Punkte

1. Für jedes $t \in IR$ ist eine Funktion f_t definiert durch

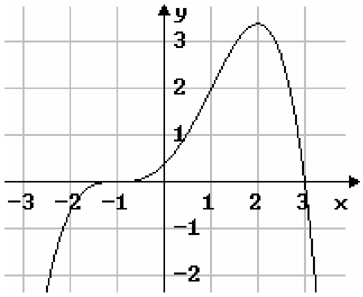
$$f_t(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-t) \quad \text{mit } x \in IR.$$

Das Schaubild von f_t heißt K_t.
Wenn t alle zulässigen Werte durchläuft, entsteht eine Kurvenschar.

a) Beschreiben Sie den Verlauf des Schaubildes K_t in Abhängigkeit von t.
Für welches t liegt der Wendepunkt von K_t auf der y-Achse?
Für welche Werte von t liegt der Hochpunkt von K_t auf der x-Achse? 13

b) Skizzieren Sie K_2 und K_{-4}.
Begründen Sie:
K_{-4} ist das Spiegelbild von K_2 bezüglich des Punktes $Z(-1|0)$.
Zeigen Sie, dass es ein Schaubild K_t gibt, das den Sattelpunkt Z besitzt. 10

c) Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Stammfunktion der Funktion f_t für einen bestimmten Wert von t.



Bestimmen Sie diesen Wert von t und geben Sie die Stammfunktion an.
Beschreiben Sie Ihr Vorgehen. 8

d) Die Fläche, die von K_2 und den Koordinatenachsen im ersten Feld begrenzt wird, soll eine möglichst große, viereckige Fläche einschließen. Ein Eckpunkt dieses Vierecks soll der Punkt $A(0|1)$ sein.
Bestimmen Sie das Viereck mit der größtmöglichen Fläche. 8

2. Für das Schaubild einer Funktion f, das überall linksgekrümmt ist, gilt:
Jede Tangente verläuft außer im Berührpunkt sonst unterhalb dieses Schaubildes.
Erläutern Sie diese Aussage mit einem eigenen Beispiel.
Welche Folgerung ergibt sich mit dieser Aussage für die Lösbarkeit der Gleichung

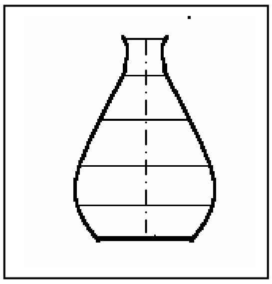
$$e^{0,5x} - 0,5x = 0 \quad ?$$ 6

45

Punkte

Eine 25 cm hohe bauchige Vase hat in verschiedenen Höhen farbige Ringe, deren Umfänge in der folgenden Tabelle angegeben sind (siehe Skizze).

Höhe (cm)	0	5	10	15	20	25
Umfang (cm)	37,7	59,7	56,5	44,0	31,4	25,1



a) Legen Sie durch die Symmetrieachse der Vase die x-Achse und durch den Boden die y-Achse eines Koordinatensystems und beschreiben Sie die Randkurve der Vase im Intervall I = [0; 25] angenähert durch eine Polynomfunktion f_1 4. Grades. 6

b) Erläutern Sie, welchen Grad eine Polynomfunktion haben muss, wenn ihr Schaubild exakt durch alle gegebenen Punkte gehen soll. 2

c) Bei der Bestimmung der Funktion f_1 ergibt sich für den Koeffizienten von x^4 ein sehr kleiner Wert. Jemand setzt in dem von ihm ermittelten Funktionsterm diesen Koeffizienten gleich null und erhält die Funktion f_2 mit

$$f_2(x) = 0{,}0047x^3 - 0{,}14\,x^2 + 1{,}29\,x + 6.$$

Berechnen Sie die Hoch- und Tiefpunkte des Schaubildes dieser Funktion und entscheiden Sie, ob die vorgenommene Vereinfachung sinnvoll ist. 7

Die Funktion f mit $f(x) = 2{,}8 \sin(0{,}2x - 0{,}1) + 6{,}3$

beschreibt angenähert die Randkurve der Vase im Intervall I.

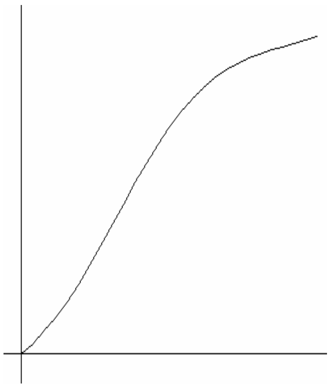
d) Bestimmen Sie die Amplitude und die Periode der Funktion f.
Berechnen Sie die Höhe, für die der Umfang der Vase bei dieser Näherung am kleinsten ist.
Zeichnen Sie das Schaubild von f. 9

e) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion f und berechnen Sie damit die Fläche, die vom Schaubild von f, den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung x = 25 eingeschlossen wird. 5

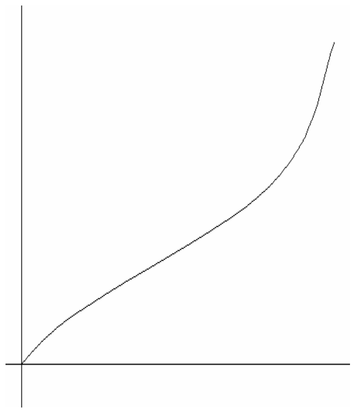
f) Dreht man das Flächenstück aus Aufgabe e) um die x-Achse, entsteht die Vase als Rotationskörper.
Berechnen Sie, wie viel Liter die so entstandene Vase fasst (ohne Berücksichtigung der Wandstärke).
Wie kann man näherungsweise das Volumen berechnen, wenn berücksichtigt werden soll, dass der Boden 1 cm und die Wände ungefähr 0,5 cm dick sind.
Berechnen Sie, um wie viel % sich dann das Volumen verringert. 9

g) Die Vase wird nun mit Wasser gefüllt. Dabei ist der Wasserstrom (zufließendes Volumen pro Zeiteinheit) konstant.
In den folgenden drei Diagrammen ist nach oben die Höhe des Flüssigkeitsstandes, nach rechts die Zeit seit Füllbeginn aufgetragen.
Welches der drei Diagramme A, B, C beschreibt den Füllvorgang am ehesten?
Begründen Sie Ihre Entscheidung, indem Sie zu jeder der drei skizzierten Kurven Stellung nehmen.

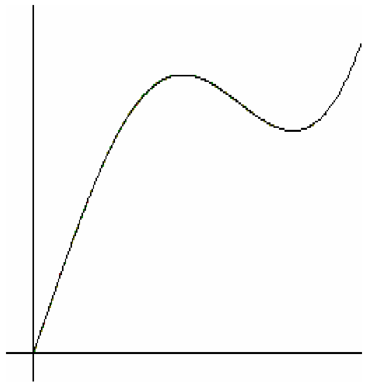
A



B



C



7

45

Punkte

Für jedes reelle x sind die Funktionen u und v mit

$$u(x) = x^4 \text{ und } v(x) = e^x$$

sowie die Funktionen

$$f_1 = u + v, \quad f_2 = u - v, \quad f_3 = \frac{u}{v}, \quad f_4 = u \cdot v$$

gegeben. Ihre Schaubilder sind K_1, K_2, K_3 und K_4.

a) Beschreiben Sie den Verlauf von K_4 für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.
Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Schaubildes von f_4.
Wie entsteht K_3 aus K_4? Begründen Sie Ihre Aussage. 13

b) Beschreiben Sie f_1 und f_2 für $x \to \infty$ bzw. für $x \to -\infty$.
Skizzieren Sie K_1.

Zeigen Sie: $f_1''(x) > 0$ für alle x.
Begründen Sie, dass K_1 keinen Hochpunkt und genau einen Tiefpunkt hat.

Beschreiben und begründen Sie den Verlauf von K_2. 11

c) Die Funktion F_3 mit

$$F_3(x) = -e^{-x}(x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x + 24);\ x \in IR$$

ist eine Stammfunktion von f_3.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von K_3, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 6$ eingeschlossen wird.
Untersuchen Sie, ob die im ersten Quadranten liegende Fläche zwischen K_3 und der x-Achse einen endlichen Flächeninhalt hat. 5

d) Bestimmen Sie alle gemeinsamen Punkte der Schaubilder von u und v. 4

e) Berechnen Sie die exakten Lösungen der Gleichung $u(v(x)) = v(u(x))$. 4

f) Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion h 3. Grades, die an der Stelle x=0 mit der Funktion v im Funktionswert und den Werten der ersten drei Ableitungen übereinstimmt.
Ermitteln Sie ein möglichst großes Intervall, in dem sich die Funktionswerte von h und v um maximal 0,1 unterscheiden. 8

45

Punkte

Vektorgeometrie

Die Punkte O(0 | 0 | 0), A(8 | 0 | 0), B(0 | 4 | 0) und $C_k(0 \mid k \mid 6)$ mit $k \in IR$, sind die Eckpunkte der Pyramide $OABC_k$.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide $OABC_0$. 3

b) Beschreiben Sie die Ortslinie der Punkte C_k.
Zeichnen Sie diese Ortslinie in das Schrägbild aus Teil a).

Für welche k ist das Dreieck ABC_k gleichschenklig? 6

c) Beschreiben Sie die Lage der Geradenschar durch die Punkte A und C_k. 3

d) Berechnen Sie das Pyramidenvolumen allgemein in Abhängigkeit von k und erläutern Sie Ihr Ergebnis. 3

Punkte

Stochastik

An einer Berufsakademie bewerben sich 20 Abiturientinnen und 90 Abiturienten um einen Studienplatz im Fach A sowie 80 Abiturientinnen und 10 Abiturienten um einen Studienplatz im Fach B.

a) Im Fach A werden 90 Studienplätze vergeben. Im Folgenden wird angenommen, dass diese Studienplätze ausgelost werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Bewerberinnen zugelassen werden?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 13 Frauen einen Studienplatz bekommen?

