Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenvariationen und Ergänzungen für das grundlegende Anforderungsniveau

1.1 Analysis

A_gA1 (zur Musteraufgabe A1_2)

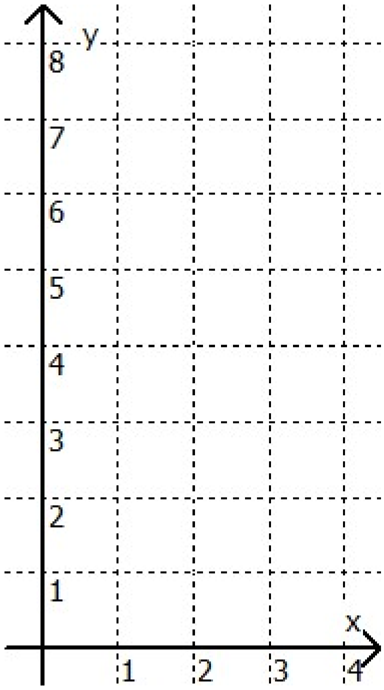
Das Rechteck ABCD mit $A(1|0)$, $B(2|0)$, $C(2|8)$ und $D(1|8)$ wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, in zwei Teilflächen zerlegt.

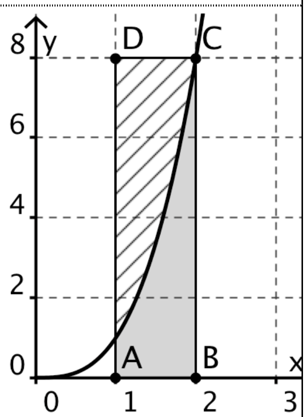
1.1 Skizzieren Sie die beiden Teilflächen in nebenstehendem Koordinatensystem.

2 BE

1.2 Ermitteln Sie den Flächeninhalt der oberen Teilfläche.

3 BE



<table>
<tr><th></th><th>Erwartete Schülerleistungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A_gA1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>1.1</td><td>Skizze des Rechtecks und des Funktionsgraphen

</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1.2</td><td>Berechnung des Flächeninhaltes unterhalb des Graphen von f:
$\int_1^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot x^4\right]_1^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$
Berechnung des Flächeninhaltes oberhalb des Graphen von f:
$1\cdot 8 - \frac{15}{4} = \frac{17}{4}$</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.</td></tr>
</table>

A_gA2 (zur Beispielaufgabe A_eA1)

1.1 Berechnen Sie $\int_0^2 x^3\,dx$.

2 BE

1.2 Begründen Sie die Gültigkeit folgender Aussage:

Wenn der Graph einer Funktion f mit $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, dann gilt: $\int_{-1}^{1} x^n\,dx = 0$.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A_gA2		
1.1	$\int_0^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}\cdot x^4\right]_0^2 = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{4}\cdot(0)^4 = 4$	2
1.2	Der Graph von f ist punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, wenn n ungerade ist. Dann schließt der Graph von f mit der x-Achse und den Geraden zu $x=1$ und $x=-1$ im ersten und dritten Quadranten jeweils ein Flächenstück ein. Diese beiden sind wegen der Punktsymmetrie inhaltsgleich, gehen jedoch in die Berechnung des Integrals mit unterschiedlichen Vorzeichen ein.	3

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.

A_gA3 (zur Musteraufgabe A2_1)

Ein Wassertank ist zunächst leer.

Der nebenstehende Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate $\left(\text{in } \frac{\text{m}^3}{\text{h}}\right)$ über einen Zeitraum von 5 Stunden wieder.

1.1 Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.

