LM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE

I.

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (x-1) \cdot \ln x$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}^+$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

   Hinweis: $\lim\limits_{x \to 0+} (x^n \cdot \ln x) = 0$, für $n \in \mathbb{N}$, darf ohne Beweis verwendet werden.

3 a) Geben Sie die Nullstelle von f an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern der Definitionsmenge.

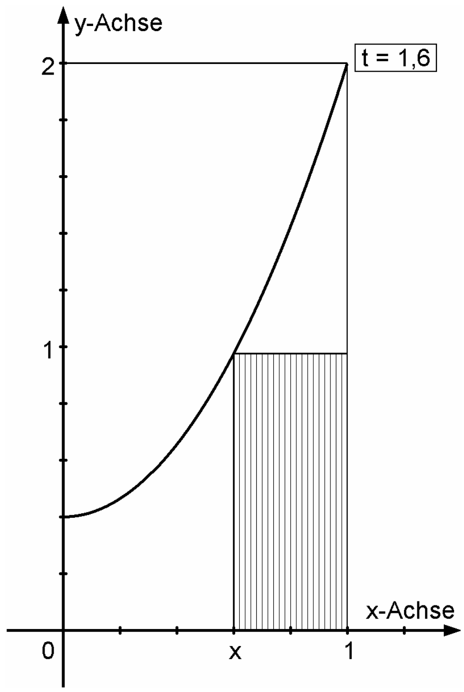
5 b) Weisen Sie nach, dass G_f an der Stelle $x = 1$ einen Punkt mit waagrechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f. [Zur Kontrolle: $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$]

5 c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f. Berechnen Sie $f(3)$ und skizzieren Sie G_f aufgrund der bisherigen Ergebnisse.

4 d) Begründen Sie, dass f im Intervall $]0;1]$ umkehrbar ist. Geben Sie Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion g an. Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to 0+} g'(x)$.

8 e) G_f und die Koordinatenachsen begrenzen für $x \leq 1$ ein Flächenstück, das sich ins Unendliche erstreckt. Zeigen Sie, dass dieses Flächenstück den endlichen Inhalt 0,75 hat.

2. Aus rechteckigen Kunststoffplatten von 1 Meter Breite und 2 Meter Höhe wurden Stücke abgeschnitten, wobei die Schnittkurve p_t Teil einer Parabel ist, die der Gleichung $y = tx^2 + 2 - t$ genügt. Für den Parameter t gilt: $0 < t \leq 2$. In nebenstehender Skizze ist der Fall $t = 1{,}6$ dargestellt.



3 a) Zeigen Sie, dass jede Schnittkurve p_t durch den Punkt $(1|2)$ verläuft.
   Beschreiben Sie die Bewegung des Parabelscheitels, wenn t bei 2 beginnend alle Werte des Intervalls $]0;2]$ durchläuft.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

Aus der Restplatte werden Rechtecke – wie in der Skizze schraffiert dargestellt – ausgeschnitten. Je eine Seite des Rechtecks soll auf dem unteren bzw. auf dem rechten Rand der Platte zu liegen kommen, eine Ecke des Rechtecks soll auf der Schnittkurve liegen.

3 b) Zeigen Sie, dass für den Inhalt eines solchen Rechtecks gilt:

