 Schüler einen Leistungskurs Mathematik belegen.

c) Ermitteln Sie, wie viele Schüler mindestens befragt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einen Schüler zu finden, der einen Leistungskurs Mathematik belegt.

d) Bestimmen Sie den Anteil der Schüler, die einen Leistungskurs Physik belegen, wenn folgendes bekannt ist: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zwei befragten Schülern keiner einen Leistungskurs Physik belegt, beträgt 90,25 %.

e) An einem Gymnasium sind 36 der 75 Schüler des Abiturjahrgangs männlich.
25 Schüler und Schülerinnen belegen den Leistungskurs Mathematik.
Die Anzahl der Jungen, die nicht den Leistungskurs Mathematik belegen, ist doppelt so groß wie die Anzahl der Mädchen, die den Leistungskurs Mathematik belegen.
Ermitteln Sie die Anzahl der Jungen und Mädchen des Leistungskurses Mathematik.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgabenteile						
Aufgabenteil	a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	10	5	6	5	4	30