2 BE

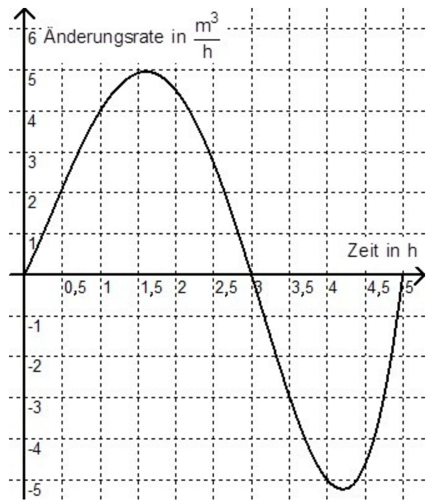


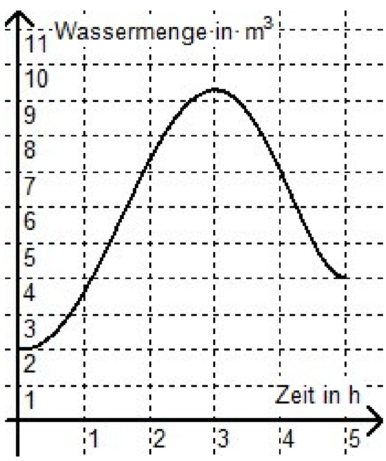
Abbildung 1

1.2 Im Folgenden sind drei Graphen dargestellt, die die Wassermenge im Tank (in m^3) in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreiben.

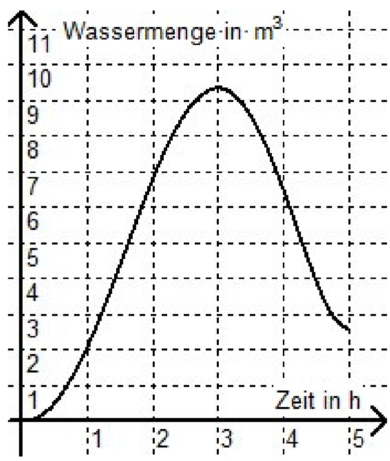
Geben Sie an, welcher dieser Graphen näherungsweise zu dem obigen Graph der Zufluss- bzw. Abflussrate gehören kann.

Begründen Sie Ihre Auswahl.

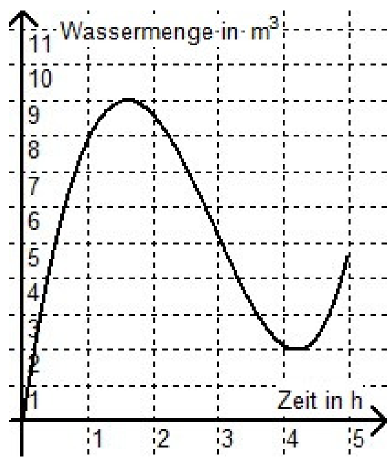
3 BE



Graph I



Graph II



Graph III

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A_gA3		
1.1	Anhand der Quadrate zwischen dem Graphen und der Zeitachse im Bereich der ersten drei Stunden erhält man einen Schätzwert für die Flüssigkeitsmenge. Da jedes Quadrat einem Zufluss von $0{,}5\ \mathrm{m}^3$ entspricht, ergeben sich Schätzwerte zwischen $7\ \mathrm{m}^3$ und $10\ \mathrm{m}^3$.	2
1.2	Graph II ist der mögliche Graph. Begründung z. B.: Nur Graph II berücksichtigt, dass der Tank zu Beginn leer ist und nach 3 Stunden ein Maximalinhalt erreicht wird, wie es durch die Textvorgabe und den Graphen der Änderungsrate vorgegeben ist.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

A_gA4 (zur Musteraufgabe A2_2)

Eine Funktion f ist gegeben durch $f(x) = e^{3 \cdot x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass die Tangente t an den Graphen der Funktion f im Punkt $P(1 \mid f(1))$ durch die Gleichung $t(x) = 6 \cdot e^3 \cdot x - 5 \cdot e^3$ beschrieben werden kann.

5 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
A_gA4	In der Tangentengleichung gibt der Term $6 \cdot e^3$ die Steigung an. $f'(x) = 6 \cdot x \cdot e^{3 \cdot x^2}$; $f'(1) = 6 \cdot e^3$; die Steigungen stimmen überein. $f(1) = e^{3 \cdot 1} = e^3$; $t(1) = 6 \cdot e^3 \cdot 1 - 5 \cdot e^3 = e^3$; die Funktionswerte von f und t stimmen an der Stelle 1 überein. Damit beschreibt t die Tangente an den Graphen von f an der Stelle 1. Insbesondere bei dieser Aufgabe sind Wege zur Herleitung der Tangentengleichung gleichwertig.	5
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2 Analytische Geometrie/Lineare Algebra

1.2.1 Analytische Geometrie

G_gA1 (zur Musteraufgabe G1_1)

Gegeben sind die Ebene E mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$, sowie die Punkte $A(3|0|0)$ und $B(-1|0|0)$. Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.