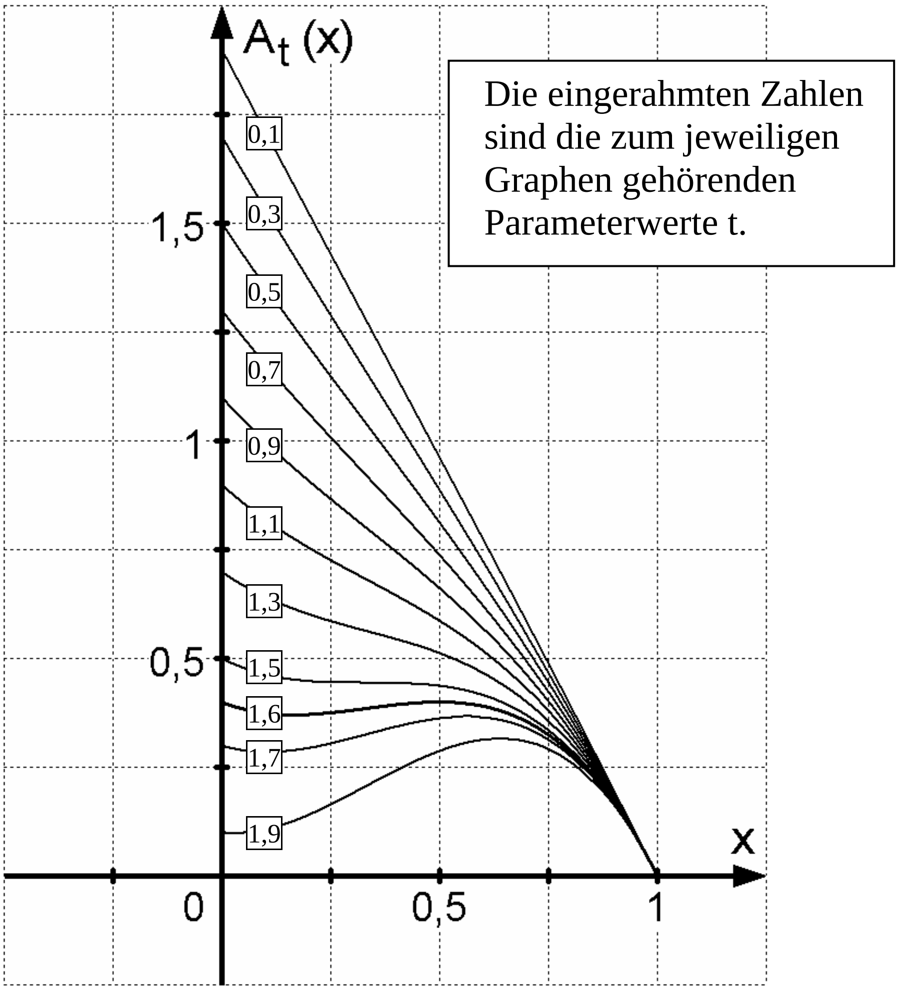
$$A_t(x) = -tx^3 + tx^2 + (t-2)x + 2 - t \quad (0 \le x \le 1).$$

Der Inhalt A_t des ausgeschnittenen Rechtecks soll möglichst groß sein (Extremwertproblem).

6 c) Die unten stehende Abbildung zeigt einige Graphen der Scharfunktionen A_t. Beschreiben Sie, was aufgrund der Abbildung im Fall $0 < t < 1{,}5$ für die Lösung des Extremwertproblems zu vermuten ist. Beweisen Sie Ihre Vermutung rechnerisch.

3 d) Im Fall $t = 1{,}6$ ist die erste Ableitung von A_t an den Stellen $x_1 = \frac{1}{6}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$ gleich Null (Nachweis nicht erforderlich). Bestätigen Sie durch Berechnung geeigneter Werte von A_t, dass für $t = 1{,}6$ zwei Rechtecke den maximalen Flächeninhalt aufweisen.

40



BE

II.

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{k}{1+e^{-kx}}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$. G_k bezeichnet den Graphen von f_k.

2 a) Untersuchen Sie das Verhalten von f_k für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

4 b) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von f_k und geben Sie die Wertemenge an.

[mögliches Zwischenergebnis: $f_k'(x) = \frac{k^2 e^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$]

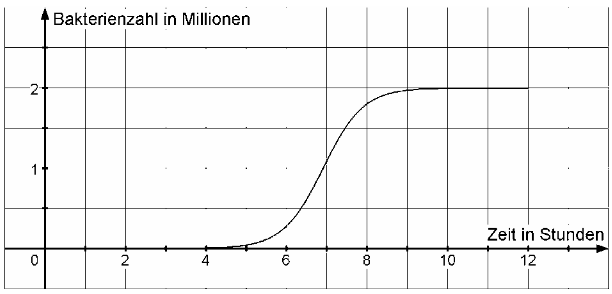
7 c) Weisen Sie nach, dass der Punkt $W_k(0 \mid \frac{k}{2})$ der einzige Wendepunkt von G_k ist.