Würden Sie wetten, dass höchstens 16 Bewerberinnen einen Studienplatz erhalten? 7

b) Im vergangenen Jahr betrug die Wahrscheinlichkeit, dass ein männlicher Bewerber für Fach B zum Studium zugelassen wurde, 45 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zu Fach B Zugelassener weiblich war, betrug 35 %.
Wie groß müsste die Wahrscheinlichkeit sein, dass ein Bewerber für Fach B männlich ist und zugelassen wird, wenn die Ereignisse
E: Ein(e) Bewerber(in) wird zugelassen und
F: Ein Bewerber ist männlich
stochastisch unabhängig sein sollen. 4

c)

	weiblich		männlich	
	Bewerber	zugelassen	Bewerber	zugelassen
Fach A	90	72	20	18
Fach B	10	2	80	24

Die Tabelle zeigt die Zulassungen zu den beiden Fächern. Ein Studentenvertreter prangert die Berufsakademie in einem Zeitungsartikel an mit der Schlagzeile:
„Männerfeindliche Uni: Nur 42 % der Männer dürfen studieren".
Nehmen Sie dazu Stellung. 4

30

Punkte

Vektorgeometrie

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 passieren zum gleichen Zeitpunkt $(t = 0)$ den Ort $P_1(-4 \mid 4 \mid 0)$ bzw. $P_2(7 \mid 12 \mid 7)$. Sie bewegen sich jeweils mit konstanten Geschwindigkeiten

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{12}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}.$$

Die in der Aufgabe auftretenden Zeiten sind in s, die Orte in km und die Geschwindigkeiten in $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ angegeben.

a) Wie lässt sich der Ort eines Flugzeuges zu einem beliebigen Zeitpunkt t angeben?

Zeigen Sie, dass sich die Flugzeuge F_1 und F_2 in einer Ebene bewegen.

Geben Sie für diese Ebene eine Gleichung an. 6

b) Aus Sicherheitsgründen müssen die Flugzeuge am gleichen Ort einen zeitlichen Abstand von mindestens 1 Minute haben.

Die Flugbahnen von F_1 und F_2 haben einen Punkt gemeinsam.
Ist dort dieser zeitliche Sicherheitsabstand gewährleistet?

Welche räumliche Entfernung besitzen die beiden Flugzeuge F_1 und F_2, wenn sich F_1 im Punkt $P_3(6 \mid 14 \mid 5)$ befindet? 6

c) Beschreiben Sie anhand einer Skizze, wie man die „Steigung" einer Flugbahn berechnen könnte. 3

Stochastik

Punkte

Der EDV-Betreuer einer Schule weiß aus Erfahrung, dass von 12 gelieferten Flachbildschirmen einer nicht funktioniert. Er packt die ersten drei Geräte aus.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bildschirme defekt sind?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einer defekt ist? 5

Die Schule erhält 48 neue Bildschirme, die in zwei Räumen aufgestellt werden. Die Bildschirme werden von 01 bis 48 durchnummeriert und zufällig auf die Räume verteilt: in den ersten Raum kommen 28 Bildschirme und in den zweiten Raum 20. Es stehen jeweils vier Bildschirme in einer Reihe.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bildschirme Nr. 01 bis Nr. 05 in demselben Raum stehen? 5

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bildschirme Nr. 47 und Nr. 48 im ersten Raum in der ersten Reihe nebeneinander stehen? 5

30

Vektorielle Geometrie Punkte

Mit Hilfe von Bildbearbeitungsprogrammen ist es möglich digitale Bilder mit Spezialeffekten wie z.B. Nebel zu versehen.
Um dies umzusetzen geht man von folgendem Modell aus:
In der xz-Ebene befindet sich ein Bild. Vor diesem denkt man sich einen gleichmäßig mit Nebel ausgefülltem Quader mit den Eckpunkten

$A(8\,|\,0\,|\,0)$, $B(8\,|\,4\,|\,0)$, $C(0\,|\,4\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,0)$,

$E(8\,|\,0\,|\,6)$, $F(8\,|\,4\,|\,6)$, $G(0\,|\,4\,|\,6)$, $H(0\,|\,0\,|\,6)$

Ein Betrachter befindet sich im Punkt $K(4\,|\,10\,|\,3)$.

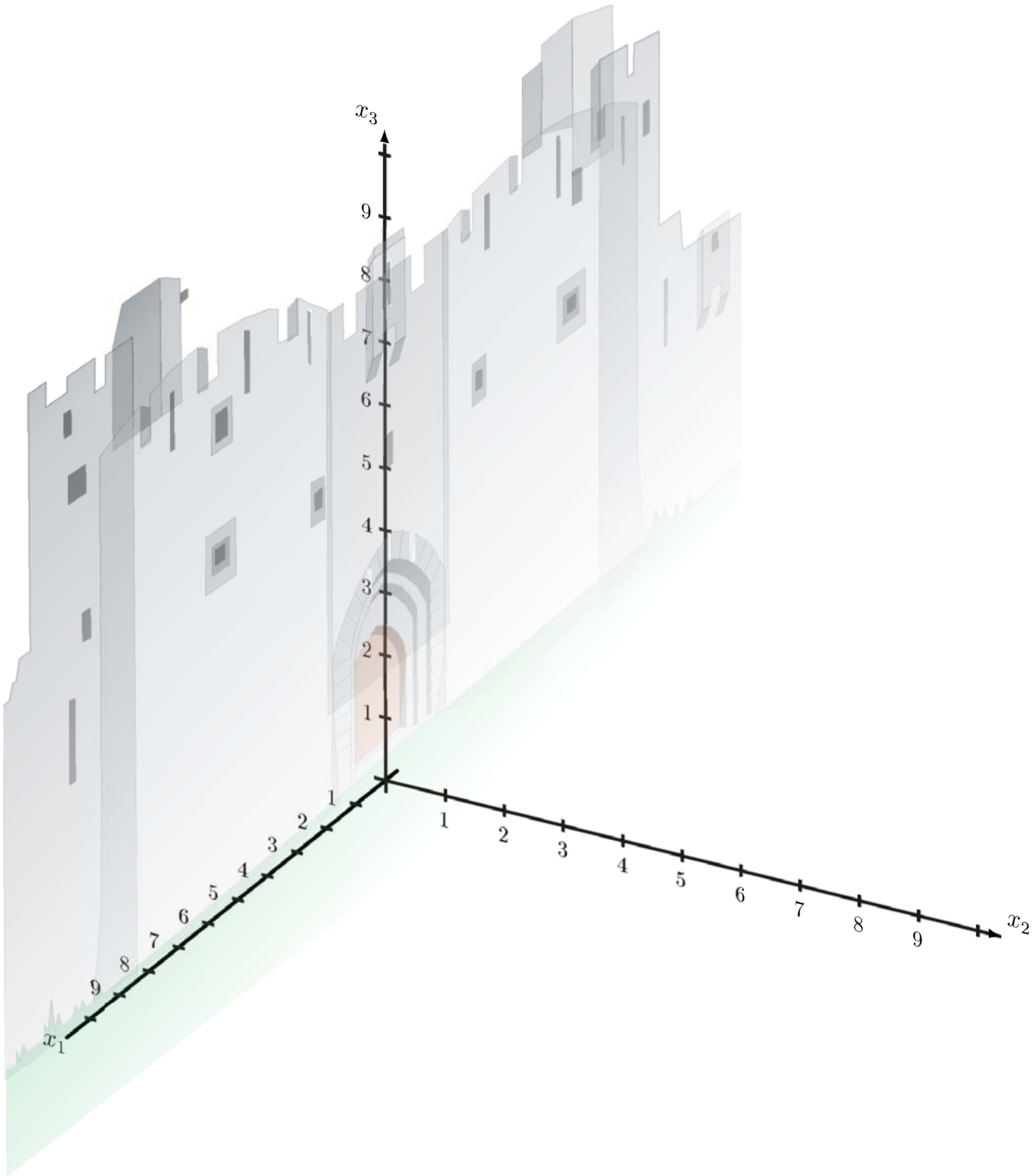
Wie stark ein Bildpunkt aufgehellt wird, hängt davon ab, wie lang der Abschnitt der Strecke zwischen Betrachter und Bildpunkt ist, der im Nebel verläuft.

a) Zeichnen Sie in das beiliegende Arbeitsblatt den „Nebelquader“ und die Position des Betrachters ein. 3

b) Alle Bildpunkte, die der Beobachter durch Nebel beeinflusst sieht, liegen in einem Rechteck.
Bestimmen Sie die Eckpunkte dieses Rechtecks und seinen Flächeninhalt. 6

c) Die Nebelintensität I eines Punktes in der xz-Ebene ist von der Länge d des Streckenabschnitts zwischen Betrachter und Bildpunkt im Nebel abhängig, es gilt $I = I_0\, e^{0,3d}$.
Begründen Sie, in welchen Punkten der xz-Ebene die Nebelintensität am größten ist.
Berechnen Sie für diese Punkte die Nebelintensität mit $I_0 = 1$. 6

Arbeitsblatt zu II C TG



NAK **Vektorgeometrie / Stochastik (TG)**
Bearbeitungszeit: 80 Minuten **II C TG** Punkte: 30

Stochastik

Punkte

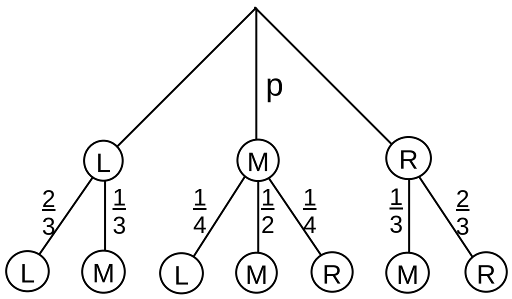
In einem großen Warenlager werden Warenpakete auf einem Fließbandsystem mit drei nebeneinander verlaufenden Fließbändern transportiert. Eine elektronische Steuerung ermöglicht es, dass die Warenpakete an Knotenpunkten alle 5 m auf ein benachbartes Band umgeleitet werden können. Ein Paket auf dem mittleren Band kann also auf eines der beiden äußeren Bänder, und ein Paket auf einem der äußeren Bänder kann auf das mittlere Band umgeleitet werden. Zu Testzwecken durchläuft ein Paket das Fließbandsystem. Dabei wird an jedem Knotenpunkt das Band für die nächste Wegstrecke nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

a) Im ersten Testlauf durchläuft das Paket eine Strecke mit zwei Knotenpunkten. Zu Beginn liegt es auf dem mittleren Band. Die Steuerung ist bei diesem Testlauf so eingestellt, dass an jedem Knotenpunkt jede Möglichkeit gleich wahrscheinlich ist.

Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das die möglichen Wege des Paketes wiedergibt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Paket
- höchstens ein Mal das Band wechselt.
- am Ende des Testlaufes auf dem mittleren Band liegt. 8

b) Bei einem weiteren Testlauf wird die Zahl der Knotenpunkte vergrößert und die Steuerung neu eingestellt. Nun gilt, dass bei jedem Knoten der Verbleib auf dem Band doppelt so wahrscheinlich ist wie jede einzelne andere Möglichkeit. Das Paket liegt zu Beginn wieder auf dem mittleren Band.



Im Baumdiagramm sind die möglichen Übergänge an irgendeinem Knotenpunkt dargestellt. Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit p^*, dass sich das Paket nach diesem Knoten wieder auf dem mittleren Band befindet, gilt:

$$p^* = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}p.$$

Begründen Sie, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass das Paket nach einem Knotenpunkt auf dem mittleren Band liegt, bei jedem Knoten geringer wird.
Würden Sie wetten, dass das Paket am Ende des Fließbandsystems auf einem der äußeren Bänder liegt?

7

30

Vektorielle Geometrie

Punkte

a) 1. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

$$\left| \begin{array}{l} -4x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 11 \end{array} \right| \quad \text{und} \quad \left| \begin{array}{l} -4x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ -2x - 4y + 5z = 5 \end{array} \right| .$$

2. Für welche $t \in IR$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} -4x + y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ -2x - 4y + 5z = t \end{array} \right|$$ keine, genau eine, beliebig viele Lösungen?

7

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Geben Sie zwei Ebenen an, deren Schnitt die Gerade g ist. 3

c) Geben Sie eine Gerade an, die parallel zur Ebene E ist und durch den Ursprung verläuft. 2

d) Jemand behauptet:
„Der Schnitt zweier verschiedener zu g parallelen Ebenen ist eine zu g parallele Gerade.“
Widerlegen Sie diese Behauptung durch ein Gegenbeispiel.
Ergänzen Sie die Behauptung so, dass eine wahre Aussage entsteht. 3

Stochastik

Punkte

Der EDV-Betreuer einer Schule weiß aus Erfahrung, dass von 12 gelieferten Flachbildschirmen einer nicht funktioniert. Er packt die ersten drei Geräte aus.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bildschirme defekt sind?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einer defekt ist? 5

Die Schule erhält 48 neue Bildschirme, die in zwei Räumen aufgestellt werden. Die Bildschirme werden von 01 bis 48 durchnummeriert und zufällig auf die Räume verteilt: in den ersten Raum kommen 28 Bildschirme und in den zweiten Raum 20. Es stehen jeweils vier Bildschirme in einer Reihe.

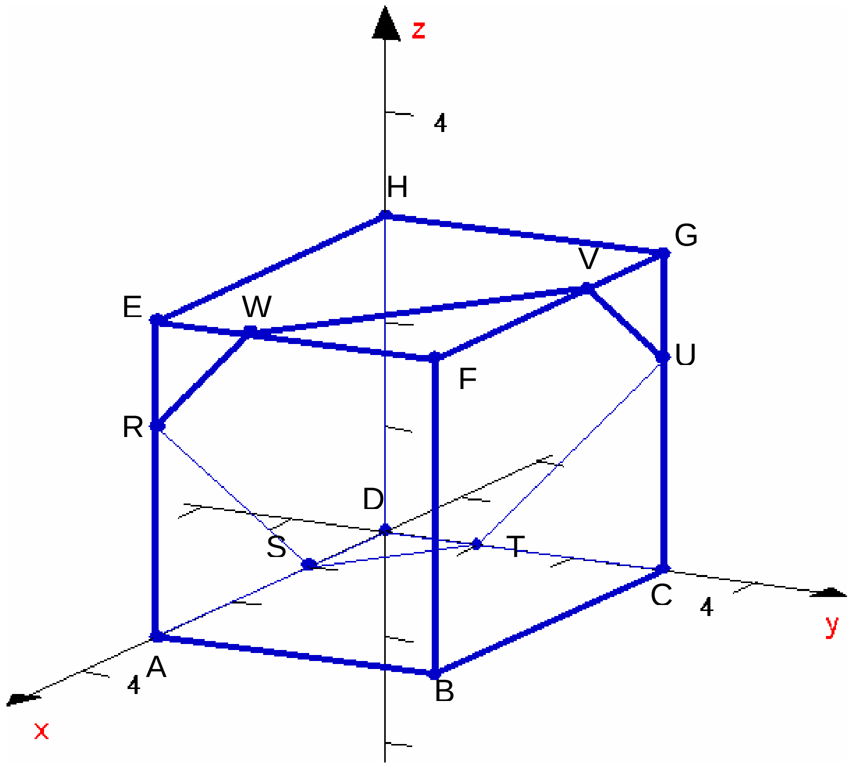
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bildschirme Nr. 01 bis Nr. 05 in demselben Raum stehen? 5

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Bildschirme Nr. 47 und Nr. 48 im ersten Raum in der ersten Reihe nebeneinander stehen? 5

30

Punkte

Vektorielle Geometrie



Die Punkte R, S, T, U, V und W teilen die Würfelseiten im Verhältnis 1:2.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte R, S, T, U, V und W an. 2

b) Zeigen Sie: - Die Geraden (UV) und (RS) sind parallel.

- Die Raumdiagonalen des Würfels schneiden sich nicht in der durch die Punkte R, S und T definierten Ebene. 5

c) Berechnen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$x_1 \overrightarrow{ST} + x_2 \overrightarrow{TU} + x_3 \overrightarrow{UV} = \vec{o}$$

Interpretieren Sie die Lösung geometrisch. 4

d) Untersuchen Sie, ob beim Durchschneiden des Würfels in einer Ebene längs der Kanten ST und TU die Punkte V,W und R in der Schnittfläche liegen. 4

Punkte

Stochastik

An einer Berufsakademie bewerben sich 20 Abiturientinnen und 90 Abiturienten um einen Studienplatz im Fach A sowie 80 Abiturientinnen und 10 Abiturienten um einen Studienplatz im Fach B.

a) Im Fach A werden 90 Studienplätze vergeben. Im Folgenden wird angenommen, dass diese Studienplätze ausgelost werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Bewerberinnen zugelassen werden?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 13 Frauen einen Studienplatz bekommen?

Würden Sie wetten, dass höchstens 16 Bewerberinnen einen Studienplatz erhalten? 7

b) Im vergangenen Jahr betrug die Wahrscheinlichkeit, dass ein männlicher Bewerber für Fach B zum Studium zugelassen wurde, 45 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zu Fach B Zugelassener weiblich war, betrug 35 %.
Wie groß müsste die Wahrscheinlichkeit sein, dass ein Bewerber für Fach B männlich ist und zugelassen wird, wenn die Ereignisse
E: Ein(e) Bewerber(in) wird zugelassen und
F: Ein Bewerber ist männlich
stochastisch unabhängig sein sollen. 4

c)

	weiblich		männlich	
	Bewerber	zugelassen	Bewerber	zugelassen
Fach A	90	72	20	18
Fach B	10	2	80	24

Die Tabelle zeigt die Zulassungen zu den beiden Fächern. Ein Studentenvertreter prangert die Berufsakademie in einem Zeitungsartikel an mit der Schlagzeile:
„Männerfeindliche Uni: Nur 42 % der Männer dürfen studieren“.
Nehmen Sie dazu Stellung. 4

30

Vektorrechnung

Punkte

a) Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Gleichungssysteme aus $\mathbb{R}^2$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + x_2 = 10 \end{array} \right| \text{ bzw. } \left| \begin{array}{lcr} x_1 + x_2 & = & 5 \\ 2x_1 + x_2 & = & 10 \\ 3x_1 + 2x_2 & = & 15 \end{array} \right|$$

Welche geometrische Bedeutung haben die einzelnen Gleichungen und die Lösung der Gleichungssysteme? 4

b) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem aus $\mathbb{R}^3$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 10 \end{array} \right|$$

2

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem aus $\mathbb{R}^3$

$$\left| \begin{array}{lcr} x_1 + x_2 - x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 10 \\ x_1 - 2x_2 + t \cdot x_3 & = & t \end{array} \right|$$

keine, genau eine, unendlich viele Lösungen?

Ergänzen Sie das Gleichungssystem durch eine weitere Gleichung,
so dass

- sich die Anzahl der Lösungen nicht ändert,
- das neue Gleichungssystem keine Lösung hat.

7

d) Bei der Berechnung der Schnittmenge einer Geraden mit einer Ebene ergibt sich das Gleichungssystem aus c) mit t=1.