1.1 Zeigen Sie, dass A nicht in E liegt.

2 BE

1.2 Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ in E liegt.

2 BE

1.3 Untersuchen Sie, ob der Richtungsvektor der Geraden g auf den Spannvektoren von E senkrecht steht.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G_gA1		
1.1	Jeder Punkt auf E hat 1 als 1. Koordinate; damit ist A mit der Ebenengleichung nicht darstellbar.	2
1.2	Der Mittelpunkt ist $M(1\|0\|0)$; er gehört zu $s = r = 0$.	2
1.3	Ein möglicher Richtungsvektor von g ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; das Skalarprodukt mit den Spannvektoren von E ist jeweils 0.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_gA2 (zur Musteraufgabe G1_2)

Gegeben ist das Viereck ABCD mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(-3|1|4)$, $C(2|-4|4)$ und $D(5|-5|0)$.

1.1 Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

2 BE

1.2 Berechnen Sie die Länge der Seite $\overline{AB}$.
Zeigen Sie, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ nicht aufeinander senkrecht stehen.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G_gA2		
1.1	Es ist $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Daher sind zwei gegenüberliegende Seiten zueinander parallel und gleich lang. Alternative: Auch die Seiten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sind wegen $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ zueinander parallel.	2
1.2	$\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -15-5 = -20 \neq 0$	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_gA3

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$ und $B(0|0|3)$ sowie $C(3|2|1)$. Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und B.

1.1 Untersuchen Sie, ob C auf der Geraden g liegt.

3 BE

1.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt von g mit der yz-Koordinatenebene.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G_gA3		
1.1	Die Gerade g kann durch $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$ beschrieben werden. Damit kann die 3. Koordinate von C nicht erreicht werden.	3
1.2	In der yz-Ebene gilt $x = 0$, was auf $r = 1$ führt. Der Schnittpunkt kann daher durch den Ortsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ beschrieben werden.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_gA4 (zur Beispielaufgabe G_eA1)

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|0)$, $B(0|1|1)$, $C(3|-2|5)$ und $P(3|k|k-2)$.

1.1 Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

3 BE

1.2 Untersuchen Sie, ob es einen Wert für k gibt, so dass die Punkte A, B und P auf einer Geraden liegen.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G_gA4		
1.1	Gerade g durch A und B: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{array}{ll} 3 = 1 - r; & r = -2 \\ -2 = 2 - r; & r = 4 \\ 5 = 0 + r; & r = 5 \end{array}$ C liegt nicht auf der Geraden durch die Punkte A und B.	3
1.2	$\begin{pmatrix}3\\k\\k-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$; $\begin{array}{ll} 3 = 1 - r; & r = -2 \\ k = 2 - (-2); & k = 4 \\ k - 2 = 0 + (-2); & k = 0 \end{array}$ Es gibt keinen Wert für k, so dass die Punkte A, B und P auf einer Geraden liegen.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_gA5 (zur Beispielaufgabe G_eA2)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$.

1.1 Geben Sie den Wert für den Parameter z so an, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind.

2 BE

1.2 Bestimmen Sie den Wert für den Parameter z so, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vielfache voneinander sind.

1 BE

1.3 Bestimmen Sie einen Vektor, der die gleiche Richtung wie die y-Achse besitzt und die gleiche Länge wie der Vektor $\vec{a}$ hat.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G_gA5		
1.1	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ z \end{pmatrix} = 2 + 8 + 2z = 0;\ z = -5$	2
1.2	$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ z \end{pmatrix};\ z = 4$	1
1.3	$\lvert \vec{a} \rvert = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$ Es kommen infrage: $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_gA6 (zur Beispielaufgabe G_eA3)

Gegeben sind die Punkte $A(3|3|6)$ und $B(-1|-1|-2)$.

1.1 Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und der Punkt K ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes K.

2 BE

1.2 Untersuchen Sie, ob die Punkte A und B zusammen mit dem Ursprung auf einer Geraden liegen.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G_gA6		
1.1	$\vec{m}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$; $\vec{k}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{m})=\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$; $K(2\|2\|4)$	2
1.2	Ursprungsgerade g durch A: $g\colon\ \vec{x}=r\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$; $r=-\frac{1}{3}$ Der Punkt B liegt mit dem Ursprung und dem Punkt A auf einer Geraden.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_gA7 (zur Beispielaufgabe G_eA4)

Gegeben ist die Ebene E mit E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, $r, s \in IR$, sowie der Punkt P, der nicht in der Ebene E liegt.