6 d) Weisen Sie nach, dass für alle $k \in \mathbb{R}^+$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f_k(-x) + f_k(x) = k$. Begründen Sie damit die Symmetrie von G_k zum Punkt W_k.

7 e) Die beiden Koordinatenachsen und G_k begrenzen im zweiten Quadranten ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück. Veranschaulichen Sie dieses Flächenstück in einer Skizze. Zeigen Sie, dass das Flächenstück den endlichen Inhalt $\ln 2$ besitzt.

(Hinweis: Für die Integration ist es hilfreich, den Funktionsterm mit e^{kx} zu erweitern.)

2. Bei vielen Wachstumsvorgängen ist kein unbeschränktes Wachstum möglich. Dies gilt z. B. auch für eine Bakterienkultur, deren Bakterienzahl schließlich einer oberen Grenze entgegenstrebt. Die Zahl der Bakterien einer Kultur wird näherungsweise durch die Funktion N mit



$N(x) = 10^6 \cdot \frac{2}{1+e^{-2(x-6{,}908)}}$, $x \geq 0$, beschrieben. Dabei gibt x die Zeit in Stunden an, die seit dem Ansetzen der Bakterienkultur vergangen ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von N.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
2	a) Geben Sie an, wie der Graph von N aus G_2 der Aufgabe 1 entsteht.
3	b) Mit wie vielen Bakterien wurde die Kultur angesetzt, wie viele Bakterien sind es nach zwei Stunden?
5	c) Berechnen Sie, nach welcher Zeit 90 % des Grenzbestandes von 2 Millionen Bakterien erreicht sind.
4	d) Schätzen Sie rechnerisch ab, wie viele Bakterien in der Minute stärksten Wachstums hinzukommen.
40	

LM2. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG/STATISTIK

BE	III.
	1. Für einen 8-köpfigen Ausschuss kandidieren 12 Frauen und 8 Männer.
4	a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Ausschuss zusammenzusetzen, wenn er mindestens 3 und höchstens 5 männliche Mitglieder haben soll?
	In den Ausschuss wurden 4 Frauen und 4 Männer gewählt. Die Sitzungen finden an einem rechteckigen Tisch statt, der an seinen beiden Längsseiten je 4 Personen Platz bietet. Die Mitglieder setzen sich an die beiden Längsseiten des Tisches, die sich auf der Tür- und auf der Fensterseite des Raumes befinden.
3	b) Auf wie viele verschiedene Arten können die Ausschussmitglieder Platz nehmen, wenn die 4 Frauen auf einer Seite des Tisches sitzen sollen und die Personen unterschieden werden?
4	c) Auf wie viele verschiedene Arten können die Ausschussmitglieder Platz nehmen, wenn auf jeder Längsseite des Tisches Frauen und Männer abwechselnd sitzen sollen und die Personen unterschieden werden?
	2. Beim Abiturstreich an einem Gymnasium muss ein Sportlehrer seine Sicherheit bei Basketball-Freiwürfen gegen einen Vereinsspieler aus dem Kreis der Abiturienten unter Beweis stellen. Der Sportlehrer trifft bei jedem Versuch mit einer Wahrscheinlichkeit von 35 %, der Vereinsspieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %.
4	a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Sportlehrer bei 12 Versuchen höchstens zweimal?
4	b) Der Sportlehrer hat bei seinen 12 Versuchen dreimal getroffen. Wie oft muss der Vereinsspieler mindestens werfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mehr als 3 Treffer erzielt? Verwenden Sie zur Lösung die Tabellen zur Stochastik.
4	c) Wie oft muss die Schulleiterin, die im Mittel bei jedem 8. Wurf in den Korb trifft, mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % wenigstens einmal zu treffen?
4	d) Ein Schüler führt 100 Freiwürfe aus, um seine Trefferwahrscheinlichkeit p zu bestimmen. Als Ergebnis möchte er ein Intervall angeben, in dem p mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % liegt. Zeigen Sie, dass die Länge dieses Intervalls nicht kleiner als $\frac{1}{5}$ gewählt werden kann, wenn diese mit der Ungleichung von Tschebyschow abgeschätzt wird.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