Geben Sie eine Gerade sowie eine Ebene an, für die sich bei der Schnittmengenberechnung dann dieses Gleichungssystem ergibt. 4

Stochastik

	Punkte
In einer Stadt gibt es zwei Taxifirmen. Die eine Firma hat nur blaue Taxen, die andere nur grüne Taxen. Von den blauen gibt es 5, von den grünen 25.	
a) Vor dem Bahnhof stehen 4 Taxen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr blaue als grüne Taxen dort stehen.	3
b) An dem Taxistand vor dem Rathaus befinden sich 2 blaue und 2 grüne Taxen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die Taxen in farblich abwechselnder Reihenfolge?	4
c) Eines Nachts ereignet sich an einer Kreuzung ein Unfall mit einem Taxi. Der Fahrer flieht mit dem Taxi und das Taxi verschwindet in der Dunkelheit. Ein Zeuge gibt zu Protokoll, das Taxi sei blau gewesen. Die Rechtsanwältin der Firma mit den blauen Taxen lässt den Zeugen untersuchen und es stellt sich heraus, dass er Taxen – blaue und grüne – bei den zur Tatzeit herrschenden Lichtverhältnissen nur in 8 von 10 Fällen korrekt identifizieren kann. Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass das Taxi blau war?	6
	30

Punkte

Wirtschaftliche Anwendungen

Eine Schokoladenfabrik stellt für das Ostergeschäft drei unterschiedliche Sorten von Eiern her:

Osterei Standard
Osterei Gefüllt
Osterei Luxus

Die Eier werden in unterschiedlichen Tüten angeboten:

	A	**B**	**C**	**D**
Standard	12	0	0	4
Gefüllt	0	8	0	2
Luxus	0	0	6	1

a) Ein Großabnehmer Oldi bestellt für seine Filialen 150 000 Packungen A, 80 000 Packungen B, 60 000 Packungen C und 200 000 Packungen D.
Wie viele Ostereier pro Sorte müssen für diesen Auftrag produziert werden?
Berechnen Sie die Einnahmen für diesen Auftrag, wenn der Großabnehmer-Einkaufspreis für die vier Packungen
2,67 €, 1,34 €, 2,14 € bzw. 1,90 € beträgt? 4

Für die Produktion werden die Rohstoffe Schokolade, Nougat und Nüsse verarbeitet.
Der Verbrauch von Rohstoffen ist gegeben durch:

	A	B	C	D
Schokolade in g pro Packung	120	64	48	64
Nougat in g pro Packung	24	32	54	25
Zahl der Nüsse pro Packung	24	8	18	13

b) Jedes Osterei wird aus den drei Rohstoffen Schokolade, Nougat und Nüssen hergestellt.
Durch einen Computer-Absturz wurden die Rezepte nicht vollständig gespeichert. Nur folgende Informationen sind erhalten geblieben:
Für die Produktion von einem Osterei Standard benötigt man 10 g Schokolade und 2 g Nougat, beim gefüllten Ei werden 4 g Nougat und 1 Nuss sowie bei der Luxusausführung 8 g Schokolade und 9 g Nougat gebraucht.
Berechnen Sie die fehlenden Werte. 6

c) Die bisherigen Rohstoffpreise betrugen 5 € für 1 kg Schokolade, 8 € für 1 kg Nougat und 40 € für eine Tüte Nüsse (1000 Stück).
Es ist damit zu rechnen, dass sich der Preis für Nougat erhöht.
Die Produktion einer Packung muss eingestellt werden, wenn sich die Materialkosten für diese Packung um mehr als 10% erhöhen. Welche Preiserhöhung für Nougat kann dann noch toleriert werden? 7

Stochastik

Die fünfzehn Spielerinnen der Fußball-Nationalmannschaft bekommen neue Trikots:
1 in Größe XS, 3 in Größe S, 7 in Größe M und 4 in Größe L.
Leider fällt die Kiste beim Transport hinunter, dabei fallen alle Trikots heraus. Sie werden ohne Beachtung der Kleidergröße wieder in den Karton gelegt und an die Spielerinnen zufällig verteilt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: Eine Spielerin, die Größe S braucht, bekommt ein Trikot der richtigen Größe.
B: Eine Spielerin mit Größe L bekommt ein Trikot in der falschen Größe.
C: Alle Spielerinnen mit Größe M erhalten ein passendes Trikot.
D: Die Spielerin mit Größe XS bekommt das passende Trikot unter der Voraussetzung, dass alle Spielerinnen mit Größe L vorher ein passendes Trikot erhalten haben. 10

b) Die neue Sportkleidung besteht aus schwarzen Hosen und weißen Oberteilen. Für jede Spielerin verfügt die Mannschaft außerdem noch über gelbe Oberteile und rote Hosen sowie über dunkelblaue Oberteile und hellblaue Hosen.

Wie viele unterschiedliche Sportkleidungen lassen sich aus diesem Fundus kombinieren? 3

30

Wirtschaftliche Anwendungen

Punkte

Ein Erwachsener braucht bei leichter körperlicher Arbeit täglich ca. 9800 kJ Energie. Dieser Bedarf sollte durch 58 g - 69 g Eiweiß, 63 g - 88 g Fett und 317 g - 346 g Kohlenhydrate gedeckt werden.
Bei den folgenden Fragen wird davon ausgegangen, dass je 30 % dieser Mengen mit dem Frühstück eingenommen werden sollten.

Überprüfen Sie, ob das Frühstück von Gregor F. (siehe Tabelle 1, Arbeitsblatt) die empfohlenen Mengen an Energie, Eiweiß, Fett und Kohlenhydraten abdeckt.
Wie viel kostet das Frühstück von Gregor F.? 5

a) Stellen Sie aus Brötchen, Butter, Edamer und Honig ein Frühstück zusammen, das 2745 kJ Energie, 6,16 g Eiweiß, 30,74 g Fett und 74,79 g Kohlenhydrate enthält. 4

b) Eine Ernährungsberaterin stellt für einen Diätpatienten ein Frühstück zusammen. Dabei sollen durch Marmelade, Honig, Schinken 400 µg Vitamin C und 400 kJ Energie abgedeckt werden.
ist dies möglich? 6

Arbeitsblatt

Tabelle 1:
Das Frühstück von Gregor F.

Mengenangaben in Mikrogramm	Menge g	Vit. A	Vit. B_1	Vit. B_2	Niacin	Panto-thens.	Vit. B_6	Fol-säure	Vit. C	Vit. D	Vit. E	Biotin
Frühstück:												
Kaffee	200	-	-	-	2000,0	-	-	-	-	-	-	-
Kondesmilch (10 %)	10	7,15	8,8	48,0	26,0	84,0	7,7	0,8	270	0,013	23,0	0,82
Brötchen	100	-	98,0	34,0	1100,0	500,0	130,0	27,0	-	-	390,0	1,00
Butter	40	261,20	2,0	8,8	13,6	18,8	2,0	-	80	0,52	880,0	-
gek. Schinken	35	-	207,0	71,4	125,6	197,0	122,2	1,7	-	-	-	-
Edamer (45 %)	30	62,70	16,0	99,9	19,8	-	-	-	-	-	1.18,2	-
Marmelade	20	-	2,0	2,0	60,0	-	-	-	1860	-	-	-
Honig	20	-	0,6	8,3	21,6	-	-	-	400	-	-	-
Zwischenbilanz*	-	331,05	334,40	272,40	3366,3	799,8	261,9	29,5	2610	0.533	1411,2	1,82

Bei der Zwischenbilanz wurden Zubereitungsverluste berücksichtigt
Quelle: „Ernährungslehre zeitgemäß – praxisnah“

Tabelle 2:
Auszug aus der Nährwerttabelle und Preise
Angaben je 100 g Lebensmittel

	Energie (kJ)	Eiweiß (g)	Fett (g)	Kohlenhydrate (g)	Preise je 100 g
Kaffee	0	0,0	0,0	0,0	0,92 €
Tee	0	0,0	0,0	0,0	2,80 €
Orangensaft	205	0,7	0,2	11,0	0,72 €
Vollmilch	277	3,3	3,8	4,6	0,08 €
Kondensmilch (10%)	739	8,8	10,1	12,5	0,25 €
Brötchen	1124	8,0	1,0	55,4	0,83 €
Toastbrot	1138	8,5	3,9	49,2	0,11 €
Roggenbrot	917	7,5	1,4	45,0	0,25 €
Vollkornbrot	904	6,8	1,2	40,8	0,26 €
Knäckebrot	1506	11,4	1,7	68,9	0,63 €
Pumpernickel	875	5,2	1,2	40,8	0,41 €
Corn-Flakes	1600	7,6	0,7	85,0	0,68 €
Müsli-Mischung	1590	10,0	7,0	70,0	0,41 €
Butter	3167	0,7	83,2	0,7	0,58 €
Hühnerei	664	12,8	11,5	0,7	0,23 €
gek. Schinken	1105	19,5	20,6	0,0	1,52 €
Edamer (45%)	1550	24,8	28,3	0,0	0,99 €
Kräuterquark	575	10,0	9,0	0,0	0,49 €
Fruchtjoghurt	424	3,5	3,0	15,0	0,27 €
Marmelade	1184	0,6	0,0	70,0	0,38 €
Honig	1361	0,3	0,0	81,0	0,80 €

Stochastik

Punkte

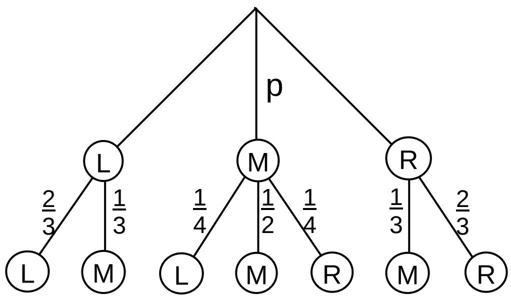
In einem großen Warenlager werden Warenpakete auf einem Fließbandsystem mit drei nebeneinander verlaufenden Fließbändern transportiert. Eine elektronische Steuerung ermöglicht es, dass die Warenpakete an Knotenpunkten alle 5 m auf ein benachbartes Band umgeleitet werden können. Ein Paket auf dem mittleren Band kann also auf eines der beiden äußeren Bänder, und ein Paket auf einem der äußeren Bänder kann auf das mittlere Band umgeleitet werden. Zu Testzwecken durchläuft ein Paket das Fließbandsystem. Dabei wird an jedem Knotenpunkt das Band für die nächste Wegstrecke nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

a) Im ersten Testlauf durchläuft das Paket eine Strecke mit zwei Knotenpunkten. Zu Beginn liegt es auf dem mittleren Band. Die Steuerung ist bei diesem Testlauf so eingestellt, dass an jedem Knotenpunkt jede Möglichkeit gleich wahrscheinlich ist.

Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das die möglichen Wege des Paketes wiedergibt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Paket
- höchstens ein Mal das Band wechselt.
- am Ende des Testlaufes auf dem mittleren Band liegt. 8

b) Bei einem weiteren Testlauf wird die Zahl der Knotenpunkte vergrößert und die Steuerung neu eingestellt. Nun gilt, dass bei jedem Knoten der Verbleib auf dem Band doppelt so wahrscheinlich ist wie jede einzelne andere Möglichkeit. Das Paket liegt zu Beginn wieder auf dem mittleren Band.



Im Baumdiagramm sind die möglichen Übergänge an irgendeinem Knotenpunkt dargestellt. Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit p^*, dass sich das Paket nach diesem Knoten wieder auf dem mittleren Band befindet, gilt:

$$p^* = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}p.$$

Begründen Sie, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass das Paket nach einem Knotenpunkt auf dem mittleren Band liegt, bei jedem Knoten geringer wird.
Würden Sie wetten, dass das Paket am Ende des Fließbandsystems auf einem der äußeren Bänder liegt?

7

30

Lineare Optimierung

Punkte

Ein Institut für Tierernährung empfiehlt, dass die täglichen Nahrungsrationen für ein mittelschweres Reitpferd mindestens 56 MJ und höchstens 70 MJ Energie (En) enthalten sollen. Der Rohfaseranteil (Rf) der Nahrungsration soll mindestens 18 % betragen.

Ein Futtermittelhersteller bietet Heu und Hafer mit den Inhaltsstoffen und Preisen je kg wie in der Tabelle aufgeführt an. Die Mengen Heu und Hafer sollen so kombiniert werden, dass unter Beachtung der Empfehlungen die Kosten für das Pferdefutter minimal werden.

	En (MJ)	Rf (g)	Preis (€)
Heu	4,5	342	0,150
Hafer	6,5	99	0,155

a) Stellen Sie den zulässigen Bereich für die täglichen Futtermengen grafisch dar.
Markieren Sie in dieser Grafik den Punkt, für den die Kosten minimal werden. Begründen Sie Ihre Entscheidung.
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes und die minimalen Kosten. 6

b) Untersuchen Sie, wie die Futterzusammensetzung geändert werden müsste, um die Kosten weiterhin so niedrig wie möglich zu halten, wenn der Preis für Heu gegenüber dem Haferpreis fallen würde? 4

c) Der Futtermittelhersteller bietet zusätzlich ein Kraftfutter mit 10 MJ Energie und 215 g Rohfaseranteil zum Preis von 0,23 € je kg an.

Überprüfen Sie, ob eine Mischung aus Hafer, Heu und Kraftfutter möglich ist, die 65 MJ Energie und 21 % Rohfaseranteil enthält, und höchstens 1,50 € kostet. 5

Stochastik

Punkte

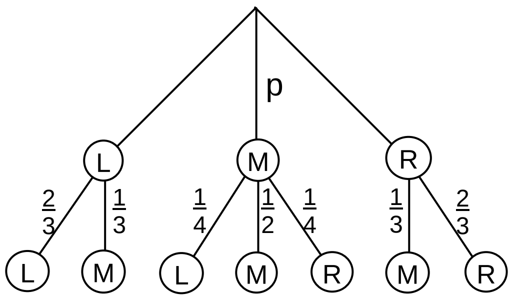
In einem großen Warenlager werden Warenpakete auf einem Fließbandsystem mit drei nebeneinander verlaufenden Fließbändern transportiert. Eine elektronische Steuerung ermöglicht es, dass die Warenpakete an Knotenpunkten alle 5 m auf ein benachbartes Band umgeleitet werden können. Ein Paket auf dem mittleren Band kann also auf eines der beiden äußeren Bänder, und ein Paket auf einem der äußeren Bänder kann auf das mittlere Band umgeleitet werden. Zu Testzwecken durchläuft ein Paket das Fließbandsystem. Dabei wird an jedem Knotenpunkt das Band für die nächste Wegstrecke nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

a) Im ersten Testlauf durchläuft das Paket eine Strecke mit zwei Knotenpunkten. Zu Beginn liegt es auf dem mittleren Band. Die Steuerung ist bei diesem Testlauf so eingestellt, dass an jedem Knotenpunkt jede Möglichkeit gleich wahrscheinlich ist.

   Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das die möglichen Wege des Paketes wiedergibt.

   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Paket
   - höchstens ein Mal das Band wechselt.
   - am Ende des Testlaufes auf dem mittleren Band liegt. 8

b) Bei einem weiteren Testlauf wird die Zahl der Knotenpunkte vergrößert und die Steuerung neu eingestellt. Nun gilt, dass bei jedem Knoten der Verbleib auf dem Band doppelt so wahrscheinlich ist wie jede einzelne andere Möglichkeit. Das Paket liegt zu Beginn wieder auf dem mittleren Band.



   Im Baumdiagramm sind die möglichen Übergänge an irgendeinem Knotenpunkt dargestellt. Zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeit p^*, dass sich das Paket nach diesem Knoten wieder auf dem mittleren Band befindet, gilt:

$$p^* = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}p.$$

   Begründen Sie, weshalb die Wahrscheinlichkeit, dass das Paket nach einem Knotenpunkt auf dem mittleren Band liegt, bei jedem Knoten geringer wird.
   Würden Sie wetten, dass das Paket am Ende des Fließbandsystems auf einem der äußeren Bänder liegt? 7

30

Lineare Optimierung

Punkte

Die Firma Mechatron stellt zwei unterschiedliche Arten G_1 und G_2 von Geräten her. Zur Fertigung von einem Stück G_1 benötigt ein Facharbeiter der Elektronik-Abteilung der Firma 15 Minuten und ein Facharbeiter der mechanischen Abteilung 23 Minuten. Für die Fertigung von G_2 sind je 25 Minuten eines Facharbeiters in der Elektronik- und in der Mechanik-Abteilung notwendig. Das Unternehmen setzt zur Produktion von G_1 und G_2 zwei Elektronik-Facharbeiter mit je 25 Wochenstunden Arbeitszeit und drei Mechaniker mit je 20 Wochenstunden Arbeitszeit ein. Marktanalysen legen es nahe, dass von G_1 nicht mehr als 130 Stück und von G_2 nicht mehr als 100 Stück pro Woche hergestellt werden sollen. G_1 wird zu 6,90 € und G_2 zu 7,30 € pro Stück verkauft.

a) Aufgrund der momentanen Transportkapazitäten kann die Firma derzeit pro Woche insgesamt maximal 152 Stück ausliefern. Berechnen Sie die Produktionsmengen, mit denen das Unternehmen den größtmöglichen Umsatz macht. 6

b) Die Fima hat die Möglichkeit, die Transportkapazitäten ohne zusätzliche Kosten zu erhöhen. Untersuchen Sie mit dem Simplexverfahren, ob dann der Umsatz erhöht werden kann. 6

c) Erläutern Sie z.B. anhand Ihrer Berechnung in Teil b) die Bedeutung von Schlupfvariablen. 3

Punkte

Stochastik

An einer Berufsakademie bewerben sich 20 Abiturientinnen und 90 Abiturienten um einen Studienplatz im Fach A sowie 80 Abiturientinnen und 10 Abiturienten um einen Studienplatz im Fach B.

a) Im Fach A werden 90 Studienplätze vergeben. Im Folgenden wird angenommen, dass diese Studienplätze ausgelost werden.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Bewerberinnen zugelassen werden?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 13 Frauen einen Studienplatz bekommen?
Würden Sie wetten, dass höchstens 16 Bewerberinnen einen Studienplatz erhalten? 7

b) Im vergangenen Jahr betrug die Wahrscheinlichkeit, dass ein männlicher Bewerber für Fach B zum Studium zugelassen wurde, 45 %. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zu Fach B Zugelassener weiblich war, betrug 35 %.
Wie groß müsste die Wahrscheinlichkeit sein, dass ein Bewerber für Fach B männlich ist und zugelassen wird, wenn die Ereignisse
E: Ein(e) Bewerber(in) wird zugelassen und
F: Ein Bewerber ist männlich
stochastisch unabhängig sein sollen. 4

c)

	weiblich		männlich	
	Bewerber	zugelassen	Bewerber	zugelassen
Fach A	90	72	20	18
Fach B	10	2	80	24

Die Tabelle zeigt die Zulassungen zu den beiden Fächern. Ein Studentenvertreter prangert die Berufsakademie in einem Zeitungsartikel an mit der Schlagzeile:
„Männerfeindliche Uni: Nur 42 % der Männer dürfen studieren". 4
Nehmen Sie dazu Stellung.

30

Punkte

Der vertikale Aufbau der Atmosphäre variiert mit der Zeit und dem Ort, abhängig von den Wetterbedingungen und der Sonnenaktivität.
Um eine Arbeitsgrundlage zu haben, wurde ein Modell – die Standard-Atmosphäre – entwickelt.

Für die Standard-Atmosphäre kann der Zusammenhang zwischen dem Druck p (in hPa[1]) und der Höhe h (in km) - für die ersten 10 km - durch eine Funktion mit

$$p = 1013 \cdot e^{-0{,}126\,h}; \quad h \in [0;\,10]$$

beschrieben werden.

a) Zeichnen Sie das Schaubild dieser Funktion für die ersten 10 km Höhe.
Berechnen Sie die momentane Änderungsrate in 2 km Höhe und interpretieren Sie Ihr Ergebnis. 5

b) Ausgehend von der Höhe null und dem Druck 1013 hPa sind zur Abschätzung des Drucks folgende unterschiedliche Faustregeln bekannt.