1.1 Beschreiben Sie, wie sich die Gleichung einer Geraden bestimmen lässt, die durch den Punkt P und parallel zur Ebene E verläuft.

2 BE

1.2 Beschreiben Sie, wie sich die Gleichung einer Geraden bestimmen lässt, die in der Ebene E verläuft.

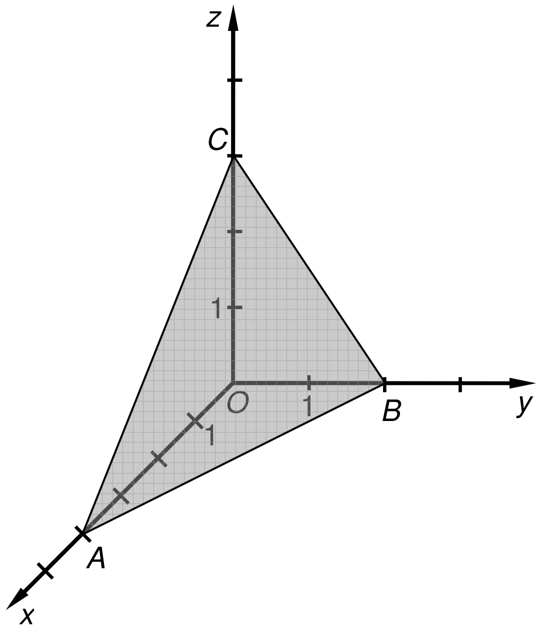
2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G_gA7		
1.1	Der Ortsvektor $\vec{p}$ ist ein möglicher Stützvektor für die Gerade. Als Richtungsvektor kommt z. B. ein Spannvektor der Ebene infrage. $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$.	2
1.2	Der Stützvektor der Ebene E ist auch für diese Gerade ein geeigneter Stützvektor, als Richtungsvektor kommt auch in diesem Fall ein Spannvektor der Ebene infrage. $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_gA8 (zur Beispielaufgabe G_eA5)

In der Abbildung ist ein Teil der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C eindeutig bestimmt ist, in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

Die Punkte A, B und C liegen auf den Koordinatenachsen und besitzen jeweils ganzzahlige Koordinaten.



1.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E.

2 BE

1.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(2\,|\,1\,|\,0)$ in der Ebene E liegt.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G_gA8		
1.1	$A(4\,\|\,0\,\|\,0)$, $B(0\,\|\,2\,\|\,0)$, $C(0\,\|\,0\,\|\,3)$ Eine mögliche Gleichung für E lautet: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.	2
1.2	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $s = 0$ und $r = \frac{1}{2}$ P liegt in der Ebene E.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.2.2 Lineare Algebra

LA_gA1 (Zur Musteraufgabe LA1_1)

Gegeben sind die Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.1 Berechnen Sie die Verteilung $\overrightarrow{v_2}$.

2 BE

1.2 Zeigen Sie, dass es eine Verteilung $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$ mit ganzzahligen Werten für x und z gibt, so dass gilt: $A \cdot \vec{w} = \vec{w}$.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA_gA1		
1.1	$\overrightarrow{v_1} = A \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 40 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v_2} = A \cdot \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 30 \\ \frac{1}{20} \\ 4 \end{pmatrix}$	2
1.2	$\begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ \frac{1}{2} \cdot z \\ \frac{1}{10} \cdot x \end{pmatrix}$. Die Bedingung $A \cdot \vec{w} = \vec{w}$ führt auf die folgenden drei Gleichungen: (I) $x = 20$; (II) $1 = \frac{1}{2} \cdot z$; (III) $z = \frac{1}{10} \cdot x$ Aus (II) folgt: $z = 2$. Mit $x = 20$ aus (I) ergibt sich für (III) eine wahre Aussage. Die drei Gleichungen liefern eine eindeutige Lösung mit ganzzahligen Werten. Insgesamt gilt: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.	3

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.