3. Ein Prüfer einer Universität entwickelt einen Multiple-Choice-Test, der aus 50 Fragen mit je 4 Antworten besteht, von denen jeweils genau eine richtig ist. Für das Bestehen des Tests legt er die Mindestzahl richtiger Antworten nach folgendem Kriterium fest: Wenn ein Student durch sein Wissen nur die Hälfte der Fragen sicher richtig beantworten kann und die übrigen Fragen ausschließlich aufgrund bloßen Ratens beantwortet, dann soll er den Test mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % nicht bestehen.

5 a) Bestimmen Sie, wie viele Fragen mindestens richtig beantwortet werden müssen, damit der Test unter den genannten Bedingungen bestanden wird.

4 b) Ein Student kann 60 % der Fragen durch sein Wissen sicher beantworten und muss sich beim Rest auf bloßes Raten verlassen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er den Test nicht, wenn für das Bestehen mindestens 36 Fragen richtig beantwortet werden müssen?

4 4. Sei H die relative Häufigkeit der Anzahl der Treffer einer nach B(n, p) verteilten Zufallsgröße. Geben Sie den Erwartungswert von H an und zeigen Sie, dass die Standardabweichung von H kleiner oder gleich $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ ist.

40

BE

IV.

Die Firma VEGAS hat ein neues Gesellschaftsspiel entwickelt, bei dem neben Laplace-Würfeln auch spezielle Vegas-Würfel verwendet werden, die sich äußerlich von den Laplace-Würfeln nicht unterscheiden. Die Vegas-Würfel zeigen die Augenzahl „6“ mit der erhöhten Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$, während die anderen Augenzahlen untereinander gleich wahrscheinlich sind.

3 1. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße „Augenzahl beim einmaligen Werfen eines Vegas-Würfels“ 4 ist.

7 2. Auf dem Tisch liegen ungeordnet drei Laplace-Würfel und ein Vegas-Würfel. Ein Spieler nimmt davon zufällig drei Würfel und wirft sie gleichzeitig.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er drei Laplace-Würfel genommen hat? Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er drei gleiche Augenzahlen, wenn er zwei Laplace-Würfel und den Vegas-Würfel genommen hat?

Welche Folgerung können Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der stochastischen Abhängigkeit der Ereignisse „Er erzielt drei gleiche Augenzahlen“ und „Er nimmt drei Laplace-Würfel“ ziehen?

3. Um bei einem Würfel festzustellen, ob es sich um einen Laplace- oder Vegas-Würfel handelt, wird er 100-mal geworfen. Ein Vegas-Würfel soll mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % als solcher eingestuft werden.

5 a) Bestimmen Sie hierzu die Entscheidungsregel anhand der Anzahl der geworfenen Sechser so, dass möglichst auch ein Laplace-Würfel richtig eingestuft wird.
[Ergebnis: Entscheidung für Vegas-Würfel ab 23 geworfenen Sechsern]

3 b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei dieser Entscheidungsregel ein Laplace-Würfel falsch eingestuft?

Eine Packung des Spiels enthält – ungeordnet und äußerlich nicht unterscheidbar – 7 Laplace- und 3 Vegas-Würfel.

5 4. Aus dieser Packung wird ein Würfel entnommen und 100-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um einen Vegas-Würfel, wenn dabei 25-mal eine „6“ geworfen wird?