1. Für die untersten 2000 Höhenmeter fällt der Druck je 8 Höhenmeter um etwa 1 hPa, über 2000 Höhenmeter fällt der Druck je 11 Höhenmeter um etwa 1 hPa.

2. Der Druck halbiert sich alle 5500 m.

Geben Sie für die Faustformeln Gleichungen zur Berechnung des Druckes in Abhängigkeit von der Höhe an und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Zeichnen Sie die Kurven zur Regel 1 in das Koordinatensystem aus Teil a) ein.
Wie groß wäre nach Regel 2 der Druck in 50 km Höhe?
Begründen Sie, warum Regel 1 nicht unbegrenzt gültig ist.
Beurteilen Sie die Gültigkeit der beiden Regeln. 10

15

[1] hPa Abkürzung für die Druckeinheit Hektopascal

Punkte

Das Handbuch eines grafikfähigen Rechners gibt an, dass dieser zur näherungsweisen Berechnung der Ableitung der Funktion f an einer Stelle x folgende Formel benutzt:

f'(x) wird berechnet über $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

(symmetrischer Differenzenquotient),
wobei x und h vom Benutzer festgelegt werden.

a) Prüfen Sie anhand von jeweils einer selbstgewählten ganzrationalen, Exponential- und trigonometrischen Funktion, wie genau die o.g. Formel die Ableitung an einer selbstgewählten Stelle berechnet. Wählen Sie h = 0,1. 4

b) Erläutern Sie an einer Skizze die Bedeutung des symmetrischen Differenzenquotienten. 4

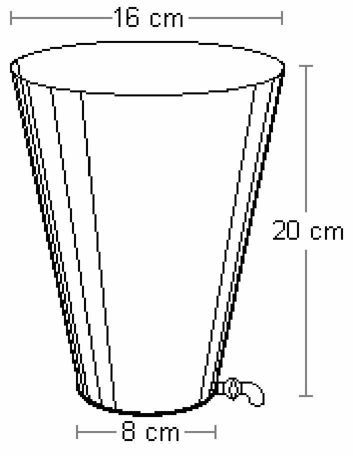
Begründen Sie an einem Beispiel, warum das oben genannte Verfahren auch Werte an Stellen liefert, an denen die erste Ableitung nicht definiert ist. 3

d) Zeigen Sie rechnerisch, dass das oben genannte Verfahren für alle quadratischen Funktionen exakte Werte liefert. 4

15

Punkte

Ein Gefäß wie in der nebenstehenden Abbildung ist bis zum oberen Rand mit Wasser gefüllt. Der Hahn am unteren Rand des Gefäßes ist so geregelt, dass in jeder Minute 200 ml Flüssigkeit auslaufen.



a) Erläutern Sie, wie man in der folgenden Tabelle das Volumen V in Abhängigkeit von der Zeit t erhält.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
V	2346	2146	1946	1746	1546	1346	1146	946	746	546	346	146
h	20	19	17,9	16,8	15,5	14,2	12,8	11,3	9,5	7,6	5,3	2,6

Zeigen Sie, wie man mit Hilfe der Beziehung

$$V = \frac{5\pi}{3}(r^3 - 64)$$

die Werte des Wasserstandes h berechnen kann.
Skizzieren Sie den Verlauf von h in Abhängigkeit von der Zeit t. 7

b) Geben Sie eine quadratische Funktion an, welche den Wasserstand in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise beschreibt. 3

c) Berechnen Sie mit Hilfe dieser Näherungsfunktion die Zeit, die vergeht, bis das Gefäß geleert ist.
Bewerten Sie das Ergebnis. 5

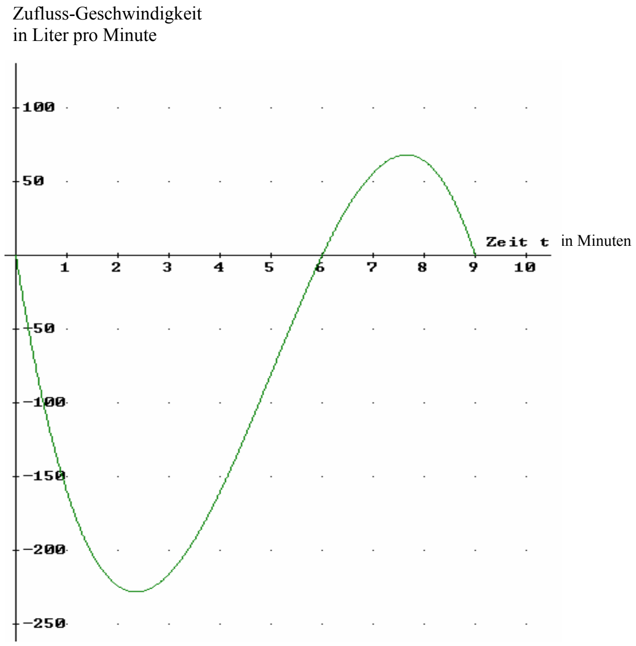
15

Punkte

Aus einem Wasserbecken wird Wasser abgelassen und wieder eingelassen.

Die Zufluss-Geschwindigkeit (in Liter pro Minute) ist im neben stehenden Schaubild skizziert.

Zur Zeit $t = 6$ (Minuten) ist das Becken leer.



a) Beschreiben Sie, in welchen Zeitintervallen der Wasserspiegel im Becken steigt bzw. fällt. 2

b) Geben Sie an, zu welcher Zeit sich am meisten Wasser im Becken befindet. Begründen Sie Ihre Aussage. 3

c) Schätzen Sie ab, wie viel Liter Wasser zur Zeit $t = 0$ im Becken sind. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen. 3

Die Funktion, die beschreibt, welche Wassermenge (in Liter) sich zur Zeit t (in Minuten) im Behälter befindet, wird mit

f: $t \rightarrow f(t) = -t^4 + 20\,t^3 - 108\,t^2 + 864 \quad t \in [0;\,9]$ angegeben.

d) Überprüfen Sie, ob diese Funktion den Vorgang und Ihre in a), b) und c) ermittelten Ergebnisse beschreibt. 5

e) Erläutern Sie, welche Bedeutung die Wendepunkte des Schaubilds von f für den Auslass- bzw. Füllvorgang haben? 2

15

Punkte

Die Installationsfirma Bad-OK bestellt in regelmäßigen Abständen gleich große Mengen eines Artikels, die dann in einem Lager aufbewahrt werden.

Die neu angestellte Lagerverwalterin möchte die Bestellmenge ermitteln, bei der die Summe aus Beschaffungs- und Lagerkosten möglichst gering ist. Sie findet aber nur noch folgende Daten vor:

Bestellmenge x	100	200	250	400	500	800
Beschaffungskosten pro Jahr in €	400	200	160	100	80	50
Lagerkosten pro Jahr in €	112,5	225	281,3	450	562,5	900

a) Geben Sie jeweils einen Term an, mit dem die Lagerverwalterin die Beschaffungs- bzw. die Lagerkosten in Abhängigkeit von x berechnen kann. 4

b) Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion, welche die Summe aus Beschaffungs- und Lagerkosten in Abhängigkeit von x wiedergibt. Ermitteln Sie grafisch die Bestellmenge, bei welcher diese Summe möglichst klein ist. 4

Bei einem Einkaufspreis von p € kann die Summe aus Beschaffungs- und Lagerkosten in Abhängigkeit von der Bestellmenge x mit Hilfe von

$$K_p(x) = 40000\ x^{-1} + \frac{9p}{100}x$$

berechnet werden.

c) Durch die Summanden von $K_p(x)$ sind die Terme von zwei Teilfunktionen gegeben. Zeigen Sie, dass die Stelle, an der sich die Schaubilder dieser beiden Funktionen schneiden, gleichzeitig die Minimalstelle für K_p ist. 4

d) In einem betriebswirtschaftlichen Lehrbuch findet man folgende Aussage:
"Je größer der Einkaufspreis, desto kleiner die optimale Bestellmenge."

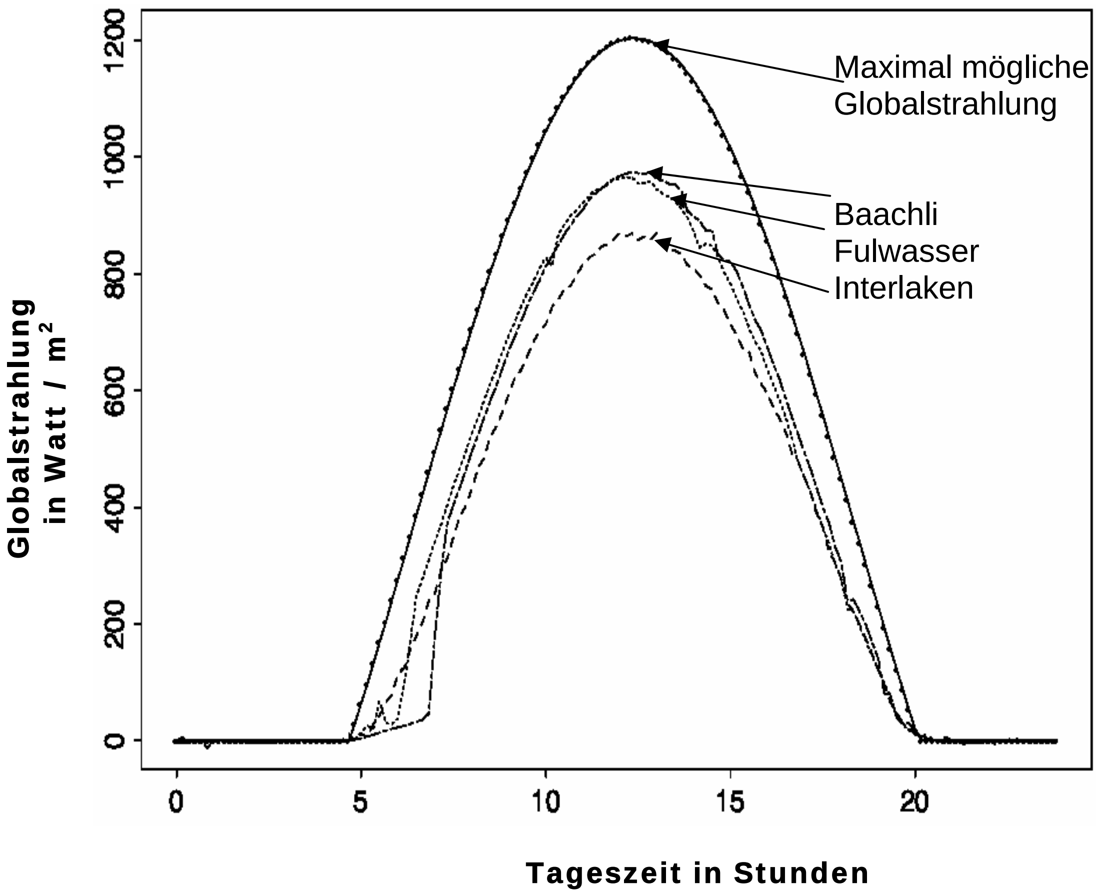
Untersuchen Sie, ob diese Aussage bei der Funktion K_p eine umgekehrte Proportionalität bedeutet, also z.B. sich die optimale Bestellmenge halbiert, wenn sich der Einkaufspreis verdoppelt. 3