LA_gA2

Gegeben ist eine 2×2-Matrix A mit den Spaltensummen 1 mit $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie die Werte für b, c und d so, dass für die stationäre Verteilung $\vec{s}$ gilt: $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA_gA2		
	Da $\vec{s}$ eine stationäre Verteilung ist, gilt: $\begin{pmatrix} 0{,}5 & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich: $0{,}1 + 0{,}8 \cdot b = 0{,}2$ und damit $b = \frac{1}{8}$. Da die beiden Spaltensumme jeweils den Wert 1 ergeben, gilt: $d = \frac{7}{8}$; $c = 0{,}5$.	3

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.

LA_gA3

Für eine 2×2-Matrix A gilt: $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -0{,}1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

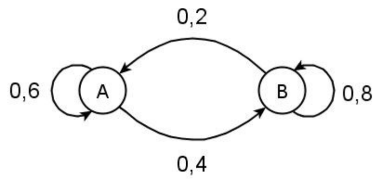
Ermitteln Sie damit die Werte für x und y: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA_ga3		
	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = A \cdot (-0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -0{,}1 \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $= -0{,}1 \cdot (-0{,}1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ -0{,}01 \end{pmatrix}$ Damit gilt: $x = 0{,}01$ und $y = -0{,}01$.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

LA_gA4 (Zur Musteraufgabe LA2_2)

In einer Stadt konkurrieren die beiden Mobilfunkanbieter A und B um die Gunst der Kunden. Die Kunden können ihre Verträge monatlich kündigen.



Das nebenstehende Übergangsdiagramm beschreibt die monatlichen Übergänge zwischen den Anbietern.

Für diese Modellierung wird vorausgesetzt, dass sich die monatliche Entwicklung in der beschriebenen Weise fortsetzen wird.

1.1 Geben Sie die in der nebenstehenden Übergangsmatrix M fehlenden Werte an.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ M = & \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ 0{,}4 & \ldots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}$$

2 BE

1.2 Berechnen Sie für M^2 den Wert in der zweiten Spalte und zweiten Zeile. Interpretieren Sie den berechneten Wert im Sachzusammenhang.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
LA_gA4		
1.1	Dem Graphen entnimmt man folgende Übergänge zwischen den Kunden von Monat zu Monat: $M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.	2
1.2	Für das Element in der zweiten Spalte und zweiten Zeile der Matrix M^2 gilt: $m_{22} = 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$. Der Wert m_{22} beschreibt den Anteil der Kunden von Anbieter B, die nach zwei aufeinander folgenden Monaten wieder oder noch Kunden von B sind. $(B \to A \to B;\ B \to B \to B)$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

1.3 Stochastik

S_gA1 (Zur Musteraufgabe S1_1)

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,6$. Eine der beiden Abbildungen zeigt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

1.1 Geben Sie an, welche der Abbildungen die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung von X darstellt.
Begründen Sie Ihre Auswahl.

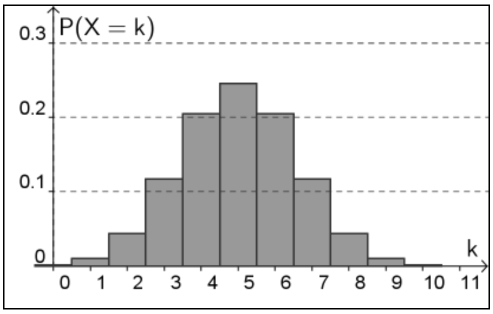


Abbildung 1

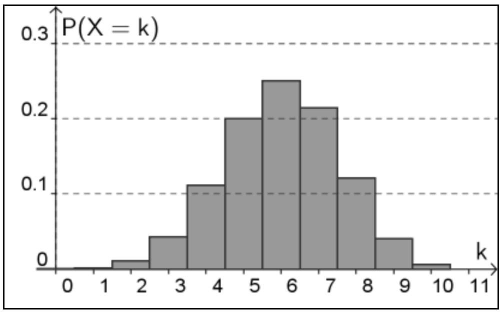


Abbildung 2

2 BE

1.2 Geben Sie mithilfe der von Ihnen ausgewählten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4 < X < 7)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \neq 5)$ an.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S_gA1		
1.1	Abbildung 2 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. Der Graph einer Binomialverteilung hat beim Erwartungswert μ die größte Wahrscheinlichkeit. Hier gilt $\mu = 10 \cdot 0,6 = 6$. Da eine der beiden Abbildungen die Verteilung von X darstellen soll, kann es sich nur um Abbildung 2 handeln.	2
1.2	$P(4 < X < 7) \approx 0,45$ $P(X \neq 5) = 1 - P(X = 5) \approx 0,8$	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