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
	5. Die 10 Würfel werden nun einzeln nacheinander aus der Packung entnommen und je 100-mal geworfen.
4	a) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der geworfenen Sechser unter den insgesamt 1000 durchzuführenden Würfen. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X. [Ergebnis: $E(X) = 216\frac{2}{3}$, $Var(X) = 163\frac{8}{9}$]
4	b) Die Zufallsgröße X ist näherungsweise normalverteilt. Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei den 1000 Würfen mehr als 225-mal eine „6“ geworfen wird.
	6. Bei einem Spiel werden jeweils 5 Würfel geworfen. Aus den Augenzahlen – aufgefasst als Ziffern – werden möglichst große fünfstellige natürliche Zahlen gebildet, z. B. 43321, nicht jedoch 34312.
4	a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine Zahl größer als 50000, wenn es sich um 5 Laplace-Würfel handelt?
5	b) Wie viele verschiedene natürliche Zahlen können nach dieser Spielregel gebildet werden? Wählen Sie aus den folgenden kombinatorischen „Modellen“ zunächst das für dieses Problem passende aus und bestimmen Sie dann mit dessen Hilfe die gesuchte Anzahl. A) Anzahl der fünfstelligen Zahlen aus den Ziffern 1 bis 6 dividiert durch die Zahl der Permutationen von 5 Elementen B) Zahl der möglichen Verteilungen von 5 Kugeln auf 6 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt C) Zahl der möglichen Verteilungen von 6 Kugeln auf 5 Urnen, wobei es nur auf die jeweilige Anzahl der Kugeln in den Urnen ankommt
40	

LM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

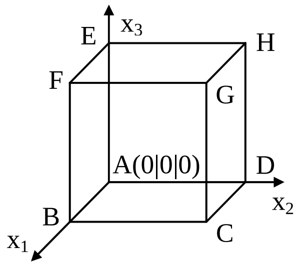
V.

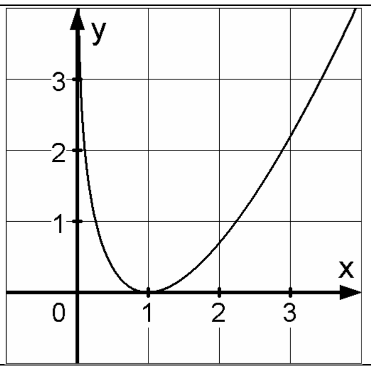
BE	
	In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebene $E: x_2 - x_3 - 1 = 0$, die Geradenschar $g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -k^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben, wobei k, λ und μ aus $\mathbb{R}$ sind.
3	1. a) Zeigen Sie: Alle Geraden der Schar g_k sind zueinander parallel und liegen in der Ebene E.
4	b) Begründen Sie, dass die Schar der Geraden g_k eine Halbebene von E bildet.
5	c) Für welche Werte von k schneidet g_k die Gerade h? Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S. [Teilergebnis: $S(2 \mid \frac{5}{3} \mid \frac{2}{3})$]
5	d) Projiziert man h senkrecht auf E, so erhält man die Gerade h_E. Berechnen Sie den Winkel φ zwischen h_E und h in Grad auf eine Nachkommastelle gerundet.
	2. Die Ebene E ist Tangentialebene an zwei Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien $5\sqrt{2}$, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 auf der Geraden h liegen.
6	a) Bestimmen Sie die Koordinaten von M_1 und M_2. (Der Punkt mit ausschließlich ganzzahligen Koordinaten wird mit M_1 bezeichnet.) [Teilergebnis: $M_1(2 \mid 5 \mid -6)$]
3	b) Die Kugelpunkte $P \in K_1$ und $Q \in K_2$ sind diejenigen Punkte, die minimale Distanz voneinander haben. Berechnen Sie die Entfernung $\overline{PQ}$ auf zwei Dezimalen gerundet.
4	c) Spiegelt man die Ebene E am Punkt M_1, so erhält man die Ebene E^*. Geben Sie eine Gleichung von E^* in Normalenform an.