15

Die bei uns einfallende Sonnenenergie wird unter anderem durch astronomisch bedingte Faktoren wie Sonnenstand und Entfernung Erde-Sonne bestimmt.

1. Einfluss des Sonnenstandes während eines Sommertages

Die folgende Abbildung zeigt einen Tagesgang der Globalstrahlung im Juli für drei verschiedene Orte in der Schweiz, sowie die maximal mögliche Globalstrahlung in $\frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}$.



Quelle: Diplomarbeit R. Probst Bern

Punkte

a) Entnehmen Sie der Abbildung für den Ort Interlaken mindestens fünf Punkte und geben Sie eine reelle Funktion an, die gut mit den experimentellen Werten für Interlaken übereinstimmt.
Begründen Sie Ihre Wahl der Punkte und Ihre Wahl des Funktionsterms.
Zeichnen Sie das Schaubild ihres Funktionsterms einschließlich der gewählten Punkte. 6

b) Berechnen Sie mit Hilfe Ihres Funktionsterms aus Teilaufgabe a) den Tagesmittelwert der Globalstrahlung 3

2. Einfluss der Entfernung Erde-Sonne:

Da die Erde sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne bewegt, ist die Entfernung zwischen Erde und Sonne nicht konstant. Die Intensität der Sonnenstrahlung im Verlauf eines Jahres wird näherungsweise durch die Funktion I mit

$$I(x) = 1{,}000 + 0{,}034\cos\left(\frac{2\pi x}{365}\right) + 0{,}0013\sin\left(\frac{2\pi x}{365}\right) \text{und } x \in [0;\, 365]$$

beschrieben

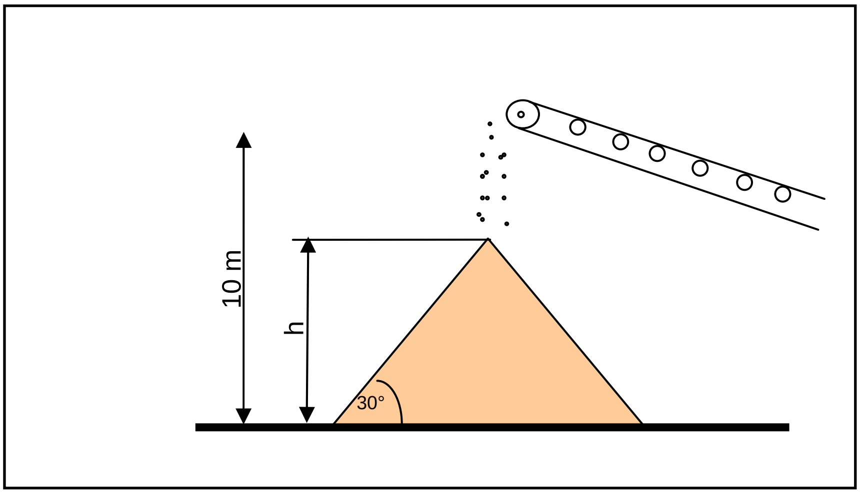
Skizzieren Sie das Schaubild von I.
Um wie viel Prozent weicht die Intensität maximal von 1 ab?

Die Intensität kann auch in der Form $I(x) = a \cdot \cos\left(b(x-c)\right) + d$ dargestellt werden. Bestimmen Sie a, b, c und d. 6

15

Punkte

Von einem Förderband werden pro Sekunde 30 dm^3 Sand herantransportiert und auf einem Sandberg mit dem Böschungswinkel 30° aufgetürmt. (Gleichgültig, ob ein Kind einen kleinen oder ein Förderband einen großen Sandberg auftürmt: Gleiches Schüttgut bildet immer gleiche Neigungswinkel.)



a) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

Zeit t in s	0	1	2	3	4	50
Kegel-volumen V in dm^3	0					
Kegelhöhe h in dm	0					

4

b) Zeigen Sie:

Die Funktion h mit $h(t) = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}} \cdot t^{\frac{1}{3}}$ gibt für t >0 die Höhe h (in dm) des Schüttkegels in Abhängigkeit von der Zeit t (in s) an.

Skizzieren Sie das zugehörige Schaubild. 4

c) Nach welcher Zeit reicht der Schüttkegel bis an die Unterkante des Förderbandes? Wie groß ist dann die Bodenfläche, die er einnimmt? 3

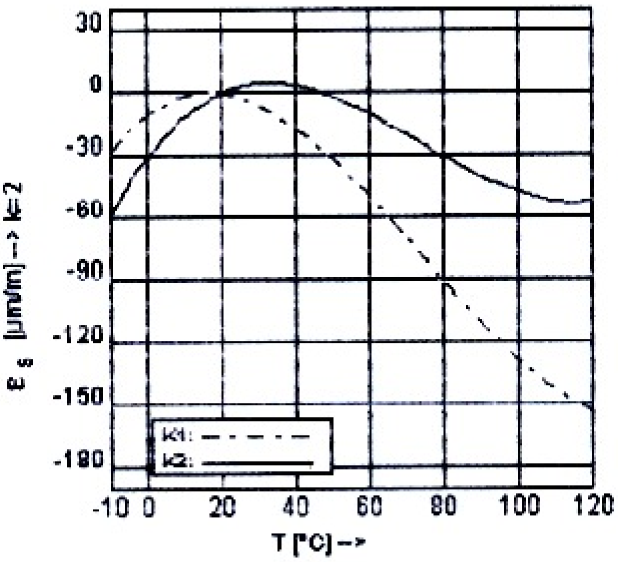
d) Wie groß ist die momentane Höhenänderung des Schüttkegels, wenn er 2 m hoch ist? Wie groß ist sie, wenn er 9 m hoch ist? 4

15

NAK **Anwendungsorientierte Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 40 Minuten **III H** Punkte: 15

Punkte



Die nebenstehende Abbildung zeigt die relative Längenänderung ε_S eines Dehnungsmessstreifens (DMS) in Abhängigkeit von der Temperatur T.

K_1 ist die Kennlinie für einen DMS ohne Anschlussbändchen,

K_2 diejenige für einen DMS mit 30 mm langem Anschlussbändchen.

Quelle:
HBM Wägetechnik GmbH
Darmstadt

a) Geben Sie den Term $f_1(T)$ für eine kubische Regressionsfunktion an, mit der man K_1 näherungsweise beschreiben kann. 3

b) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle:

K_2:	T in ^{0}C	-10	0	20	80
	ε_S in $\frac{\mu m}{m}$	?	?	?	?

Berechnen Sie mit diesen Wertepaaren den Funktionsterm einer ganzrationalen Funktionen dritten Grades.
Bestätigen Sie, dass diese Funktion das Schaubild K_2 nicht richtig wiedergibt.
Ersetzen Sie in der Tabelle ein Wertepaar, so dass damit das Ergebnis verbessert wird. 5

Die Firma gibt zur Berechnung der Elastizität ε_S für eine beliebige Temperatur $T \in [0; 120]$ in ^{0}C und eine beliebige Länge L des Anschlussbändchens in mm folgenden Ausdruck an:

$$\varepsilon_S(T) = -11.0 + 1.34T - 4.56 \cdot 10^{-2} T^2 + 2.05 \cdot 10^{-4} T^3 + 0.0333 \cdot L \cdot (T - 20)$$

c) Ermitteln Sie grafisch die größte Abweichung zwischen $\varepsilon_S(T)$ für L=0 und der Funktion f mit

$$f(T) = \frac{1}{5400}T^3 - \frac{2}{45}T^2 + \frac{25}{18}T - \frac{310}{27}\,.$$ 3

d) $\varepsilon_S(T)$ lässt sich ungefähr schreiben als

$$\varepsilon_S(T) \approx g_L(T) = g_0(T) + \frac{L}{30}(T - 20).$$

Begründen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass das zu L = 15 gehörende Schaubild von ε_S ungefähr in der Mitte zwischen K_1 und K_2 verläuft.
Beschreiben Sie, wie das zu einem beliebigen Wert $L \in [0; 30]$ gehörende Schaubild von ε_S im Vergleich zu K_1 und K_2 verläuft. 4