S_gA2 (Zur Musteraufgabe S1_2)

In den Urnen U_1 und U_2 befinden sich Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden:

U_1 : 6 rote und 4 blaue Kugeln

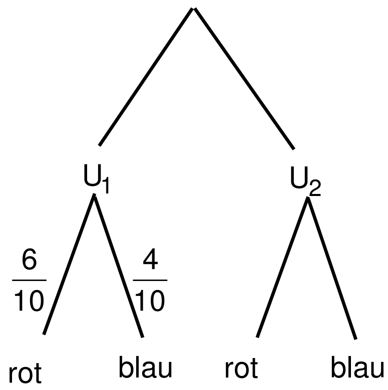
U_2 : 1 rote und 4 blaue Kugeln

1.1 Aus der Urne U_1 werden zwei Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen zufällig gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe haben.

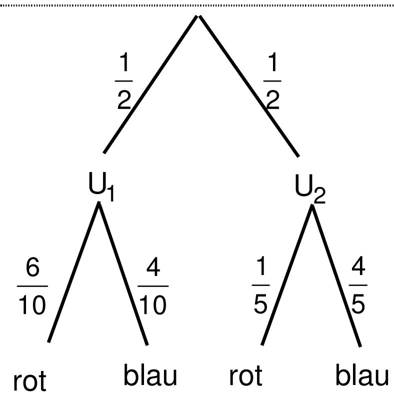
2 BE

1.2 Es wird eine der beiden Urnen zufällig ausgewählt. Aus dieser wird eine Kugel zufällig gezogen. Die gezogene Kugel ist rot.
Mit dem nebenstehenden Baumdiagramm soll dieses Zufallsexperiment beschrieben werden. Ergänzen die vier fehlenden Einträge an den Pfaden.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Kugel aus der Urne U_1 stammt.



3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S_gA2		
1.1	$P(\text{„gleiche Farbe“}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{15}$	2
1.2	Vervollständigung des Baumdiagramms:  $P(\text{„gezogene Kugel stammt aus } U_1\text{“}) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6}{0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}2} = \frac{3}{4}$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

S_gA3

Eine ideale Münze wird genau dreimal geworfen. Dabei wird jeweils die sichtbare Seite (Wappen oder Zahl) notiert.

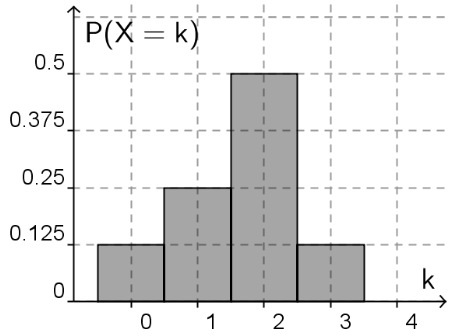
1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal dieselbe Seite erscheint.

Formulieren Sie für dieses Zufallsexperiment ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit 0,5 ist.

3 BE

1.2 Die Zufallsgröße X beschreibt bei diesem Zufallsexperiment die Anzahl „Wappen“.

Begründen Sie, dass das nebenstehende Diagramm nicht die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt.



2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
S_gA3		
1.1	P(„dreimal dieselbe Seite“) $= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$ Mögliches Ereignis: „Im ersten Wurf erscheint Wappen“	3
1.2	Eine mögliche Begründung: Es gilt $P(X=1)=P(X=2)$, die Grafik zeigt aber für diese beiden Fälle unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten auf. Daher stellt das Diagramm nicht die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung dar.	2

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.

S_gA4 (Zur Musteraufgabe S2_2)

Eine verbeulte Münze wird mehrfach geworfen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf „Wappen" fällt, beträgt p.

1.1. Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse A und B an:

A: Bei fünf Würfen fällt genau dreimal „Wappen".

B: Bei fünf Würfen fällt nur im ersten Wurf oder nur im letzten Wurf „Wappen".