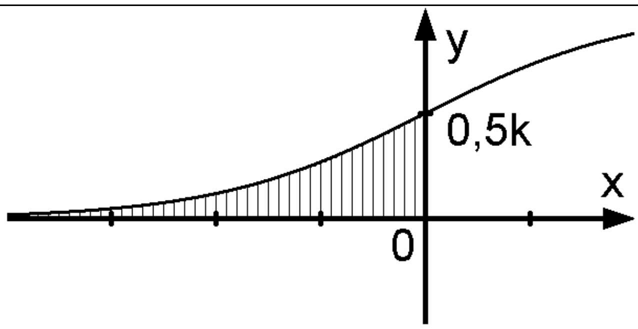
(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
4	d) Zeigen Sie, dass die Punkte $A(-1\,|\,0\,|\,-2)$ und $C(-1\,|\,1\,|\,-1)$ auf der Kugel K_1 um M_1 liegen, und bestimmen Sie die Koordinaten von B so, dass die Strecke [AB] ein Durchmesser von K_1 ist. [Teilergebnis: $B(5\,|\,10\,|\,-10)$]
6	e) Das Dreieck ABC ist die Grundfläche einer Pyramide ABCD, deren Spitze D ebenfalls auf der Kugel K_1 liegt. Alle Punkte D, für die die Pyramiden ABCD das Volumen 11 haben, bilden zwei Kreise auf der Kugelfläche (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie zuerst die Höhe h dieser Pyramiden und anschließend mit Hilfe einer geeigneten Skizze den Radius R der beiden oben definierten Kreise. [Zur Kontrolle: $h = \sqrt{11}$]
40	

BE	
	VI.
	Gegeben ist eine Kugel K mit dem Radius 5, die in eine im Koordinatensystem stehende würfelförmige Schachtel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 10 (siehe Abbildung) verpackt ist, sowie die Punkteschar $P_a(10 \mid 0 \mid \frac{5(a+2)}{a+1})$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}_0^+$.
2	1. a) Wie viel Prozent des Schachtelvolumens füllt die Kugel aus?
5	b) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte Z_1 und Z_2, in denen die Gerade DF die Kugel schneidet. [Zur Kontrolle: $Z_1(5+\frac{5}{3}\sqrt{3} \mid 5-\frac{5}{3}\sqrt{3} \mid 5+\frac{5}{3}\sqrt{3})$]
5	c) Geben Sie die kürzeste Strecke an, auf der sich der Punkt P_a bewegt, wenn a das Intervall $[0;\infty[$ durchläuft. Begründen Sie Ihre Antwort.
	Um diese Verpackung attraktiver zu gestalten, werden durch Ebenen, die senkrecht zu den Raumdiagonalen des Würfels verlaufen, an allen seinen Ecken kongruente dreiseitige Pyramiden abgeschnitten.
3	2. a) Um welche besonderen Dreiecke handelt es sich bei der Grundfläche (Schnittfläche) und den Seitenflächen der abgeschnittenen Pyramiden?
4	b) Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Ebene S_a in Normalenform, die senkrecht zu DF liegt und den Punkt P_a enthält. [mögliches Ergebnis: $S_a: x_1 - x_2 + x_3 - \frac{15a+20}{a+1} = 0$]
	3. Im Folgenden sei $a = 4$.
5	a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Ebene S_4 die Kugel nicht schneidet.
5	b) Zeichnen Sie den Würfel, den Punkt P_4 und die Schnittfläche der Ebene S_4 mit dem Würfel in ein Koordinatensystem (Orientierung wie in obiger Abbildung) ein.
6	c) Berechnen Sie die Volumenverkleinerung der Schachtel und die Oberflächenabnahme der Schachtel, wenn in gleicher Weise wie durch S_4 an der Ecke F an allen Würfelecken Pyramiden abgeschnitten werden.
5	d) Die Ebene S_4 und die drei entsprechenden Ebenen, die die oberen Ecken E, G und H des Würfels abschneiden, haben genau einen Punkt W gemeinsam (Nachweis nicht erforderlich). Berechnen Sie die Koordinaten von W.
40	