15

Katja und Mark wollen sich nach dem Abitur einen Traum erfüllen und eine Kreuzfahrt im Mittelmeer unternehmen. Dazu studiert Katja die Kataloge der Reiseagentur *Weltenbummler*, die Pauschalreisen mit Flug, Kabinenunterkunft und Vollpension anbieten (s.u.). Sie interessiert sich für die Einzelpreise und stellt folgendes Gleichungssystem auf:

$$F + \tfrac{1}{4} K + P = 985$$
$$F + \tfrac{1}{3} K + P = 1110$$
$$F + 2 \cdot \tfrac{1}{4} K + 2P = 1595$$

a) Erläutern Sie Katjas Ansatz für das Gleichungssystem. 6

b) Berechnen Sie die Einzelpreise. 3

c) Überprüfen Sie, ob diese Einzelpreise auch der Kalkulation bei Belegung der Kabine mit 2 Personen (1360 €) bzw. 1 Person (1565 €) zugrunde liegen. 3

d) Im Reisebüro erfährt Mark, dass bei den ausgedruckten Preisen für die 2. Woche ein Preisnachlass von 10 % für Kabine und Vollpension bereits eingeräumt sind. Wie wird Mark Katjas Gleichungssystem verändern, wenn er die Einzelpreise neu berechnen will? 3

15

Code: AURA01P	Reisezeit		S	A		B
Kategorie	Belegung	Code	7 Tage	7 Tage	14 Tage	7 Tage
D innen	4 Erw.	G4	945	985	1595	1030
	3 Erw.	G3	1055	1110	1850	1170
	2 Erw.**	G2	1290	1360	2340	1435
	1 Erw.*	G1	1460	1565	2750	1685
C innen	4 Erw.	C4	980	1030	1675	1075
	3 Erw.	C3	1095	1165	1945	1220
	2 Erw.**	C2	1350	1425	2465	1495
	1 Erw.*	C1	1535	1650	2910	1770
B außen mit eingeschränkter Sicht	4 Erw.	F4	1015	1060	1740	1095
	3 Erw.	F3	1135	1195	2025	1250
	2 Erw.**	F2	1395	1475	2570	1540
	1 Erw.*	F1	1590	1705	3030	1820
B außen	4 Erw.	B4	1075	1125	1875	1170
	3 Erw.	B3	1210	1285	2190	1340
	2 Erw.**	B2	1495	1585	2790	1655
	1 Erw.*	B1	1715	1850	3320	1935
A außen mit eingeschränkter Sicht	2 Erw.**	E2	1530	1620	2855	1690
	1 Erw.*	E1	1745	1890	3395	1980

Punkte

Als Leistungskurve eines Gleitschirms bezeichnet man das Schaubild der Funktion, die der Horizontalgeschwindigkeit x (in $\frac{m}{s}$) die Sinkgeschwindigkeit y (in $\frac{m}{s}$) zuordnet.
Die Leistungskurve eines bestimmten Gleitschirmtyps kann näherungsweise durch die Gleichung $y = \frac{1}{8}\left(2x + 40 - 5\sqrt{16x - x^2}\right)$ beschrieben werden.

a) Skizzieren Sie die Leistungskurve bis zur horizontalen Höchstgeschwindigkeit von x=13.
Welche Sinkgeschwindigkeit ergibt sich bei annähernd vertikalem Flug? 3

b) Bei welcher Horizontalgeschwindigkeit ist die Sinkgeschwindigkeit minimal – und daher die Flugdauer maximal?

Wie lange dauert der Flug (ohne Wind) höchstens, wenn man 1000 m über Grund startet? Wie weit fliegt man dabei in horizontaler Richtung? 3

c) In der Praxis wird der Teil der Leistungskurve rechts von der Geschwindigkeit des geringsten Sinkens, durch eine Parabel 2. Ordnung angenähert.
Geben Sie eine Gleichung einer solchen Näherungskurve an. 4

d) Legt man vom Ursprung eine Tangente an die Näherungskurve mit der Gleichung

$$y = 0{,}04x^2 - 0{,}39x + 2{,}56\,,$$

so ergibt sich als Berührpunkt der Punkt "Bestes Gleiten".
Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes. 5

15

Punkte

Aus einem in der Luft stehenden Hubschrauber springt ein Fallschirmspringer mit der Anfangsgeschwindigkeit 1 m/s. Er fällt 10 Sekunden lang mit geschlossenem Fallschirm. In dieser Zeit nimmt seine Geschwindigkeit v (in m/s) in jeder Sekunde um den Betrag $d_V = 10 - 0{,}009\ v^2$ zu.

a) Erstellen Sie für die ersten 10 s eine Wertetabelle der Geschwindigkeiten des Fallschirmspringers; setzen Sie dafür zunächst als Schrittweite 1 Sekunde an. Skizzieren Sie das Schaubild der durch diese Tabelle gegebenen Funktion. 6

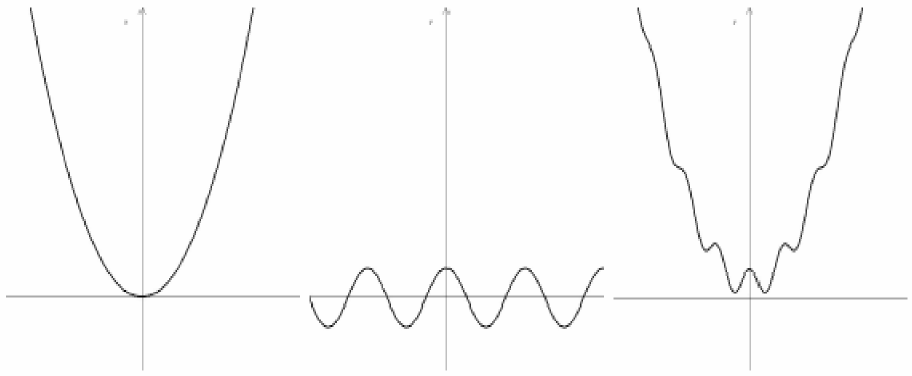
b) Beschreiben Sie, wie sich das Schaubild verändert, wenn man die Schrittweite in der Tabelle und den Geschwindigkeitszuwachs bei jedem Schritt halbiert. 3

c) Wie viele Sekunden lang ist die Geschwindigkeit kleiner als 20 m/s?

Wie groß ist die Beschleunigung am Anfang?

Begründen Sie, weshalb die Fallgeschwindigkeit nie größer als 34 m/s werden kann, auch wenn der freie Fall länger als 10 s dauern würde. 6

15



Es sind die drei Funktionen f, g und h gegeben durch

$$f(x) = x^2; \quad x \in IR,$$
$$g(x) = \cos(x); \quad x \in IR,$$
$$h(x) = x^2 + \cos(x); \quad x \in IR$$

Auf Grund der oben gezeichneten Graphen von f und g könnte man schließen, dass der Graph von h so wie in dem dritten vorgegebenen Koordinatensystem aussehen sollte.

a) Skizzieren Sie das Schaubild von h.

b) Erklären Sie mit Hilfe der zweiten Ableitung von h, warum das Schaubild von h nicht wie in obiger Abbildung aussieht.

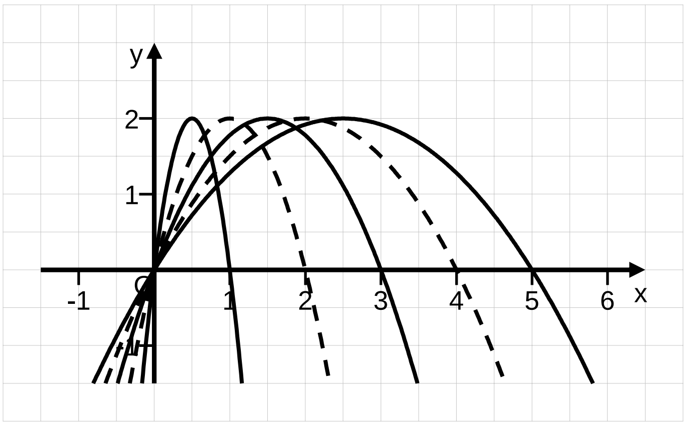
c) Für jedes reelle t ist die Funktion k_t mit

$$k_t(x) = x^2 + \cos(tx); \quad x \in IR$$

gegeben.

Zeigen Sie: Je nach Wahl des Wertes von t hat das Schaubild von k_t entweder unendlich viele oder gar keine Wendepunkte.

Gegeben ist eine Parabelschar. Im folgenden Koordinatensystem sind einige Parabeln dieser Schar gezeichnet.



a) Begründen Sie, dass die Parabelschar beschrieben werden kann durch Funktionen f_t oder g_s mit

$$f_t\,(x) = -\frac{8}{t^2}x(x-t);\quad x \in IR;\quad t>0$$

$$g_s(x) = -\frac{2}{s^2}(x-s)^2 + 2;\quad x \in IR;\quad s>0$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen t und s, wenn f_t und g_s dasselbe Schaubild haben?

b) Zeigen Sie, dass für die gegebene Parabelschar gilt:
Die Scheitelpunkte liegen auf einer Geraden.

Für eine andere Parabelschar gilt:
Die Scheitelpunkte liegen auf einer Sinuskurve. Geben Sie einen Funktionsterm an.

c) Wie muss man die einzelnen Scharkurven in y-Richtung strecken, damit die von der x-Achse und jeder Scharkurve eingeschlossene Fläche den Inhalt 3 hat?
Geben Sie den Streckfaktor an.

a) Die Punkte

P (1 |-3 | 2), Q (-3 | 1 | -2),
R (3 | 5 | 4) und S (-5 | -7 | 6)
bilden das Viereck PQRS.
Stellen Sie dieses Viereck in einem Koordinatensystem dar.
Zeigen Sie, dass die Seitenmitten dieses Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.
Zeichnen Sie dieses Parallelogramm ein.
Überprüfen Sie, ob es sich bei diesem Parallelogramm um eine Raute handelt.

b) Beweisen Sie, dass die Seitenmitten eines Vierecks immer die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

Klaus-Dieter Roth
Rita Wurth
Ingrid Kolupa
Bruno Weber (bruno.weber@abt3.leu.bw.schule.de)
Annemarie Ahring-Nowak
Karlheinz Schmauder