3 BE

1.2. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei drei Würfen dreimal „Wappen" fällt, ist 0,216.
Untersuchen Sie, ob das Ergebnis „Wappen" wahrscheinlicher ist als das Ergebnis „Zahl".

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
S_gA4		
1.1	Term für $P(A)$: $\binom{5}{3}\cdot p^3\cdot(1-p)^2$ Term für $P(B)$: $p\cdot(1-p)^4+(1-p)^4\cdot p=2\cdot p\cdot(1-p)^4$	3
1.2	Das Ergebnis "Wappen" ist wahrscheinlicher, da gilt: $0{,}216>0{,}5^3$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

2 Beispielaufgaben zum erhöhten Anforderungsniveau

2.1 Analysis

A_eA1

2.1 Geben Sie die Gleichung einer ganzrationalen Funktion f an, deren Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$ für die von Ihnen gewählte Funktion.

2 BE

2.2 Begründen Sie die Gültigkeit folgender Aussage:

Wenn der Graph einer ganzrationalen Funktion f punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist, dann gilt für alle $a > 0$: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
A_eA1		
2.1	Z. B. die Funktion f mit $f(x) = x$ erfüllt die Bedingung. Berechnung des Integrals: $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2} \cdot x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}$	2
2.2	Der Graph von f schließt mit der x-Achse und den Geraden zu $x = -a$ und $x = a$ Flächenstücke ein. Je zwei dieser Flächenstücke sind wegen der Punktsymmetrie inhaltsgleich, gehen jedoch in die Berechnung des Integrals mit unterschiedlichen Vorzeichen ein.	3

Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.

2.2 Analytische Geometrie

G_eA1

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|0)$, $B(0|1|1)$, $C(3|-2|5)$ und $P(3|k^2|k)$.

2.1 Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

3 BE

2.2 Untersuchen Sie, ob es einen Wert für k gibt, so dass die Punkte A, B und P auf einer Geraden liegen

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G_eA1		
2.1	Gerade g durch A und B: $g\colon\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}3=1-r; & r=-2\\-2=2-r; & r=4\\5=0+r; & r=5\end{matrix}$ C liegt nicht auf der Geraden durch die Punkte A und B.	3
2.2	$\begin{pmatrix}3\\k^2\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};\ \begin{matrix}3=1-r; & r=-2\\k^2=2-(-2); & k^2=4;\ k=2 \text{ oder } k=-2\\k=0+(-2); & k=-2\end{matrix}$ Für $k=-2$ liegt der Punkt P auf der Geraden durch die Punkte A und B.	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_eA2

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathrm{IR}$.

2.1 Geben Sie den Wert für den Parameter z so an, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander sind.

2 BE

2.2 Bestimmen Sie den Wert für den Parameter z so, dass der Vektor $\vec{b}$ doppelt so lang ist wie der Vektor $\vec{a}$.

1 BE

2.3 Bestimmen Sie zwei verschiedene Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$, die jeweils dreimal so lang sind wie der Vektor $\vec{a}$, aber eine andere Richtung als der Vektor $\vec{a}$ besitzen.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G_eA2		
2.1	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ z \end{pmatrix} = 2 + 8 + 2z = 0;\ z = -5$	2
2.2	$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ z \end{pmatrix};\ z = 4$	1
2.3	$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ Z. B. die Vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ erfüllen die Bedingung. auch: $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_eA3

Gegeben sind die Punkte $A(3|3|6)$ und $K(2|2|4)$.

2.1 Der Punkt M ist der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ und der Punkt K der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B.

3 BE

2.2 Untersuchen Sie, ob durch die Punkte A und K zusammen mit dem Ursprung eine Ebene festgelegt wird.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G_eA3		
2.1	$\vec{b} = \vec{a} + 4\cdot(\vec{k} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $B(-1\|-1\|-2)$	3
2.2	Ursprungsgerade g durch K: g: $\vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $r = \frac{3}{2}$ Der Punkt A liegt auf der Geraden durch den Ursprung und den Punkt K. Deshalb ist durch diese drei Punkte keine Ebene festgelegt.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_eA4

Gegeben ist die Ebene E mit E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, $r, s \in \mathbb{R}$, sowie der Punkt P, der nicht in der Ebene E liegt.