Aufgabe	BE	Hinweise
1. a)	3	Nullstelle $x = 1$; $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
b)	5	$0 < x < 1$: $\ln x < 0$ und $1 - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, also f streng monoton abnehmend $x > 1$: $\ln x > 0$ und $1 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, also f streng monoton zunehmend
c)	5	$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ für alle $x > 0$ $\Rightarrow G_f$ linksgekrümmt in D_f $f(3) = 2\ln 3 \approx 2{,}2$ 
d)	4	f in $]0;1]$ echt monoton abnehmend, also dort umkehrbar $D_g = [0;\infty[$, $W_g =]0;1]$ $\lim\limits_{x\to 0+} g'(x) = -\infty$
e)	8	mögliche Stammfunktion: $F(x) = (\frac{1}{2}x^2 - x)\ln x - \frac{1}{4}x^2 + x$
2. a)	3	Vom Ursprung ausgehend bewegt sich der Scheitel $(0 \mid 2 - t)$ auf der y-Achse in positiver Richtung und nähert sich dem Punkt $(0 \mid 2)$ beliebig nahe an.
b)	3	$A_t(x) = (1 - x)\cdot(tx^2 + 2 - t)$
c)	6	Für $0 < t < \frac{3}{2}$ ist A_t echt monoton abnehmend, so dass A_t sein Maximum an der Randstelle $x = 0$ annimmt. $A_t'(x) = -3tx^2 + 2tx + t - 2$ hat für $0 < t < 1{,}5$ keine Nullstelle und wegen $A_t'(0) = t - 2 < 0$ folgt: $A_t'(x) < 0$ für $0 \le x \le 1$.
d)	3	$A_{1,6}(0) = A_{1,6}(\frac{1}{2}) = 0{,}4$
	40	

Aufgabe	BE	Hinweise
1. a)	2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = k;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$
b)	4	f_k in D_k streng monoton zunehmend; Wertemenge $]0;k[$
c)	7	$f_k''(x) = \dfrac{k^3 e^{-kx}(e^{-kx}-1)}{(1+e^{-kx})^3}$
d)	6	-----
e)	7	 mögliche Stammfunktion: $F_k(x) = \ln(e^{kx}+1)$
2. a)	2	Verschiebung um 6,908 in positiver x-Richtung und Streckung mit Faktor 10^6 in y-Richtung
b)	3	$N(0) \approx 1{,}999$: Die Kultur wurde mit zwei Bakterien angesetzt. $N(2) \approx 109{,}1$: Nach zwei Stunden sind es etwa einhundert Bakterien.
c)	5	nach etwa acht Stunden
d)	4	stärkstes Wachstum an der Wendestelle $x = 6{,}908$ z. B.: $N(6{,}908+\frac{1}{120}) - N(6{,}908-\frac{1}{120}) \approx 16666$ oder $\dfrac{N'(6{,}908)}{60} \approx 16667$ Der maximale Zuwachs beträgt etwa siebzehntausend Bakterien pro Minute.
	40	