2.1 Beschreiben Sie, wie sich die Gleichungen von drei verschiedenen Geraden bestimmen lassen, die jeweils durch den Punkt P und parallel zur Ebene E verlaufen.

3 BE

2.2 Erläutern Sie, dass es beliebig viele Geraden gibt, die durch den Punkt P und parallel zur Ebene E verlaufen.

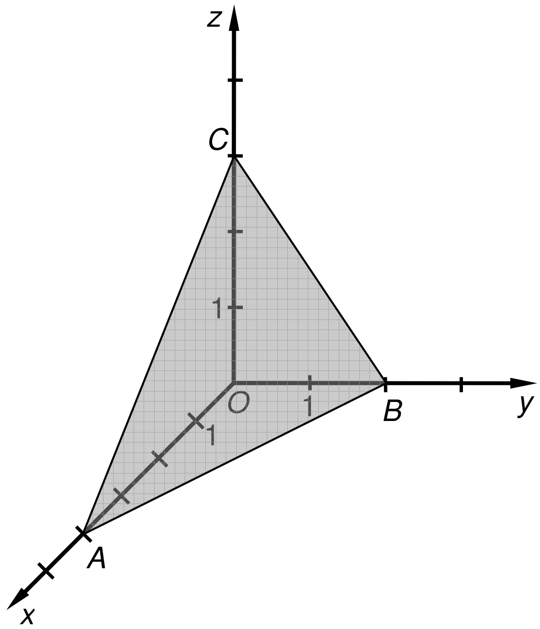
2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G_eA4		
2.1	Der Ortsvektor $\vec{p}$ ist ein möglicher Stützvektor für Geraden, die parallel zur Ebene E verlaufen. Als Richtungsvektoren kommen z. B. die Spannvektoren der Ebene und deren Summe infrage. $g_1 : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$; $g_2 : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v}$; $g_3 : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot (\vec{u} + \vec{v})$	3
2.2	Zum Stützvektor $\vec{p}$ gibt es beliebig viele Richtungsvektoren der Form $(r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v})$, die eine zu E parallele Gerade bestimmen.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_eA5

In der Abbildung ist ein Teil der Ebene E, die durch die Punkte A, B und C eindeutig bestimmt ist, in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt.

Die Punkte A, B und C liegen auf den Koordinatenachsen und besitzen jeweils ganzzahlige Koordinaten.



2.1 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E.

2 BE

2.2 Bestimmen Sie den Wert für den Parameter y so, dass der Punkt $P(0\,|\,y\,|\,6)$ in der Ebene E liegt.

3 BE

	Erwartete Schülerleistungen	**BE**
G_eA5		
2.1	$A(4\,\|\,0\,\|\,0)$, $B(0\,\|\,2\,\|\,0)$, $C(0\,\|\,0\,\|\,3)$ Eine mögliche Gleichung für E lautet: E: $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + s \cdot (\vec{c} - \vec{a})$; $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.	2
2.2	$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $s = 2$; $0 = 4 - 4r + 2 \cdot (-4)$; $r = -1$; $y = -1 \cdot 2 = -2$	3
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		

G_eA6

Gegeben ist eine Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze S. In einem kartesischen Koordinatensystem haben die Eckpunkte die Koordinaten $A(5|1|3)$, $B(9|4|3)$, $C(8|-3|3)$ und $S(1|-3|-2)$.

2.1 Weisen Sie nach, dass die Grundfläche ABC ein gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck ist

3 BE

2.2 Erläutern Sie die spezielle Lage der Grundfläche ABC im Koordinatensystem und bestimmen Sie die Höhe h der Pyramide.

2 BE

	Erwartete Schülerleistungen	BE
G_eA6		
2.1	$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot3+3\cdot(-4)=0$ Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ bilden einen rechten Winkel. $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\lvert\overrightarrow{AC}\rvert=5$ Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sind gleich lang.	3
2.2	Die Punkte A, B und C besitzen alle die z-Koordinate 3, deshalb liegt die Grundfläche ABC parallel zur xy-Ebene. Da der Punkt S die z-Koordinate -2 besitzt, gilt für die Höhe h: $h=5$.	2
Die vom Prüfling gewählten Lösungsansätze und -wege müssen nicht mit denen der dargestellten Lösungsskizze identisch sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl unter Berücksichtigung der verbindlichen BE bewertet.		