Mathematik – Leistungskurs Aufgabe LM2.III

Aufgabe	BE	Hinweise
1. a)	4	$\binom{8}{3}\binom{12}{5}+\binom{8}{4}\binom{12}{4}+\binom{8}{5}\binom{12}{3}=91322$
b)	3	$2\cdot 4!\cdot 4! = 1152$
c)	4	$2\cdot 2\cdot 4!\cdot 4! = 2304$
2. a)	4	$P_{0,35}^{12}(Z\le 2)\approx 15{,}1\ \%$
b)	4	$P_{0,6}^{n}(Z\le 3)\le 0{,}2$; mindestens 8-mal
c)	4	$1-(\frac{7}{8})^n > 0{,}9$; mindestens 18-mal
d)	4	$1-\frac{1}{400\varepsilon^2}\ge 0{,}75 \Rightarrow \varepsilon\ge\frac{1}{10}$ (halbe Intervallbreite)
3. a)	5	$P_{0,25}^{25}(Z\ge k)\le 0{,}05 \Rightarrow k\ge 11$ Es sind mindestens $25+11=36$ Fragen richtig zu beantworten.
b)	4	$P_{0,25}^{20}(Z\le 5)\approx 61{,}7\ \%$
4.	4	$E(H)=p;\ Var(H)=\frac{pq}{n}\le\frac{1}{4n}$
	40	

Aufgabe	BE	Hinweise
1.	3	-----
2.	7	$6\cdot(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{36}$; $5\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot\frac{2}{15}+(\frac{1}{6})^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{36}$ Die Ereignisse sind stochastisch unabhängig.
3. a)	5	$P_{\frac{1}{3}}^{100}(Z\geq k)\geq 0{,}99 \quad\Rightarrow\quad k\leq 23$ Entscheidung für Vegas-Würfel, wenn mindestens 23-mal eine „6“ geworfen wird
b)	3	$P_{\frac{1}{6}}^{100}(Z\geq 23)\approx 6{,}3\ \%$
4.	5	$\dfrac{0{,}3\cdot P_{\frac{1}{3}}^{100}(Z=25)}{0{,}3\cdot P_{\frac{1}{3}}^{100}(Z=25)+0{,}7\cdot P_{\frac{1}{6}}^{100}(Z=25)}\approx 43{,}7\ \%$
5. a)	4	-----
b)	4	$1-\Phi\left(\dfrac{225-E(X)+0{,}5}{\sqrt{Var(X)}}\right)\approx 24{,}5\ \%$ Lösungen ohne Stetigkeitskorrektur sind ebenfalls anzuerkennen.
6. a)	4	$P_{\frac{1}{3}}^{5}(Z\geq 1)=1-(\frac{2}{3})^5\approx 86{,}8\ \%$
b)	5	Modell B: $\binom{6+5-1}{5}=252$
	40	

Aufgabe	BE	Hinweise
1. a)	3	-----
b)	4	z. B.: Grenzgerade $g_0 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; Aufhängepunkte der Geraden g_k bilden Halbgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k^2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die nicht parallel zu g_0 ist.
c)	5	$k_{1/2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$
d)	5	$\varphi \approx 71{,}6°$
2. a)	6	$M_2(2 \mid -\frac{5}{3} \mid \frac{22}{3})$
b)	3	$\overline{PQ} \approx 0{,}76$
c)	4	$E^* : x_2 - x_3 - 21 = 0$
d)	4	-----
e)	6	$R = \sqrt{39}$
	40	

Aufgabe	BE	Hinweise
1. a)	2	$\frac{\pi}{6} \approx 52{,}4$ %
b)	5	$Z_2(5-\frac{5}{3}\sqrt{3}\,\vert\,5+\frac{5}{3}\sqrt{3}\,\vert\,5-\frac{5}{3}\sqrt{3})$
c)	5	Strecke [FN] mit $N(10\,\vert\,0\,\vert\,5)$ z. B.: $x_3 : a \mapsto \frac{5a+10}{a+1} = 5+\frac{5}{a+1}$ ist für $a \geq 0$ streng monoton abnehmend mit Wertemenge]5;10]
2. a)	3	Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, Seitenflächen rechtwinklige, gleichschenklige Dreiecke.
b)	4	-----
3. a)	5	Der Abstand des Kugelmittelpunkts von der Ebene S_4 ist größer als der Kugelradius.
b)	5	-----
c)	6	Volumenverkleinerung: $85\frac{1}{3}$ Oberflächenabnahme: $64\cdot(3-\sqrt{3})$
d)	5	$W(5\,\vert\,5\,\vert\,16)$
	40	